

EGY ÖTLET

Extrémális...

PINTÉR LAJOS

A következő, zömében középiskolában, szakkörön megoldható példák közös jellemzője az, hogy valamilyen módon az „extrémális elv”-et alkalmazzuk. A feladatok megoldásának leírása néha vázlatos, további „tanári munkát” igényel. A példáink kissé ötletszerűen jönnek egymás után.

1. példa. *Vannak-e olyan a, b, c, d pozitív egész számok, hogy*

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$$

legyen?

Megoldás. Tegyük fel, hogy vannak ilyen számok, azaz van a feladatnak megoldása. Vegyünk ezek közül olyat, amelyekre $a^2 + b^2$ legkisebb.

Az egyenletből leolvasható, hogy $3 \mid a^2 + b^2$. Tudjuk, hogy egy x egész szám vagy osztható 3-mal, vagy pedig a négyzete x^2 , maradékul 1-et ad 3-mal osztva. Így tehát $3 \mid a^2 + b^2$ -ből következik, hogy $3 \mid a^2$ és $3 \mid b^2$, azaz $3 \mid a$ és $3 \mid b$. De ekkor $9 \mid a^2 + b^2$, azaz $3 \mid c^2 + d^2$. Az előbbi megfontolás alapján $3 \mid c$ és $3 \mid d$. Ezért $a = 3a_1$, $b = 3b_1$, $c = 3c_1$, $d = 3d_1$, ahol a_1, b_1, c_1, d_1 pozitív egész számok. Ezt felhasználva

$$9a_1^2 + 9b_1^2 = 3(9c_1^2 + 9d_1^2),$$

vagy

$$a_1^2 + b_1^2 = 3(c_1^2 + d_1^2).$$

Itt most

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{9} < a^2 + b^2,$$

ez pedig ellentmondás. Az a feltevés, hogy a kitűzött egyenletnek van a, b, c, d pozitív egész számokból álló megoldása, ellentmondásra vezetett, a feladatnak tehát nincs pozitív egész számokból álló megoldása. ■

2. példa. Az $n_1, n_2, \dots, n_{15}$ adott pozitív egész számok, $1 < n_i < 2004$, ha $i = 1, 2, \dots, 15$. Az n_i számok páronként relatív prímek. Igaz-e, hogy van közöttük legalább egy prímszám?

Megoldás. Legyen p_i az n_i törzstényező felbontásában a legkisebb prímszám, $i = 1, 2, \dots, 15$, és legyen p a p_i számok maximuma. Az $n_1, n_2, \dots, n_{15}$ számok a feltevés miatt páronként relatív prímek, ezért nincs közöttük kettő, amelyeknek közös prímtenyezője lenne. A 15. prímszám 47. Ezért $p \geq 47$. A p valamelyik n_i -hez tartozik, ezért $n_i \geq p^2 \geq 47^2 = 2209$. Ez azonban az n_i -kre tett feltevés miatt lehetetlen, ezért az adott tizenöt szám között van legalább egy prímszám.

E megfontolás alapján hasonló példát tudunk készíteni (ez esetleg házi feladat is lehet): Az $n_1, n_2, \dots, n_{16}$ adott pozitív egész számok, $1 < n_i < 2500$, ha $i = 1, 2, \dots, 16$. Az n_i számok páronként relatív prím számok. Igaz-e, hogy van az n_i -k között legalább egy prímszám? ■

3. példa. Néhány olyan pozitív számot írtunk fel, amelyek páronkénti szorzatának összege 1. Igaz-e, hogy közülük alkalmasan kihagyva egy számot, a maradék számok összege kisebb $\sqrt{2}$ -nél?

Első megoldás. Természetesnek tűnik, hogy ha az adott számok $a_1, a_2, \dots, a_n$, akkor közülük a legnagyobbat hagyjuk ki és a megmaradó összeget becsüljük. Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy az adott számok közül a_1 a legnagyobb. Ekkor

$$\left(\sum_{i=2}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=2}^n a_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Mivel a feltevés szerint az a_i -k között a_1 legnagyobb, ezért $a_i^2 < 2a_1 a_i$, $i = 2, \dots, n$, és így az előbbi egyenlőségbe ezt behelyettesítve

$$\left(\sum_{i=2}^n a_i \right)^2 < 2 \sum_{i=2}^n a_1 a_i + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 2.$$

Így tehát

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n < \sqrt{2}.$$

Második megoldás. Legyen $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, és tegyük fel, hogy minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $s - a_i \geq \sqrt{2}$. Ekkor

$$2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = a_1(s - a_1) + a_2(s - a_2) + \dots + a_n(s - a_n) \geq s\sqrt{2},$$

azaz $\sqrt{2} \geq s$. Másrészt $s > s - a_1 \geq \sqrt{2}$, így az a feltevés, hogy $i = 1, 2, \dots, n$ esetén $s - a_i \geq \sqrt{2}$, ellentmondáshoz vezetett. ■

4. példa. *Kilenc gyerek úgy áll, hogy páronkénti távolságaik különbözőek. Mindegyik gyerek ráönt a hozzá legközelebbi gyerekekre egy pohár vizet.*

a) *Lesz-e a gyerekek között olyan, aki nem lesz vizes?*

b) *Xavértől (ő is itt van a gyerekek között) megkérdezzük, hogy hány pohár vizet öntöttek rá. Xavér azt mondja, hogy hatot. Vajon igazat mondott-e Xavér?*

Megoldás. a) A páronkénti távolságok különbözőek, véges sok távolság van, ezért van közöttük legkisebb. Tegyük fel, hogy A és B van egymáshoz legközelebb, így ők egymásra öntik a vizet. Ha van még valaki, aki A -ra, vagy B -re vizet önt, akkor, mivel mindenkinek egy pohár vize van, kell legyen a társaságban olyan, akire senki sem önt vizet. Ha A -ra és B -re senki más nem önt vizet, akkor A és B -t elhagyjuk a társaságból és az előbbi megfontolást alkalmazzuk a megmaradt hét gyerekekre. Vagy lesz olyan, akire nem önt senki vizet, vagy tovább lépünk öt, majd három gyerekekre. Három gyerek esetén világos, hogy van olyan, aki száraz marad, mert ha C és D van egymáshoz legközelebb, a harmadik E vagy C -re, vagy D -re önti a nála levő pohár vizet.

Azt nyertük, hogy minden esetben van a gyerekek között olyan, aki száraz marad.

b) Vizsgáljuk meg, hogy Xavérnak vajon igaza van-e? Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \dots, A_6$ Xavérra önti a pohár vizét. Xavér távolsága A_i -től legyen $A_i X$. Így tehát $A_1 X < A_1 A_2$ és $A_2 X < A_1 A_2$. Az $A_1 A_2 X$ háromszögben tehát $A_1 A_2$ a legnagyobb oldal, a vele szemben levő szög 60° -nál. A_1, A_2 választásánál csak az volt a lényeges, hogy ők az $A_1, A_2, \dots, A_6$ közül valók. Tekintve, hogy $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, ezért Xavér tévedett, rá legfeljebb öten öntöttek vizet. ■

Ekkor egy tanuló azt kérdezi: Hátha ezek a 60° -nál nagyobb szögek egymásba nyúlnak és akkor nincs ellentmondás.

Mit válaszolunk a tanulóknak?

Más kérdés: Mi történik, ha 9 helyett $2n + 1$ -et mondunk? Hogyan fogalmaznánk meg akkor a feladatot?

Az 1950. évi Kürschák Verseny első példája volt a következő:

5. példa. *Egy könyvtárban egy napon több olvasó fordul meg és mindegyikük csak egyszer jár aznap a könyvtárban. Bármely három olvasó között van két olyan, aki a könyvtárban találkozik egymással. Bizonyítandó, hogy akkor meg lehet adni két időpillanatot úgy, hogy bármely olvasó a két időpillanatnak legalább egyikében a könyvtárban van.*

Megoldás. Nagyon természetes arra gondolni, hogy ha ilyen két időpont egyáltalán létezik, akkor a látogatók távozási időpontjai közül az elsőt és az érkezési időpontok közül az utolsót véve, e két időpontnak jónak kell lenni. Mutassuk meg, hogy ez valóban így is van, azaz minden látogató e két időpont legalább egyikében a könyvtárban tartózkodik. Valóban, ha az utolsó érkező előbb jön, mint az első távozó, akkor e két időpont között minden látogató a könyvtárban van. Ha az első távozó előbb megy el, mint ahogy az utolsó érkezik, akkor ők biztosan nem találkoznak a könyvtárban. Ha most volna valaki, aki a két kijelölt időpont közül egyikben sincs a könyvtárban az csak úgy lehet, hogy ő az első távozó után érkezik és az utolsó érkező előtt távozik, tehát e három látogató között nincs kettő, aki találkozik a könyvtárban, ez pedig ellentmondás. ■

Egy tanuló megszólal: Nem okoz problémát, ha az első távozó éppen akkor megy el, amikor az utolsó érkező jön?

Mit válaszolunk a tanulónak?

Más kérdés: Hogyan lehetne általánosítani a feladatot?

6. példa. *Bergengóciában az utak mind egyirányúak. Bármely két város pontosan egy úttal van összekötve. Igaz-e, hogy van olyan város, amelyik bármelyik városból egy úttal vagy egyetlen másik városon átkelve elérhető?*

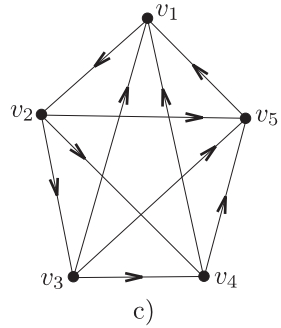
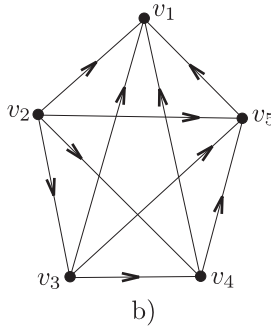
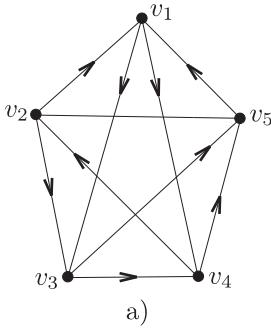
Megoldás. Ez igaz. Tekintsük minden városhoz az abba a városba bevezető utak számát. Véges sok szám, van közöttük legnagyobb, ez legyen M (ez az M többször is előfordulhat). Legyen V_M egy olyan város, amelyikbe M út vezet. H jelentse azokat a városokat, amelyekből út vezet V_M -be. A H -ba tehát M város tartozik. K álljon azokból a városokból, amelyek nem tartoznak H -ba és V_M -től is különböznek. Ha K üres, akkor készen vagyunk. Ha K nem üres, akkor legyen V egy város K -ban. Innen biztosan vezet út H valamelyik városába, és így V -ből egy várost útba ejtve eljutunk V_M -be. Ha nem vezetne V -ből út H egyik városába sem, akkor V -be vezet út H minden városából és V_M -ből, ez pedig azt jelenti, hogy V -be legalább $M + 1$ út vezet, ami nem lehet. Ellentmondáshoz jutottunk. ■

Megjegyzés.

Az a) ábrában minden városhoz $M = 2$ tartozik. Így bármely város rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy hozzá bármelyik másik városból direkt módon, vagy egy "átszállással" eljutunk.

A b) ábrában V_1 -be bármely városból közvetlenül (direkt módon) eljutunk, a V_2 városba azonban nem tudunk belépni.

A c) ábrában V_5 -ből V_3 -ba csak két "átszállással" lehet eljutni.



A következő problémát J. Sylvester tűzte ki 1893-ban, de csak 1933-ban oldotta meg Gallai Tibor.

7. példa. Adott a síkban n páronként különböző pont úgy, hogy bármely kettőn átfektetett egyenesen van még egy további az adott pontok közül. Igaz-e, hogy az összes adott pont egy egyenesen van?

Megoldás. Tegyük fel, hogy találunk n pontot a síkban úgy, hogy ezek rendelkeznek a feladatban megkövetelt tulajdonsággal, és nincsenek egy egyenesen. Véges sok olyan egyenes van, amelynek az adott pontok közül legalább kettőn áthalad. Tekintsük az ilyen egyeneseknek és a rajtuk nem levő adott pontoknak a távolságait. Véges sok ilyen szám van, van közöttük legkisebb és ez pozitív kell legyen. Legyen egy ilyen egyenes e , és a hozzá tartozó adott pont A . A -ból bocsássunk merőlegest e -re, ennek talppontja legyen M . (Az AM távolság tehát az előbbi értelemben a legkisebb.) Az e egyenesen van legalább három adott pont B, C, D . Ha B, C, D közül egyik sem M , akkor ezek közül az M valamelyik oldalán van legalább kettő, mondjuk B és C . Ha C közelebb van M -hez, mint B , akkor C közelebb van az A és B adott pontokon áthaladó egyeneshez, mint A az e -hez, ez ellentmondás. Ha M a B, C, D pontok közül valamelyikkel egybeesik, pl. $C = M$, akkor a $C = M$ pont közelebb van az A és B adott pontokon áthaladó egyeneshez, mint A az e -hez, ellentmondás. Azt nyertük tehát, hogy az adott pontok egy egyenesen kell legyenek. ■

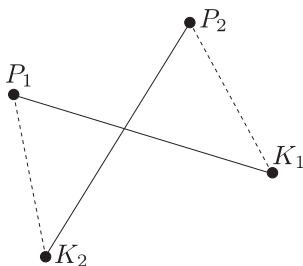
Ugyanez a feladat más megfogalmazásban: Ha adott a síkon n pont és a rajtuk átfektethető $\frac{n(n-1)}{2}$ egyenes nem esik mind egybe, akkor ezek között az egyenesek között van olyan, amelyik az adott pontok közül pontosan kettőt tartalmaz.

Mit válaszolnánk arra a kérdésre, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti feladatban a „pont” és „egyenes” szavakat felcseréljük: Adott a síkban n egyenes úgy, hogy bármely kettőnek van metszéspontja és bármelyik két egyenes metszéspontján

még egy további adott egyenes áthalad. Igaz-e, hogy az adott egyenesek mind egy közös ponton haladnak át?

8. példa. Adott a síkban $2n$ pont úgy, hogy nincs közöttük három, vagy több egy egyenesen ($n \in \mathbb{N}^+$). n pontot pirosra, n pontot kékre festünk. A $2n$ pontot n párba rakjuk úgy, hogy minden pont beletartozzék valamely párba (így tehát pontosan egybe) és minden párban legyen egy piros és egy kék pont. Az egy párba tartozó pontokat kössük össze egyenes szakasszal. Lehetséges-e olyan párba rendezés, hogy az előbbi módon berajzolt szakaszok ne messék egymást?

Első megoldás. Lehetséges ilyen párba rendezés. Véges sok lehetséges párba rendezés van. Minden párba rendezéshez vegyük a hozzá tartozó szakaszok hosszának összegét. Ez véges sok pozitív szám. Van közöttük legkisebb. Az ehhez tartozó párba rendezéshez nem tartozhatnak metsző szakaszok. Valóban, tegyük fel, hogy van legalább egy metsző szakasz pár. Ragadjunk ki egy ilyen párt: P_1K_1, P_2K_2 .

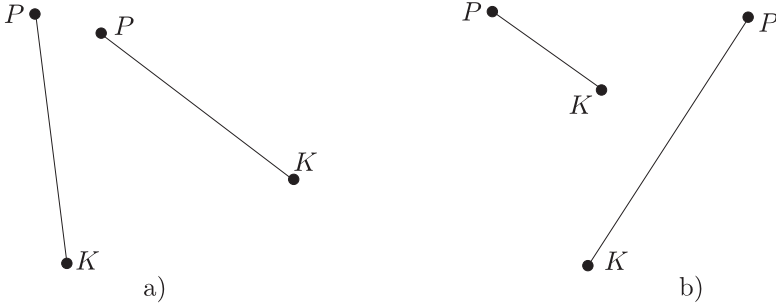


Változtassuk meg a párba rendezést úgy, hogy minden mást változatlanul tartunk, de P_1 -hez K_2 -t, P_2 -höz pedig K_1 -et rendeljük. Ehhez az új párba rendezéshez tartozó szakaszok összege, az előbbi rendezéshez tartozó szakaszok összegétől annyiban tér el, hogy $P_1K_1 + P_2K_2$ helyett $P_1K_2 + P_2K_1$ szerepel. A háromszögegyenlőtlenség miatt $P_1K_2 + P_2K_1 < P_1K_1 + P_2K_2$, így az új hozzárendeléshez tartozó szakaszok hosszának összege csökkent, pedig a feltevés szerint az előbbi minimális volt. Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy van olyan párba rendezés, amihez tartozó szakaszok nem metszik egymást.

Második megoldás. Ha a problémát tanulóknak mondjuk el, akkor könnyen lehet, hogy egy tanuló azt javasolja, próbálkozzunk teljes indukcióval. Ez egy nagyon jó javaslat. Hogyan lehet a feladatot teljes indukcióval megoldani?

$n = 1$ esetén nincs probléma, de az az eset nem is tanulságos.

$n = 2$ esetén (ennek vizsgálata nem szükséges) a négy pont lehet egy konvex négyszög négy csúcsa, ekkor piros pontnak van kék szomszédja és így kötünk össze, vagy konkáv a négyszög, de ebben az esetben is van jó párba rendezés:



Tegyük fel, hogy $2n$ esetén ($n > 2$) van alkalmas párba rendezés és mutassuk meg, hogy akkor $2(n+1) = 2n+2$ adott pont esetén is létezik ilyen rendezés. (Kissé vázlatosan írjuk le a megoldást.) Tekintsük a $2n+2$ pont konvex burkát. Ha a konvex burok csúcsai különböző színűek, akkor van piros és kék szomszédos csúcs. E két csúcs által meghatározott egyenessel párhuzamos, ehhez az egyeneshez elég közeli egyenes, az adott pontokat két részre bontja úgy, hogy az egyik részbe egy piros és egy kék, a másik részbe n piros és n kék pont tartozik. Így az indukciós feltevést alkalmazva készen vagyunk.

Mi van azonban akkor, ha a konvex burok csúcsai azonos színűek, például mind piros?

Most arra gondolunk, hogy az előbb nem az volt a döntő, hogy egy piros és egy kék pontot vágjunk le, hanem az, hogy ugyanannyi (legalább egy) piros pontot vágjunk le, mint kéket. Helyezzük el a pontokat egy koordináta-rendszerben, ahol a koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy az y tengellyel párhuzamos bármely adott egyenes legfeljebb egy adott ponton menjen át (ez nyilván lehetséges, mert az adott pontok közül kettőt kiválasztani csak véges sok módon lehetséges, az y állását viszont végtelen sok különböző módon választhatjuk meg). Értelmezzük az $f: R \rightarrow R$ függvényt a következő módon: tetszőleges x_0 esetén $f(x_0)$ jelentse az $x = x_0$ egyenestől balra levő piros és kék pontok számának különbségét. Világos, hogy ahogy jobbra haladunk, f egy darabig 0, aztán $+1$ lesz. Azt, hogy ezután 2 lesz, vagy 0, nem tudjuk. Az viszont biztos, hogy elegendően nagy x -ekre f megint 0 és előtte -1 . Az f mindig 1-gyel nő, vagy csökken, lesz $+1$ és -1 , közte tehát valahol 0 is kell legyen. Ilyen x_0 -ra az $x = x_0$ egyenestől balra, illetve jobbra (nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy az $x = x_0$ egyenesen nincs adott pont) ugyanannyi piros és kék pont van, így az indukciós feltevést alkalmazhatjuk (azt tehát, hogy $2k$ esetén van alkalmas párba rendezés, ha $1 \leq k \leq n$). ■

A teljes indukció módszere is alkalmazható a példa megoldására. El kell azonban mondanom, hogy e példát órán többször elmeséltem és a hallgatóknak mindig

az első megoldás tetszett jobban, bár én a második megoldás kiindulását nagyon természetesnek tartom.

9. példa. *A bergengóciai Parlament 300 tagú. Minden képviselőnek legfeljebb 101 ellensége van a többi parlamenti tag között. Igaz-e, hogy a Parlament két részre, egy jobb és bal oldalra bontható úgy, hogy bármelyik képviselőnek a saját oldalán levő csoportban legfeljebb 50 ellensége legyen?*

Megoldás. A képviselőket véges sok különböző módon tudjuk két oldalra osztani. Tekintsünk egy felosztást és minden képviselőt kérdezzünk meg, hogy a saját oldalán hány ellensége van. Ezeket a mondott számokat adjuk össze és rendeljük hozzá a felbontáshoz. Minden felbontáshoz rendeltünk egy nemnegatív egész számot, ezek között van legkisebb. Tekintsünk egy ilyen felbontást, amihez tehát legkisebb szám tartozik. Ebben az esetben mindenkinek a saját csoportjában legfeljebb 50 ellensége lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy van legalább egy képviselő, akinek a csoportjában legalább 51 ellensége van. Egy ilyen képviselőt véve, tegyük át őt a másik csoportba, ahol legfeljebb 50 ellensége van. Ezáltal az új felbontáshoz kisebb összeg tartozik, ami nem lehet. (Vigyázat, nemcsak az átrakott képviselő ellenségeinek a száma változik.) ■

Ennek a példának a megoldása nagyon hasonlít az előző példa első megoldásához.

10. példa. *Adott n páronként különböző pont a síkban. Tekintsük az adott pontokból választott pontpárok által alkotott szakaszok felező pontjait. Ilyen felező pontok egybe is eshetnek. Legalább hány olyan felező pont lesz, amelyek között bármely kettő különböző?*

Megoldás. Legyen P és Q az adott pontok közül két olyan, amelyek távolsága maximális (ilyen biztosan van). Ha most R ezektől különböző adott pont, akkor PR felező pontja benne van a P körüli $\frac{PQ}{2}$ sugarú, QR felező pontja pedig benne van a Q körüli $\frac{PQ}{2}$ sugarú körben. Ezeknek a köröknek egyetlen közös pontjuk van, a PQ felező pontja. Így tehát legalább $2(n-2) + 1 = 2n - 3$ páronként különböző felező pontunk lesz. ■

11. példa. *Egy 30 tagú osztály tanulói között egyesek barátságban vannak. A barátság kölcsönös. (Van legalább egy baráti pár.) Tudjuk, hogy ha két tanulónak ugyanannyi barátja van, akkor nincs közös barátjuk. Igaz-e, hogy van olyan tanuló, akinek pontosan két barátja van?*

Megoldás. Minden tanulót megkérdezzünk, hogy pontosan hány barátja van az osztályban. A mondott számok közül a legnagyobb, amit Xavér mond, legyen x_0 .

Xavér barátai mind különböző számot kell mondjanak, hisz Xavér mindegyiküknek barátja. A barátok által mondott szám tehát legalább 1 és legfeljebb n_0 lehet, ami azt jelenti, hogy minden szám pontosan egyszer lép fel. Ha tehát $n_0 \geq 2$, akkor van olyan tanuló, akinek pontosan két barátja van az osztályban. Lehet azonban, hogy $n_0 = 1$. Ez azt jelenti, hogy van az osztályban néhány pár (esetleg csak egy), akik egymás barátai. Ebben az esetben nincs olyan tanuló, akinek pontosan két barátja lenne az osztályban. ■

12. példa. *Adott az egyenesen ötven zárt szakasz. Igaz-e, hogy vagy van közöttük nyolc olyan, amelyeknek van közös pontja, vagy van nyolc olyan, amelyek páronként idegenek?*

Megoldás. Az adottak közül az $[a_1, b_1]$ szakasz legyen olyan, amelyiknek a jobb végpontja b_1 az adott szakaszok jobb végpontjai közül a legkisebb. Ha van még hét adott szakasz, amelyik a b_1 -et tartalmazza, akkor van az adottak között nyolc szakasz, amelyiknek közös pontja van. Tegyük fel, hogy b_1 legfeljebb hét szakasz közös pontja. Ekkor van legalább 43 adott szakasz, amelyiknek a bal végpontja b_1 -nél nagyobb. Ezen szakaszok közül legyen $[a_2, b_2]$ olyan, amelyiknek a jobb végpontja e szakaszok jobb végpontjai közül a legkisebb. Ha b_2 legalább nyolc adott szakaszhoz hozzá tartozik, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor van legalább 36 szakasz, amelyiknek a bal végpontja b_2 -nél nagyobb. Így folytatva kapjuk a páronként idegen $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_7, b_7]$ szakaszokat és b_7 -től jobbra legalább $50 - 7 \cdot 7 = 1$ szakasz van, amelyiknek a bal végpontja b_7 -nél nagyobb. Ez azt jelenti, hogy ekkor (ha közben nem akad el az eljárás, ami azt jelenti, hogy van nyolc adott szakasz közös ponttal) van legalább nyolc adott szakasz, amelyek páronként idegenek. ■

Egy lehetséges házi feladat: Adott az egyenesen 10 zárt szakasz. Igaz-e, hogy van közöttük négy olyan, amelyeknek közös pontja van, vagy van négy olyan, amelyek páronként idegenek?

13. példa. *Adott a síkon 2004 vektor. Két játékos A és B felváltva választ egy-egy vektort és azt ki is veszi. A választ először. Addig veszik el a vektorokat, míg nem marad (tehát mindegyiknek 1002 vektora lesz). Az veszít, akinek a vektorainak az összege kisebb hosszúságú. Ha egyenlő hosszú a két vektor, akkor döntetlen az eredmény. Van-e az A játékosnak olyan stratégiája, amelyik biztosítja a számára, hogy ne veszítsen?*

Megoldás. A probléma az, hogy a vektorok hossza a két összetevőtől függ. Ki tudjuk azonban kerülni az egyiket a következő módon. Legyen az adott vektorok összege $\underline{a}$. Helyezzük a vektorokat olyan koordináta-rendszerbe, ahol az x tengely

iránya megegyezik $\underline{a}$ irányával. Ha $\underline{a} = \underline{0}$, akkor tetszés szerint választhatunk koordinátarendszert. A koordinátarendszernek ez a választása biztosítja azt, hogy függetlenül a vektorok választásától A és B végül nyert vektorainak az y tengely irányú összetevője abszolút értékben egyenlő, így négyzeteik egyenlőek. Tehát az első, x irányú összetevő dönt. A mindig a legnagyobb abszcisszájú vektort választja (ha több van, az egyiket) és így tovább. A vektorának abszcisszája tehát nem lesz kisebb, mint B vektorának abszcisszája. A a döntetlent így mindig el tudja érni. (A koordinátarendszer választása miatt az $\underline{a}$ abszcisszája nemnegatív szám.) ■

*Pintér Lajos, SZTE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi Vértanúk tere 1.
pinter@math.u-szeged.hu*