POLYGON
XII.köt. 1-2.szám,2003. jún.

Kalapok, n dimenziós kockák egybevágóságai és kódolások avagy Problémák, algoritmusok és bizonyítások

Makay Géza

Ha valaki ma a számítógépre gondol, akkor általában a következő dolgok jutnak eszébe körülbelül ebben a sorrendben:

1. A Windows valamelyik változata, hiszen a Microsoft sikeres marketingstratégiájának köszönhetően ez az egyik legelterjedtebb operációs rendszer.
2. Az Internet és azon belül is a World Wide Web (világháló), E-mail (elektronikus levelezés) és a Chat (csevegés).
3. A különféle felhasználói alkalmazások: szövegszerkesztés, táblázatkezelés, adatbáziskezelés, stb.
4. A különféle számítógépes játékok, oktató programok és multimédiás alkalmazások.

Pedig a számítógép, mint a neve is mutatja, számításokat képes elvégezni, mégpedig nagyon gyorsan. Természetesen a fenti programok és alkalmazások igénylik a számítógépek gyors számolási képességét, az átlagfelhasználó számára mégis általában meglepetést okoz, ha kiderül, hogy a számítógéppel bonyolult matematikai problémákat lehet megoldani vagy legalábbis sejtéseket lehet szerezni a problémák megoldásához.

A számítógépek programozása egy újfajta gondolkodásmódot kíván meg az embertől: a problémák algoritmikus megoldási módszerét. Egy probléma megoldására szolgáló algoritmust úgy lehetne legkönnyebben meghatározni, mint egy olyan eljárás vagy „recept”, amelyet ha az ember az adott probléma esetén végrehajt, akkor a végén megkapja a probléma megoldását. Ilyen recept például a másodfokú egyenlet megoldóképlete, a lineáris egyenletek megoldására szolgáló Gauss-elimináció, de ugyanilyen receptek az általános iskola alsóbb osztályaiban az összeadás, kivonás, szorzás és osztás papíron való elvégzésére szolgáló módszerek. Ezek közül az egyszerűbbeket (például az utóbbiakat) a számítógép „magától” is tudja, vagyis úgy van felépítve, hogy anélkül tudja elvégezni ezeket, hogy külön le kellene egy programban írni ezeket az algoritmusokat. A bonyolultabbakat viszont „el kell magyarázni” a számítógépnek, vagyis a számítógépet programozni kell: lépésről lépésre leírni, hogyan kell a problémát megoldani.

A számítógépek csak és kizárólag számokkal tudnak dolgozni. Egy probléma viszont tartalmazhat szövegeket (pl. szövegszerkesztés), ábrákat (pl. az ikonok a

Windows-ban) és akár olyan elvontabb, nehezen megfogható fogalmakat, mint például egy stílus a szövegszerkesztőben. Azért képes a számítógép ezeket mégis kezelni, mert a program ezekhez számokat vagy számkombinációkat rendel, és úgy kezeli ezeket, mint ahogy azt a fogalmat egy ember kezelné. A programozásban ez az a lépés, amit nagyon nehéz megtanítani: hogyan kell az adott probléma lényegét számokkal megfogalmazni. Például az $ax + b = 0$ egyenletet a számítógép nem értheti, hiszen ott van benne az x ismeretlen, márpedig a gép csak ismert mennyiségekkel dolgozhat. De ha ennek az egyenletnek megfeleltetjük az (a, b) számpárt, akkor ezt a gép érti, hiszen ismeretlen mennyiség nincs benne. Ha ezek után arra utasítjuk a gépet, hogy $a = b = 0$ esetén írja ki, hogy x-re végtelen sok megoldás van, $a = 0$ és $b \neq 0$ esetén írja ki, hogy nincs megoldás x-re és $a \neq 0$ esetén számolja ki a b/a mennyiséget, és írja ki, hogy ez a megoldás, akkor megkaptuk az egy ismeretlenes lineáris egyenlet megoldásának algoritmusát.

A számítógépeknek egy nagy hátránya van: nem érti, hogy mit csinál, csak megcsinálja, ha arra utasítják. Csak annyira intelligens egy számítógép, amennyire egy kalapács, legfeljebb bonyolultabb dolgokat is el tud végezni. A számítógépek „intelligenciáját" mindig az ember programja szolgáltatja. Ennek egy hátulütője van: ha a program hibás, vagyis az adott problémát nem vagy nem minden lehetséges esetben oldja meg jól, akkor a számítógép képes teljesen nyilvánvalóan hibás adatok tömegét szolgáltatni. Innen származik a mondás is: „Tévedni emberi dolog, de igazán összekutyulni valamit csak számítógéppel lehet". Ebből következik, hogy a számítógép egy jól megírt program alapján csodálatosnak tűnő dolgokat művelhet, míg egy hibás program esetén a program „kifagyhat", a számítógép „lefagyhat" vagy egyszerűen hülyeséget csinál. Ha az előző példa szerinti lineáris egyenlet megoldásánál nem gondolunk arra az esetre, amikor $a = 0$, és mindig a b/a-t íratnánk ki, mint megoldást, akkor ha a valóban 0, akkor 0-val osztunk, és ez programhibához vezet.

A számítógépek a sok hátrányuk mellett egy nagyon nagy előnnyel rendelkeznek: nagyon gyorsan számolnak. A mai átlagos gépek többszáz millió elemi műveletet képesek elvégezni egyetlen másodperc alatt. Így olyan feladatok megoldására is alkalmasak, amelyben az ember a sok lehetséges esetet nem tudja „kézzel" végigvizsgálni. Ez a tulajdonságuk arra is alkalmassá teszi a számítógépeket, hogy az olyan problémák esetén, ahol végtelen sok megoldás van, vagy végtelen sok esetet kellene végignézni, nagyon sok megoldást adjon meg vagy esetet vizsgáljon végig, amelyből az ember az intelligenciája és kombinációs készsége segítségével általánosíthat, sejtést szerezhet, amelyet azután akár „kézzel", akár számítógépes programmal ellenőrizhet.

Ebben a cikkben egy olyan problémát mutatunk be, amelynek van egy olyan megoldása (ld. [1]), amelyik nem szolgáltat hasonló problémák megoldásában használható módszereket, hiszen „csak" egy algoritmust ad meg, de nem mondja el, hogyan jutott el eddig az algoritmusig. Mi itt megpróbáljuk a problémát elemi úton megvizsgálni, rávezetni az olvasót ezen probléma megoldásának útjára és bemutatni

a számítógép igen fontos szerepét a probléma ilyen módon történő megoldásában.

Probléma. *n ember a következő játékot játssza. Mindegyikük szemét bekötik és a fejükre egy fekete vagy egy fehér kalapot raknak. A kötést leveszik a szemükről, így mindegyikőjük látja a többiek kalapszínét, de nem látja a sajátját. A játékosok egymással nem kommunikálhatnak semmilyen formában. Adott jelre mindannyian vagy passzolnak, vagy megtippelik a fejükön levő kalap színét. Akkor nyernek, ha legalább egy ember tippel és mindenki, aki tippel, jót mond. Ha egyikük sem tippel, vagy valaki rosszat mond, akkor mindannyian vesztettek. Milyen stratégiát kövessenek ahhoz, hogy ha a játékot sokszor játsszák, minél több esetben nyerjenek?*

A megoldás vázlata. A probléma megoldását több részre bontjuk. Először kicsit körbejárjuk a problémát, megpróbáljuk megérteni mi is a feladat lényege, mi lehet a legjobb eset bármilyen stratégia esetén. Ezután speciális esetekben ($n = 3, 4$) megoldjuk a problémát. Ezen példa alapján találhatunk egy olyan stratégia-típust, amelyikről be tudjuk bizonyítani, hogy bármelyik másik stratégiával ekvivalens. Ilyen stratégia-típust számítógéppel is kereshetünk, így $n = 5$-re is meg tudjuk oldani a feladatot, és kiderül, hogy a legjobb eset itt például nem érhető el. Speciális n (kettőhatvány mínusz 1) esetén a stratégia-típusunk olyan, hogy az algoritmust felgyorsíthatjuk, és $n = 7$-re is kaphatunk megoldást számítógéppel. Ez alapján adhatunk teljes indukciós konstrukcióval megoldást minden kettőhatvány mínusz 1 alakú n-re, és becslést nem ilyen alakú n-ekre.

Kezdjük tehát az elején. Ahogy szokták mondani: „Minden problémának van egy egyszerű, röviden leírható, elegáns, rossz megoldása”, de az ilyen megoldások gondolatébresztőek tudnak lenni. Nézzük először most ezt a megoldást.

Mivel a játékosok nem kommunikálhatnak egymással, a stratégián és a többiek kalapszínén kívül senkinek semmilyen egyéb információja nem lehet, ezért bárki is tippel (mert valakinek tippelnie kell, ha nyerni akarnak) csak az esetek felében találja el a saját kalapjának színét. Ha többen tippelnek egyszerre, akkor ráadásul a nyerési esélyeik romlanak. Így tehát logikusnak látszik azt a stratégiát követni, hogy kijelölnek egy embert, az megtippeli a kalapjának színét, és az esetek felében nyernek.

Bizonyos szempontból a fenti okoskodás helyes. Senki nem kételkedhet annak az állításnak a helyességében, hogyha valaki tippel, akkor csak az esetek felében találja el a saját kalapszínét. Így tényleg igaz az, hogy minél többen tippelnek egyszerre annál rosszabb a helyzet. Csak az előző bekezdés legutolsó mondata nem alapul szigorú matematikai következtetésen, és ott van az okoskodásban hiba.

Gondoljuk végig a problémát ilyen szempontból. A fenti egyszerű okoskodásból nyilvánvaló, hogyha valaki tippel, akkor a többiek kalapszínét ismerve is még két kalapszín-konfiguráció lehetséges. Az egyikben a játékos helyesen tippel, a másikban nem. Játsszuk le a játékosok stratégiájával az összes lehetséges kalap-konfigurációt. Jelöljük m-el az eközben elhangzó jó tippeket. Mivel mindenki, aki jól tippel egy adott kalap-konfiguráció esetén, egy másik kalap-konfiguráció esetén

(t.i., amikor az Ő fején más színű kalap van, de a többiekén ugyanaz) rosszul tippel, ezért pontosan m db rossz tippnek is el kell hangzania. Összesen tehát $2m$ tipp hangzik el, amelyeknek pontosan a fele jó. Tekintsük a nyerési szempontból ideális esetet: a megnyert kalapszín-kiosztásokat a játékosok egyetlen jó tippel nyerik meg, a többiek passzolnak, míg az elvesztett kalap-konfigurációknál lehetőleg minél többen tippelnek rosszul, hiszen már egy rossz tipp is vesztést okoz. A legideálisabb esetben tehát a jó tippek mindegyike más és más kalap-konfiguráció esetén hangzik el, míg a rossz tippeket mindenki (n ember) egyszerre mondja ki. Így tehát az összes lehetséges kalapszín-kiosztások száma (2^n) a jól megtippeltek (m) és a rosszul megtippeltek (m/n) számánál nagyobb vagy egyenlő, hiszen még ott lehetnek azok az esetek is, amikor nem tippel senki, vagy amikor n nem osztója m-nek. Így kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$m + \frac{m}{n} \leq 2^n$$

amelyből kapjuk, hogy

$$m \leq 2^n \frac{n}{n+1}$$

Van tehát egy felső becslésünk a jól megtippelt kalap-konfigurációk számára. Vegyük észre, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy maximum az esetek $n/(n+1)$-ed részében lehet jól tippelni, ami már $n = 3$ esetén is 50%-nál nagyobb esélyt jelent.

Könnyű belátni, hogy pontos egyenlőség akkor lehet, amikor $2^n n/(n+1)$ egész, vagyis, amikor $n+1$ osztja 2^n-et. Ezek szerint $n+1$-nek kettő hatványának, tehát n-nek kettőhatvány mínusz 1 alakúnak kell lennie.

El lehet-e érni a valóságban ezt az arányt? Olyan stratégiát kell tehát mutatnunk, amikor a tippek pontosan az ideális eloszlásban hangzanak el. Az egyszerűség kedvéért tekintsük az $n = 3$ esetet, ekkor a nyolc lehetséges kalap-konfigurációból a becslésünk szerint maximum hatot tippelhetnek meg jól a játékosok. Az ember elgondolkodik azon, hogy vajon melyik az a hat konfiguráció, amelyikben jól tippelnek. Ha felírjuk a lehetséges kiosztásokat, akkor gyorsan feltűnik, hogy két olyan konfiguráció van, amelyben csupa azonos színű kalap van, és hat olyan, amelyben kettő egyszínű és a harmadik a másik színű. Próbáljunk meg erre a hatra koncentrálni. Ezekben az esetekben az azonos színű kalapot viselő játékosok teljesen azonos helyzetben vannak: mindketten két különböző színű kalapot látnak. Az embernek az az érzése, hogyha ezekben a kiosztásokban jól tippel valaki, akkor annak a harmadiknak kell lennie, hiszen Ő mást lát, mint a másik kettő. A harmadik két azonos színű kalapot lát, és ha Ő ezekben a kalap-konfigurációkban jól tippel, akkor a másik színt kell mondania. Így a játékosok stratégiája nyilvánvalóvá válik: ha bármelyik játékos két azonos színű kalapot lát, akkor a másik színt mondja, különben passzol. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezt a stratégiát követve a három fehér illetve a három fekete kalap esetében mindenki rosszul tippel, minden más

esetben pontosan egy ember fog jól tippelni. Így pontosan hat esetben nyernek a játékosok, ami a becslésünk szerint az ideális.

Ezideig megoldottuk a problémát $n = 3$ esetben. Mi van a nagyobb n-ekre? Az $n = 4$ még könnyen elintézhető: ekkor a becslésünk szerint legfeljebb $2^4 4/5 = 12.8$ jó tipp lehetséges. A 12 jó kalapkonfiguráció pedig valóban könnyen elérhető például a következő stratégiával: az egyik játékos mindig passzol, a másik három pedig az $n = 3$ esetben leírt stratégiát követi.

Nagyobb n-ekre a feladat jóval bonyolultabb. Nevezzük rossz kiosztásnak azokat a kalap-konfigurációkat, amelyek esetén a játékosok a megbeszélt stratégiájuk szerint veszítenek, és jónak azokat, amelyek esetén nyernek. Próbáljuk meg valahogy jellemezni a rossz kalapkiosztásokat, illetve a játékosok stratégiáját a rossz kiosztásokkal megfogalmazva először az $n = 3$ esetben. A rossz kiosztások ebben az esetben a csupa fehér illetve a csupa fekete kalap. Amikor a kötést leveszik egy játékos szeméről, akkor a játékos látja a többiek kalapszínét. Ez alapján megállapíthatja, hogy legfeljebb kétféle kiosztás lehetséges: amikor rajta fehér, illetve amikor fekete kalap van. A játékosok stratégiáját úgy is meg lehet fogalmazni, hogy igyekeznek „elkerülni" a rossz kiosztásokat, vagyis úgy tippelni, hogy a tippjével ne egy rossz kiosztásra tippeljen. Így három eset lehetséges:

1. Ha például a játékos két fehér kalapot lát, akkor a két lehetséges kiosztás a csupa fehér (rossz) és a rajta fekete a többieken fehér kiosztás (jó). Mivel el akarja kerülni a rossz kiosztást, ezért a második kiosztás mellett dönt, és feketét mond. Hasonló módon elintézhető, ha a játékos két fekete kalapot lát: akkor ugyanezen okoskodás szerint a nem csupa fekete kalap esetét választja, tehát fehéret mond. A szabály tehát ebben az esetben a következő: ha a játékos a többiek kalapszíne alapján tudja, hogy vagy egy rossz, vagy egy jó kalapkiosztás van, akkor a jó kalapkiosztás szerint tippel.
2. Ha egy játékos egy fekete és egy fehér kalapot lát, akkor a két lehetséges kiosztás egyike sem a rosszak közül való, a játékosnak nincs mit elkerülnie, így passzol. Ekkor a szabály az, hogy ha a játékos a többiek kalapszíne alapján tudja, hogy két jó kalapkiosztás lehetséges, akkor passzol.
3. A teljesség kedvéért még egy eset van (ami itt nem fordul elő): amikor a játékos olyan színeket lát, hogy mindkét lehetséges kiosztás rossz. Ekkor a játékos persze nem kerülheti el a rossz kiosztásokat, tehát ismét passzol.

Mikor adja a legjobb eredményt egy ilyen rossz kiosztásokat elkerülő stratégia? Természetesen akkor, ha minél kevesebb rossz kiosztás van és ha minden kiosztás esetén legalább egy ember tippel. Először az utóbbival foglalkozzunk egy kicsit. Két kiosztás távolságának nevezzük azon játékosok számát, akiken a két kiosztásban különböző színű kalap van. Amikor egy játékos szeméről leveszik a kötést, akkor neki két, egymástól 1 távolságra levő kiosztás közül kell választania, hiszen csak az Ő kalapszínében lehet különbség a lehetséges két kiosztásban. Ahhoz, hogy legalább egy ember tippeljen, az kell, hogy a tényleges kalapkiosztás, és attól egy 1 távolságra levő másik kalapkiosztás közül az egyik rossz, a másik jó legyen. És

ennek minden lehetséges kalapkiosztásra teljesülnie kell. Átfogalmazva ezt a feltételt azt mondhatnánk, hogy a rossz kalapkiosztásoknak és a tőlük 1 távolságra levő kalapkiosztásoknak le kell fedniük az összes lehetséges kalapkiosztást, és nem lehet, hogy egy rossz kiosztástól 1 távolságra csak rossz kiosztások legyenek. Ez utóbbi esetet persze a minél kevesebb rossz kiosztás feltétele amúgy is kizárja: ilyenkor a középen levő rossz kiosztás mindig elhagyható.

Az előző paragrafusban leírt stratégia alkalmazható bármilyen n-re. A legideálisabb esetben a rossz kiosztások és a tőlük 1 távolságra levő kiosztások egymást át nem fedve fedik le az összes kiosztások halmazát. Az a kérdés, hogy valóban ideális-e ez a stratégia? Ha rossz kalapkiosztás van a játékosok fején, akkor az ideális esetben az attól egy távolságra levő kiosztások mind jók, így mindenki a rossz kiosztással szomszédos egyik jó szerint tippel, tehát mindenki rosszul tippel. Ha nem az egyik rossz kiosztást kapják, akkor (mivel a rossz kiosztások és szomszédaik egymást át nem fedve fedik le az összes kiosztást) pontosan egy olyan rossz kiosztás lesz, amelyik ettől 1 távolságra van. Az a játékos fog tehát tippelni (és jól tippel), akinél a tényleges és az attól 1 távolságra levő rossz kiosztásban a kalapszínben különbség van. Így a játékosok pontosan úgy tippelnek, ahogy azt fent ideális tippelés esetére leírtuk: ha rosszul tippelnek, akkor egyszerre tippelnek rosszul, ha jól tippel valaki, akkor egyedül tippel jól.

Még egy magyarázat arra, hogy ez a stratégia valóban ideális. Ha a rossz kiosztásoknak vesszük egy 1 sugarú környezetét, abban összesen $n+1$ kiosztás lesz: 1 a rossz kiosztás, és n darab tőle 1 távolságra levő másik (jó) kiosztás. Ha ezek a környezetek egymást át nem fedve fedik le az összes (2^n darab) kiosztást, akkor $n+1$-nek osztania kell 2^n-et, tehát n (mint fent is megállapítottuk) kettőhatvány mínusz 1 alakú kell legyen. Az is világos, hogy ekkor a rossz kiosztások száma $2^n/(n+1)$ vagyis a jó kiosztásoké $2^n n/(n+1)$, ami éppen a becslésünk szerinti ideális darabszám.

Ez a stratégia egy másik szempontból is a lehető legjobb: a játékosok bármilyen lehetséges stratégiája esetén mondható egy olyan rossz kiosztásokat elkerülő stratégia, hogy azt követve pontosan ugyanazon kiosztások esetén nyernek a játékosok, mint az eredeti stratégiájuk szerint. És ez már tetszőleges, nem feltétlenül kettőhatvány mínusz 1 alakú n-ekre is igaz. Először is könnyen látható, hogy az így megállapított rossz kiosztások 1 sugarú környezete lefedi az összes kiosztást: ha nem így lenne, akkor lenne egy jó kiosztás, amelynek minden szomszédja is jó, ez pedig nem lehet, mert bárki tippel is a jó kiosztásnál, az egyik szomszéd esetén (amikor az Ő fején más színű kalap van) rosszul fog tippelni, tehát annak rossz kiosztásnak kellene lennie. A két stratégia pedig tényleg ugyanazt az eredményt adja. A játékosok a rossz kiosztásokat elkerülő stratégiájukat követve:

1. Rossz kiosztás esetén vagy passzolnak, ha minden szomszéd is rossz, vagy legalább egy játékos, aki egy jó kiosztás-szomszédnak felel meg, rosszul fog tippelni, tehát a játékosok valóban vesztenek.
2. Jó kiosztásnál az összes rossz szomszédnak megfelelő játékos tippelni fog, és

mivel elkerülik a rossz kiosztást, jól fognak tippelni, tehát nyernek.
Így tehát a két stratégiában a játékosok pontosan ugyanazon kiosztások esetén nyernek illetve vesztenek. Vegyük észre, hogy a játékosok nem feltétlenül ugyanazt csinálják a két stratégiában. Például tegyük fel, hogy a stratégia azt mondja $n = 6$ esetben, hogy ha valaki legalább két fehéret lát, akkor fehérre tippeljen. Ekkor az összes olyan kiosztás, amelyben három, négy vagy öt fehér kalap van, az rossz lesz, hiszen ilyen esetekben mindenki fehérre tippel. A rossz kiosztásokat elkerülő stratégia így például a négy fehér és két fekete kalap esetén azt adja, hogy mindenki passzoljon, hiszen ennek a kiosztásnak minden szomszédja is rossz kiosztás. Az eredeti stratégia szerint viszont mindenki fehéret mond, amivel szintén veszítenek. Az eredmény szempontjából ez lényegtelen, így is úgy is vesztenek, de a stratégia mégsem pontosan ugyanaz, csak a végeredmény.

Eddig egész szép elméletet építettünk fel arról, hogy milyennek kell lennie egy ideális stratégiának. Mostmár tényleg az egyetlen kérdés, hogy el lehet-e érni ezt az ideális esetet, tehát amikor $[2^n n/(n+1)]$ darab jó megoldás van, a többi $(k = 2^n - [2^n n/(n+1)])$ rossz. Erre már írhatunk egy számítógépes programot, amelyik végigpróbálgatja a lehetséges rosszkiosztás-kombinációkat. A programban én a következő jelöléseket és eljárásokat használtam:

1. A fekete színű kalapot jelentse az 1-es szám, a fehéret pedig a 0. Egy kalapkiosztást így egy kettes számrendszerben n jegyű szám teljesen leír.
2. A program bemenő paraméterei az n (az emberek száma), illetve a k, amely azt mondja meg, hogy a rosszkiosztás-kombinációkban hány rossz kiosztást keresünk.
3. A program egy rekurzív függvénnyel kiválasztja az összes lehetséges k db rossz kiosztást (0 és $2^n - 1$ közé eső számot) tartalmazó rosszkiosztás-kombinációt (számhalmazt), és ellenőrzi, hogy ezek 1 sugarú környezete (azok a számok, amelyek legfeljebb 1 db kettes számrendszerbeli számjegyben térnek el ettől) lefedi-e az összes kiosztást (az összes számot 0-tól $2^n - 1$-ig). A gyorsabb végrehajtás érdekében azt tárolom, hogy egy-egy kiosztást (számot) a rosszak hányszor fednek le, így ha egy rossz kiosztást kicserélek, akkor az új kombináció által lefedett kiosztásokat gyorsan meg tudom határozni.

Becsüljük meg a program által megvizsgálandó esetek számát: 2^n kiosztásból kell k darabot kiválasztani és ellenőrizni, hogy ezeknek a kiosztásoknak az egy sugarú környezete valóban lefedi-e az összes kiosztást. Összesen tehát $\binom{2^n}{k}$ esetet kell végigvizsgálni. Ez $n = 5$ esetén $\binom{32}{6} = 906192$ eset (ha van egyáltalán ideális rosszkiosztás-kombináció), míg $n = 6$ esetén már több, mint 151 milliárd eset. Néhány ötlettel ugyan csökkenthetjük a megvizsgálandó esetek számát, de az még így is elég tekintélyes marad, hogy már az $n = 6$ esetet se lehessen rövid időn belül végigszámoltatni a géppel. De $n = 5$-re kaphatunk eredményt: hét rossz kiosztással ($\binom{32}{7} = 3365856$ esetet végigvizsgálva) lehet csak megúszni a dolgot, a hat rossz kiosztás ideális esetét nem lehet elérni. Ez a hét rossz kiosztás lehet például a

következő (F=fekete, f=fehér):

$$\begin{array}{ccccc} F & F & F & F & f \\ F & F & F & f & F \\ F & F & F & f & f \\ F & f & f & F & F \\ f & F & f & F & F \\ f & f & F & F & F \\ f & f & f & f & f \end{array}$$

Érdemes megjegyezni, hogy itt vannak olyan rossz kiosztások, amelyek távolsága egymástól 1: például a harmadiknak a távolsága az elsőtől és a másodiktól. Az embernek az érzése, hogyha minél kevesebb rossz kiosztásnak kell lennie, akkor a rossz kiosztásoknak egymástól távol kell lenniük. Az ideális (n kettőhatvány mínusz 1 alakú) esetben a rossz kiosztások egymástól vett távolsága mindig legalább 3, hiszen nincs átfedés az 1 sugarú környezetükben. A kevésbé ideális esetre az ember úgy gondolja, hogy az egymástól vett távolságoknak még legalább kettőnek kellene lennie. De az $n = 5$ eset rácáfol erre a megérzésre: az összes stratégia olyan, hogy van benne legalább egy pár, egymástól 1 távolságra levő rossz kiosztás.

Sajnos ez az eredmény elég rossz hír. Matematikailag elképzelhető egy olyan bizonyítás, ami az ideális esetet bizonyítaná, de hát ezt már beláttuk, hogy nem igaz. Az is előfordulhatna, amit az $n = 4$ esetből sejthetnénk: néhányan passzolnak és a többiek (akik már kettőhatvány mínusz 1-en vannak) az ideális stratégiájukat játsszák. Sajnos ez sem igaz, hiszen ez $n = 5$ esetben nyolc rossz kiosztást jelentene. A hét rossz kiosztás $n = 5$ esetén nagyon nehezen magyarázható meg, ha egyáltalán meg lehet magyarázni. Nyitott probléma, hogy hány rossz kiosztással lehet megoldani a nem kettőhatvány mínusz 1 alakú n-ek esetét.

De akkor legalább oldjuk meg a kettőhatvány mínusz 1 esetet. Ez önmagában is elég sokat mondana, hiszen a fenti okoskodás szerint ha $2^l - 1 \leq n < 2^{l+1} - 1$, akkor tudunk olyan stratégiát mondani, amelyben az esetek $(2^l - 1)/2^l$-edrészében nyernek a játékosok. A stratégia egyszerű: $n-(2^l-1)$ játékos mindig passzoljon, a többi 2^l-1 játékos pedig játssza a kettőhatvány mínusz 1 esetre megadható ideális stratégiát. Ekkor pontosan az esetek $(2^l - 1)/2^l$-edrészében nyernek a játékosok. Ez azért is elég jó eredmény, mert ez már önmagában is bizonyítja, hogy minél nagyobb a játékosok száma, az eseteknek annál nagyobb részében nyerhetnek.

Nézzük tehát az $n = 2^l-1$ esetet. Ideális stratégia kell, tehát a rossz kiosztások 1 sugarú környezetei egymást át nem fedve kell lefedjék az összes kiosztást. Ebből következik, hogy a rossz kiosztásoknak egymástól legalább 3 távolságra kell lenniük. És ez most fordítva is igaz: ha pontosan $2^n/(n+1)$ darab olyan kiosztást találunk, amelyek egymástól legalább 3 távolságra vannak, akkor azok 1 sugarú környezetei nem metszhetik egymást, így pontosan $[2^n/(n+1)] \cdot (n+1) = 2^n$ kiosztást fednek le, tehát az összeset. Ez annyira megszorítja a megvizsgálandó esetek számát, hogy

így még $n = 7$-re is (amire különben $\binom{128}{16}$, tehát kb. 10^{20} nagyságrendű esetet kellene ellenőrizni) meg tudjuk határozni az összes lehetséges rossz kiosztásokat programunkkal. Ezek szerint 240-féleképpen lehet stratégiát választani, és hát ez persze nagyon sok ahhoz, hogy mindegyiket megnézzük és megpróbáljunk valami szabályosságot találni bennük.

Fogalmazzuk át egy kicsit a problémát úgy, ahogy ezt a számítógépes programban is megtettük. Jelölje 1 a fekete és 0 a fehér színű kalapot. Így egy kalapszín kiosztás egy kettes számrendszerben n jegyű számnak, másszóval egy n dimenziós térbeli vektornak, pontosabban az n dimenziós térbeli egységkocka egyik csúcsának felel meg. Az ideális rosszkiosztás-kombináció most egy olyan csúcshalmazát jelenti az egységkockának, amelytől bármelyik másik csúcs legfeljebb 1 távolságra van, másszóval bármelyik másik csúcs éllel össze van kötve valamelyik rossz kiosztásnak megfelelő csúccsal. Geometriai szemlélet alapján rögtön felmerülhet az ötlet, hogy a kocka bármelyik egybevágósági transzformációját alkalmazhatjuk egy ideális rosszkiosztás-kombinációra, hogy újabb ideális rosszkiosztás-kombinációnak megfelelő csúcshalmazokat kapjunk, hiszen a csúcsok a transzformációk mentén „viszik magukkal" az 1 sugarú környezetüket is. Ha a kocka összes lehetséges egybevágósági transzformációját kipróbáljuk a 240 lehetséges stratégián (természetesen programmal), akkor kiderül, hogy egyetlen stratégiából az összes többi megkapható egybevágósági transzformációval. Ezt sajnos nagyobb n-ekre már a megvizsgálandó esetek nagy száma miatt nem tudjuk ellenőrizni.

Tehát az egyetlen ténylegesen megvizsgálandó stratégia, vagyis rossz kiosztás halmaz $n = 7$ esetben lehet például a következő:

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Próbáljunk meg tehát valami szabályosságot találni ebben. Rövid vizsgálódás után feltűnik, hogy az első három oszlopban levő szám, mint kettes számrendszerbeli

szám, a 0 és 7 között minden számot kétszer adja ki. Azt is könnyen felfedezhetjük, hogy a középső (negyedik) szám pontosan akkor 0, ha az előtte levő számban páros sok 1-es szerepel. Így az első négy oszlopban 8 olyan különböző szám áll, amelynek kettes számrendszerbeli alakjában legalább 2 számjegyben eltérés van. Mostmár csak az utolsó három oszlopot kellene megmagyarázni. Ebben is találhatunk szabályosságot: minden második sorban növekvő illetve csökkenő sorrendben ott vannak a 0 és 7 közötti számok kettes számrendszerben, de ez a szabályosság félrevezetheti az olvasót (mint ahogy engem is félrevezetett). Nézzük más oldalról a dolgokat. Miért van az első három oszlopban minden szám kétszer, mi a jelentősége a kettesnek? Ez első ránézésre csak ront a dolgokon, hiszen akkor már az első négy oszlopban nem lesz különbség a kiosztásban. Ez viszont rávezethet minket a megoldásra: ha az első négy oszlopban nincs különbség, akkor az utolsó három oszlop mindegyikében különbözniük kell. Vagyis az utolsó három oszlopba be kell írni az $n = 3$ esetben található rosszkiosztás-kombinációk valamelyikét. És az $n = 3$ esetben pontosan kettő rossz kiosztás van, így megvan tehát a kettes jelentése is. Még csak annyit kellene kideríteni, hogy melyik stratégiákat kell írni az azonos kezdetű sorok végére. Az $n = 3$ esetére alap-rosszkiosztásokból (000 és 111), vagyis a 3 dimenziós kocka két átellenes csúcsából legegyszerűbben a kocka éleinek felező merőleges síkjára való tükrözéssel kaphatunk másik rosszkiosztás-kombinációkat. Ez annak felel meg (számokkal leírva), hogy az egyik (vagy több tükrözést végrehajtva több) helyiértéken kicseréljük a számjegyeket 1-ről 0-ra és viszont. Például, az első számjegy cseréjével a 000 és 111-ből az 100 és 011 keletkezik, ezek a 9. és 10. sorban vannak az 100 szám mellett. Néhány ilyet még ellenőrizve nagyon feltűnő, hogy az utolsó három oszlopban pontosan azokon a helyiértékeken cserélünk számjegyet, ahol az első három oszlopban 1-es van. Vagyis az utolsó három oszlopot úgy kaphatom meg, hogy az $n = 3$-ra vonatkozó 000 és 111 rosszkiosztás párban pontosan azokban az oszlopokban cserélek számjegyet, ahol az első három oszlopban 1-es áll.

Nos, a szabályosságot megtaláltuk, mostmár csak be kellene bizonyítani, hogy ez tényleg megfelelő rossz kiosztásokat ad. A fentiek alapján egy teljes indukciós konstrukcióval a következőképpen fogalmazhatom meg az ideális rosszkiosztás-kombinációt az általános esetben. Tegyük fel, hogy egy kettőhatvány mínusz 1 alakú n-re tudunk ideális, $2^n/(n+1)$ db rossz kiosztást mutatni. Ekkor $2n+1$-re (a rákövetkező kettőhatvány mínusz 1 alakú számra) a következőt lehet csinálni:

1. Írjuk fel az első n oszlopba az összes lehetséges kettes számrendszerbeli számot 0-tól 2^n-1-ig növekvő sorban mindegyiket annyiszor, ahány rossz kiosztás van az n esetén, vagyis $2^n/(n+1)$-szer. Így összesen $2^n \cdot 2^n/(n+1) = 2^{2n+1}/(2n+2)$ sort írok le, ami pontosan az ideális rosszkiosztás darabszámnak felel meg $2n+1$ esetén.
2. Az $(n+1)$-edik oszlopba pontosan akkor írjunk 0-t, ha az első n oszlopban páros sok 1-es van, különben írjunk 0-t. Így az első $n+1$ oszlopban a különböző számok legalább 2 helyen el fognak térni egymástól.
3. Vegyünk egy az n-es esetre vonatkozó rosszkiosztás-halmazt. Az utolsó n osz-

lopot úgy kapom, hogy ebben a rosszkiosztás-halmazban pontosan ott cserélek számjegyet, ahol az első n oszlopban 1-es számjegy áll.

Lássuk, hogy valóban igaz-e az, hogy ekkor az így leírt kettes számrendszerbeli számok legalább három helyiértékben eltérnek egymástól. Vegyünk két ilyen számot (sort). Három eset lehetséges:

1. Ha az első n oszlopban legalább három helyen eltérés van, akkor készen vagyunk.
2. Ha az első n oszlopban nincs eltérés, akkor az utolsó n oszlopban egy n-re vonatkozó rosszkiosztás-halmaz két eleme van, amelyek távolsága legalább 3, és ismét rendben van a dolog.
3. Marad az az eset, amikor 1 vagy 2 helyen van eltérés az első n oszlopban. Tekintsük azokat a rosszkiosztás-halmazokat, amelyek az első n oszlopban levő számhoz tartoznak, amelyek az utolsó n oszlopban vannak. Ezek a rosszkiosztás-halmazok úgy keletkeznek egymásból, hogy 1 vagy 2 oszlopban megváltoztatjuk a számjegyeket. 1 vagy 2 helyen változtatás azt jelenti, hogy az egyik rosszkiosztás-halmazban levő elemektől 1 vagy 2 távolságra levő másik elemeket kapunk. Mivel a rosszkiosztás-halmazban az elemek távolsága legalább 3, a cserével nem kaphatjuk meg az eredeti rossz kiosztások egyikét sem, vagyis az eredeti és az 1 vagy 2 oszlopban történt változtatás utáni rosszkiosztás-kombinációk halmaza diszjunkt. Ez tehát azt jelenti, hogy a kiválasztott két sorban az utolsó n oszlopban legalább 1 helyen eltérés van. Mivel a konstrukció szerint az első $n+1$ oszlopban legalább 2 helyen eltérés van, összesen tehát legalább három helyen eltér a két kiosztás, és készen vagyunk.

A feladatot tehát megoldottuk. Néhány megjegyzés a problémával kapcsolatban. A számítógépnek menet közben nagy szerepe volt. Az $n = 7$ esetnek minden valószínűség szerint nem estem volna neki „kézzel", hogy találjak egy rosszkiosztás-halmazt. Anélkül pedig nem találhattam volna meg a szabályosságot a rosszkiosztás-halmazban, hiszen a szabályosság nem kimondottan triviális. Az így kapott indukciós konstrukció segítségével a számítógép nagyon gyorsan tudja generálni a rosszkiosztás-kombinációkat, másszóval a stratégiákat.

Most utólag érdekes felfedezni, hogy a konstrukció mennyire „célratörő". A cél ugye az, hogy a számok legalább három helyiértékben eltérjenek egymástól. Először leírjuk az első n oszlopba az összes számot 0-tól $(2^n - 1)$-ig, ezek nyilván legalább egy helyiértékben eltérnek egymástól. Ezután az $(n+1)$-edik oszlopba olyan számjegyet írunk, hogy az első $n+1$ oszlopban levő számok legalább két helyiértékben eltérjenek egymástól. Végül az utolsó n oszloppal biztosítjuk a három helyen való eltérést.

Még nem magyaráztam meg a címben szereplő kódolások szót. Számítástechnikában igen fontos probléma az adatok hibátlan továbbítása, illetve az adatok olyan módon történő tárolása, amelyből még esetleges hibás kiírás vagy visszaolvasás esetén is visszakapható az eredeti adat. Az alapprobléma mindig az, hogy k bitnyi

információt szeretnénk továbbítani (egy bitnyi információt úgy lehet elképzelni, mint egy kettes számrendszerbeli szám számjegye, így ez egy kettes számrendszerbeli k jegyű szám továbbítását jelenti). Az első ötlet a konstrukció alapján, hogy adjunk hozzá a számhoz még egy bitet (egy számjegyet), amelyik pontosan akkor 0, ha páros sok 1-es van a k számjegy között. Ez kétoldalú kommunikáció esetén elég hatékony módszer: ha a fogadó oldal olyan $k+1$ jegyű számot kap, amelyben az utolsó jegy nem felel meg a fenti kritériumnak, akkor a továbbítás hibás volt, tehát a fogadó megkérheti az adót az adat újraküldésére. Vegyük észre, hogy ez a módszer csak a páratlan sok számjegyben keletkező hibát (0-ról 1-re vagy fordított cserélődést) tud jelezni, páros sok számjegyben történő változást a fogadó oldal már nem fog észrevenni. Az ilyen kódolásokat 1 bithiba jelző kódolásoknak hívják (hiszen a 2 bit hibát nem jelzik), és a legalapvetőbb tulajdonságuk az, hogy a k bitnyi információt olyan k-nál hosszabb bitsorozatokként fogja továbbítani, amelyekben legalább két helyiértékben eltérés van, mert a fogadó csak így tudja jelezni az 1 helyiértékben jelentkező hibát. Hasonló módon, ha a továbbított bitsorozatok között legalább három helyiértékben van eltérés, akkor az 1 helyiértékben keletkező hiba ki is javítható, hiszen a hibásan kapott bitsorozat csak egyetlen olyan lehetséges bitsorozattól lesz 1 távolságra, amelyet az adó továbbíthatott. Ezeket 1 bithiba javító kódolásoknak hívják, és a fenti rossz kiosztások pontosan ilyen kódnak felelnek meg. A fenti kódolást Hamming-kódnak hívják. A kódolás hatékonyságáról annyit, hogy $n = 2^l - 1$ biten $2^n/(n+1) = 2^{2^l-l-1}$ számot, tehát $2^l - l - 1$ bitnyi információt tudunk továbbítani. A kódolások hibajavító képessége persze még tovább is fokozható: ha a kódok egyre több helyiértékben térnek el egymástól, akkor kaphatunk 1 bithiba javító és 2 bithiba jelző, 2 bithiba javító, 2 bithiba javító és 3 bithiba jelző, stb. kódolásokat is.

Irodalom

[1] M. Bernstein: The Hat Problem and Hamming Codes, Focus, November 2001, 4-6.

Makay Géza, SZTE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1., makayg@math.u-szeged.hu