A Szegedi Tudományegyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájának
képzési terve

a 2016. szeptember 1-től induló 2+2 éves képzésre vonatkozóan

2016. augusztus 30.

I. Bevezetés és tartalomjegyzék

A Doktori Iskolában a képzés a *felvétellel* kezdődik, *képzési programokban* folyik, *doktori kurzusok* és meghirdetett *kutatási témák* mentén halad a *kredittáblázatunk* által szabályozott ütemben, szemeszterenként *hallgatói beszámolók* által is ellenőrzött módon. Célja a PhD fokozat megszerzése, amelyhez doktori szigorlatot kell tenni adott szabályok és adott komplexvizsga-tematika szerint, és amelyhez teljesíteni kell az *idegen nyelvi követelményeket*, valamint a *publikációs követelményeket* is. Az egész folyamat a *Doktori Iskola Működési Szabályzata* és *Minőségbiztosítási Terve* szerint zajlik, a *felsőbb szintű jogszabályokkal* összhangban. A képzési terv teljes áttekintéséhez a *dőlten kiemelt* összetevők mindegyike hozzátartozik, de különböző mértékben. A Minőségbiztosítási Terv I.4. pontja szerint nem szerencsés ugyanazt a dokumentumot több helyen is közreadni, hiszen az (a módosítások miatt) előbb-utóbb zavar forrása lenne. Ezért ezen dokumentumban a kiemelten említett összetevők egy részére csak hivatkozást adunk (bemásolás helyett), más esetben pedig a dátumnál megemlítjük, hogy ez csak a mostani állapot, amely időben változhat.

Az aktuális kutatási témák kivételével, amelyek az Országos Doktori Adatbázisból érhetők el, az itt megadott információ (a későbbiekben majd annak aktuálisabb változata is) megtalálható a Doktori Iskola honlapján, amely az SZTE Bolyai Intézetének honlapjáról is és a Doktori Iskola vezetőjének honlapjáról is könnyen elérhető.

Tartalom:

II. Képzési programok és vezetőik

2016. augusztus 30.

(az aktuális helyzet mindig a Doktori Iskola honlapján látható)

A DI elsősorban az alábbi képzési programokhoz tartozó kurzusokat kínálja hallgatóinak.

- Algebra képzési program, vezetője Dr. Zádori László egyetemi tanár, akadémiai;
- Analízis képzési program, vezetője Dr. Móricz Ferenc professor emeritus, akadémiai doktor;
- Dinamikus rendszerek képzési program, vezetője Dr. Krisztin Tibor egyetemi tanár, akadémikus;
- Sztochasztika képzési program, vezetője Dr. Pap Gyula egyetemi tanár, akadémiai doktor;
- Geometria, kombinatorika és elméleti számítástudomány képzési program, vezetője Dr. Hajnal Péter habilitált tanszékvezető egyetemi docens, kandidátus.

Kutatási témaként – kivételesen – olyan is meghirdethető, amelyik nem sorolható a fenti képzési programok egyikéhez sem. A fenti képzési programok tartalmaznak didaktikai kurzusokat és kutatási témákat is.

- A didaktikai képzésért és kutatásért felelős koordinátor: Dr. Kosztolányi József, egyetemi docens, PhD.

V. Kutatási témák képzési programonként

2016. augusztus 30.

(az aktuális helyzet mindig a Doktori Adatbázisban látható)

Minden kutatási téma csak egyszer szerepel, bár némelyik több helyen is felsorolható lenne.

Algebra képzési program

Czédli Gábor: **Hálók néhány általánosítása**

Igen intenzív kutatások folynak a hálók nagyszámú általánosításának tanulmányozására, a logikával való kapcsolattól kezdve a folytonosság fogalmáig. A meghirdetett téma elsősorban az automorfizmusokkal (pl. involúció, polaritás) felszerelt hálók, valamint a hálóaxiómák gyengítése révén keletkező struktúrák vizsgálatát célozza. A gyűrűelméleti analógia és a témavezető korábbi eredményei alapján várható, hogy számos hálóelméleti eredménynek van értelemszerű (de nem triviális) kiterjesztése involúciós hálókra. Involúciós hálókra természetes példa a kvázirendezések hálója; ezeket korábban is vizsgálták; ezen vizsgálatok folytatása is a témához tartozik.

~~~~~~

Czédli Gábor: **Kísérőhálók és lezárási operátorok**

A hálóelmélet alkalmazásainak természetes közegét, továbbá számos megoldásra váró probléma kiindulópontját jelentik a kísérőhálók (közülük is kiemelten a részmodulushálók, kongruenciahálók és a témavezető által bevezetett koalícióhálók). A cél ezek vizsgálata. Kiemelt probléma a koalícióhálók által generált varietás meghatározása, továbbá – a részmodulushálókkal és a Neumann-féle koordinátázási eredménnyel kapcsolatban – a témavezető által bevezetett moduláris fraktálgenerált hálóvarietások meghatározása. A Galois-féle lezárási operátorok széleskörű alkalmazhatósága indokolja bizonyos (pl. a témavezetőtől származó) erősebb lezárási operátorok vizsgálatát.

~~~~~~

Czédli Gábor: **Kongruenciahálók és Malcev-feltételek**

A kongruenciahálók azonosságaira vonatkozó Malcev-feltételek vizsgálatában három jelentős esemény is végbement az elmúlt időszakban: a kommutátorelmélet kifejlődése, a TIP (tolerancia metszési tulajdonság) hasznosságának felfedezése moduláris varietásokban (részben a témavezető által), továbbá a Kearnes-Kiss: „The shape of congruence lattices" könyv által kínált eszközök megjelenése. Az eszköztár gazdagodása jó esélyt kínál a korábban is (részben a témavezető által) vizsgált kérdések (pl. Horn-formulák, kongruenciazonosságok a 0-nál, implikáció) terén erősebb eredmények elérésére.

~~~~~~
~~~~~~

Czédli Gábor: **Hálók és kategóriák**

A hálók is és a kategóriák is a modern matematika azon eszközei, amelyek lehetővé teszik a konkrét elemekkel való számolások kiküszöbölését, és ily módon rámutatnak egy-egy tétel igazi okára. Nem meglepő, hogy e két eszköz között komoly kapcsolatok vannak. A kutatási téma célja ezen kapcsolatok vizsgálata, és az eddigi eredmények továbbfejlesztése. A meghirdetett témának két kiemelt területe van. Ezek egyike a Hutchinson-tételen alapul, amely szerint a részmodulushálók (Abel-féle) kategóriái között ható egzakt beágyazó funktorok létezésének tanulmányozása ekvivalens az ugyanezen hálók kvázivarietásai közötti tartalmazási reláció vizsgálatával; konkrét feladat pl. néhány kategóriákkal elért eredmény hálóelméleti bizonyítása, és ily módon való továbbfejlesztése. A másik terület Marcel Erné (részben a témavezetővel közös) eredményein alapul, amely szerint a kategóriaelméleti lezárási operátorok természetes és alkalmazható módon definiálhatók algebrai (sőt folytonos) hálók esetén is.

~~~~~~

Katonáné Horváth Eszter: **Boole függvények és permutációcsoportok**

Invarianciacsoport, azaz Boole-függvény változóinak azon permutációi, melyek a függvényt invariánsan hagyják. Galois kapcsolat a permutációcsoportok és a függvények között, lezárási operátor. Általánosítások, megoldatlan problémák.

~~~~~~

Katonáné Horváth Eszter: **A hálóelmélet alkalmazásai**

Fogalomháló, Galois kapcsolat, hálóértékű fuzzy halmazok. A téma alkalmazásai a természettudományokban, társadalomtudományokban, műszaki tudományokban, orvostudományban. Módszertani aspektusok.

~~~~~~

Maróti Miklós: **Algebra és algoritmikus problémák**

Algebrai eszközök nagy sikerrel alkalmazhatók klasszikus algoritmikus problémák vizsgálatára, mint például az struktúra homomorfizmus (általánosított gráfszínezési) probléma komplexitásának meghatározására. Tudott, hogy bizonyos Malcev-fetételek teljesülése esetén ez a probléma polinomiális időben megoldható, illetve ha az úgynevezett "gyönge többségi függvény" Malcev-feltétel nem teljesül, akkor a probléma NP-teljes. A kombinatorika, univerzális algebra és komplexitáselmélet ezen határterületének vizsgálata nagyon sok érdekes és nehéz problémát vetett fel, többek között Feder és Vardi 15 éve nyitott dichotómia sejtését. Algebrai problémák komplexitásának vizsgálata mellett azok (varietások azonosság, illetve szóproblémája, Malcev-feltételek teljesülése) eldönthetősége is nagyon széles kutatási terület számos nyitott problémával.

~~~~~~

Maróti Miklós: **Varietások és kvázivarietások**

Baker véges azonosságbázis tétele az univerzális algebra egyik legmélyebb klasszikus eredménye, amely szerint minden végesen generált kongruencia-disztributív varietás végesen axiomatizálható. Ezt az eredményt több irányban általánosították (McKenzie, Willard, Pigozzi) és számos ehhez kapcsolódó probléma vár még megoldásra, többek között a több mit 30 éves Park sejtés. Konkrét varietások és kvázivarietások vizsgálatánál a véges axiomatizálhatóság mellet további fontos kutatási terület a kisérő struktúrák (mint például a részvarietás, részkvázivarietás és kongruencia hálók) vizsgálata, illetve a szubdirekt irreducibilis és egyszerű algebrák leírása.

~~~~~~

Maróti Miklós: **Reziduált hálók**

A nemklasszikus logika algebrai módszerekkel való vizsgálata természetes módon vezet a reziduált hálókhoz, olyan algebrai struktúrákhoz, amelyek hálók és monoidok is egyben, és teljesítik az úgynevezett reziduális axiómát. Tipikus reziduált hálók a Boole- és Heyting-algebrák, illetve a hálószerűen rendezett csoportok. A téma legújabb érdekes eredményei a hálóelmélet, a logika és a számítástechnika fogalmainak és módszereinek (Gentzen-kalkulus, Dedekind-MacNeille-kiterjesztés, azonosság probléma eldönthetősége, véges model tulajdonság, minimális varietások) együttes alkalmazásával születtek, illetve azok egymáshoz való kapcsolatát vizsgálják.

~~~~~~

Szendrei Ágnes: **Véges algebrák vizsgálata klónelméleti eszközökkel**

Ha A tetszőleges algebra, A klónja azokból a műveletekből áll, amelyek kompozícióval nyerhetők A alapműveleteiből és projekciókból. Két algebra ekvivalens egymással, ha klónjaik egyenlőek. Ekvivalens algebráknak az algebrai szempontból lényeges strukturális tulajdonságai mind megegyeznek, ezért az algebráknak nem az alapműveleteik a lényegesek, hanem a klónjuk. Jól ismert, hogy ha A véges, akkor A klónját meghatározzák A kompatibilis relációi, amelyek között ott vannak olyan, algebrai szempontból fontos relációk mint A részalgebrái, azok kongruenciái, az így kapott faktoralgebrák közötti izomorfizmusok, stb. Széles kutatási terület a véges algebrák strukturális tulajdonságai, illetve klónja közötti kapcsolatok vizsgálata. Ha az A által generált varietás kongruencia-moduláris, akkor e vizsgálatban jól használhatók hatékony kommutátorelméleti eszközök is. Fontos nyitott probléma például, hogy ekvivalenciától eltekintve hány olyan algebra van adott véges halmazon, amely kongruencia-fölcserélhető varietást generál. Nagyrészt feltáratlan terület a véges csoportok és más klasszikus algebrai struktúrák klónjának invariánsokkal (kompatibilis relációkkal) történő meghatározása is.

~~~~~~

Szendrei Ágnes: **A klónháló szerkezete**

Kételemű alaphalmazon csak megszámlálhatóan sok klón van, s a klónhálót pontosan ismerjük (Post, 1941), nagyobb véges alaphalmazon azonban kontinuum sok klón van (Janov—Mucsnyik, 1954), s a klónháló igen bonyolultnak látszik. Még komplikáltabb a helyzet végtelen alaphalmaz esetén, ahol a klónháló szerkezete függ a halmazelméleti feltevésektől (Goldstern—Shelah, 2002). Véges alaphalmaz esetén a klónháló szerkezete
~~~~~~

többféle irányból vizsgálható. Egyik lehetőség a klónháló `aljának' és `tetejének' leírása, amely elsősorban a minimális vagy majdnem minimália klónok, illetve a szubmaximális klónok meghatározását foglalja magában (a maximális klónok ismertek, Rosenberg, 1970). Másik megközelítés a monoid-intervallumok tanulmányozása, amely arra irányul hogy transzformációmonoidok olyan széles osztályait találjuk meg, amelyekhez tartozó intervallumok a klónhálóban végesek. Itt adott M transzformációmonoid esetén az M-hez tartozó monoid-intervallum azokból a klónokból áll, amelyeknek az unér része M. Nemrég kezdődött a klónháló egy érdekes rendezés-filterének a vizsgálata. Ez a filter azokból a klónokból áll, amelyekre nézve csak véges sok nemekvivalens művelet van az adott alaphalmazon. (Két művelet C-ekvivalens, ha megkaphatók egymásból C-beli műveletek behelyettesítésével.) Számos nyitott kérdés van mindhárom területen.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Szendrei Mária: **Reguláris félcsoportok és általánosításaik**

McAlister elmélete inverz félcsoportok esetén jól használható kapcsolatot ad meg az E-unitér inverz félcsoportok, a faktorizálható inverz félcsoportok, valamint a félhálók és csoportok szemidirekt szorzataként előálló inverz félcsoportok között. Ezen elmélet bizonyos részeit már általánosították szélesebb félcsoportosztályokra, de sok még a nyitott kérdés az olyan fontos osztályokban is, mint pl. a lokálisan inverz félcsoportok, az ortodox félcsoportok, az adekvát félcsoportok osztálya.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Szendrei Mária: **Véges inverz félcsoportok**

Híres nyitott kérdés, hogy van-e minden véges inverz monoidnak véges F-inverz fedője. Ugyancsak inverz félcsoportok fedőire vonatkozik a következő nyitott kérdés, amelynek véges (algoritmikus) változata különösen fontos: adott V csoportvarietás esetén igaz-e, hogy ha egy S inverz félcsoport részcsoportjai V-beliek, akkor S-nek van E-unitér fedője V felett. Ismert, hogy ha pl. V Abel-féle vagy nilpotens, akkor a válasz nemleges, viszont nyitott a kérdés feloldható esetben.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Waldhauser Tamás: **Függvények és függvényosztályok véges halmazokon**

Véges alaphalmazon értelmezett többváltozós függvények (pl. Boole-függvények és általánosításaik) és ezek osztályainak vizsgálata algebrai és kombinatorikai szempontból: részfüggvények (minorok), aritáshézag, függvényegyenletekkel definiálható osztályok, függvényosztályok kompozíciója, klónok, parciális klónok.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Zádori László: **Véges algebrák struktúra elmélete**

A véges algebrák struktúrájának vizsgálatához manapság nélkülözhetetlen eszközöket az 1980-as évek végén Hobby és McKenzie fejlesztették ki, és egy monográfiában publikálták. Elméletük, mely tame congruence theory néven vált ismertté az univerzális algebra, kommutátor-elmélet és hálóelmélet eredményeire épül. Az elmélet segítségével öt algebra-, illetve varietásosztály definiálható természetes módon. Az így kapott osztályok kifejezésekre vonatkozó azonosságok segítségével definiált ún. Malcev-osztályok. Kutatásaink célja ezen algebraosztályokba eső algebrák szerkezetének tanulmányozása és a kapott eredmények komplexitás-elméleti alkalmazása.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Zádori László: **Klónok, relációk**

Egy klón nem más, mint egy művelethalmaz, amely tartalmazza a projekciókat és zárt a kompozícióra. Ismeretes, hogy véges halmazon értelmezett klónok hálót alkotnak, sőt ebben a hálóban minden az összes műveletek klónjától különböző klón része egy maximális klónnak. Véges halmazon véges sok maximális klón van, melyek leírását Rosenberg invariáns relációk segítségével adta meg. Ezen relációk hat típusba sorolhatók. Az egyik típus a korlátos részbenrendezett. halmazok.osztálya. A másik öt típusba eső relációkhoz tartozó maximális klónok algebrai tulajdonságai, pl. végesen generálhatóság, speciális azonosságokat teljesítő műveletek létezése, jól ismertek. Kutatásainkban a véges részbenrendezett halmazok (és egyéb relációs struktúrák) szerkezete és az általuk meghatározott klónok algebrai tulajdonságai között fennálló összefüggések feltárásával foglalkozunk.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Analízis képzési program

Kérchy László: **Hilbert terek operátorai**

Hilbert és Banach terek operátorainak szerkezetét vizsgáljuk, különös tekintettel az invariáns altérhálókra, reflexivitásra és ciklikusságra. Kiemelt figyelmet fordítunk a kontrakciókra, valamint a hatványkorlátos és reguláris norma viselkedésű operátorokra. Az operátorok mellett operátor félcsoportokat is vizsgálunk mind a diszkrét, mind a folytonos esetben.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Leindler László: **Ortogonális sorok, egyenlőtlenségek, függvényosztályok**

Elsősorban általános ortogonális sorok és Fourier sorok konvergencia és erős approximáció témái foglalkoztatnak. Egyenlőtlenségekkel kapcsolatban végtelen számsorokkal kapcsolatos témák érdekelnek. Függvényosztályok és approximációs problémák kapcsolatát vizsgálom.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Molnár Lajos: **Megőrzési problémák**

Megőrzési problémák a matematika számos területén fellépnek és általánosan a következőképpen fogalmazhatók meg: Egy adott X struktúra esetén határozzuk meg az X összes olyan transzformációját (esetleg bizonyos további feltételeknek eleget tévő leképezését), ami megőriz

• az X elemeihez rendelt valamilyen mennyiséget, vagy
• az X elemeinek egy előre meghatározott részhalmazát, vagy
• az X elemei között adott valamilyen relációt, stb.

Algebrai szóhasználattal ezen transzformációk az adott struktúra bizonyos automorfizmusainak vagy szimmetriáinak tekinthetők és a feladat ezek meghatározása.
A mátrixterek megőrzési transzformációval kapcsolatos vizsgálatok a mátrixelmélet napjainkban is egyik legaktívabb kutatási területét jelentik. Az utóbbi évtizedben kiterjedt vizsgálatok kezdődtek és folynak a végtelen dimenziós esetre, azaz operátorterek megőrzési transzformációira vonatkozóan is. A cél ezen területhez való érdemi hozzájárulás, új eredmények elérése különböző, többek között a kvantummechanikában fellépő operátorstruktúrák megőrzési transzformációra vonatkozóan.

~~~~~~

Molnár Lajos: **Függvényterek és operátorterek izometriái**

A különböző függvényalgebrák és operátoralgebrák szürjektív lineáris izometriái szerkezetének meghatározása a funkcionálanalízis klasszikus problémái közé tartozik, melyet Banach és Stone alapvető tétele, majd annak Kadisontól származó messzemenő általánosítása motivál. A doktori munka célja a matematika különböző területein fellépő, elsősorban függvények és operátorok alkotta nemlineáris metrikus struktúrák izometriáinak vizsgálata, szerkezetük feltárása.

~~~~~~

Molnár Lajos: **Kommutativitás operátoralgebrákban**

Mátrixok, lineáris operátorok felcserélhetősége alapvető reláció az ezen objektumok alkotta struktúrákban szerteágazó alkalmazásokkal a matematikán belül és kívül (pl. kvantummechanika) egyaránt. A doktori munka célja a szakirodalomban meglévő ilyen irányú ismeretek feldolgozása után új eredmények elérése operátoralgebrák kommutativitásának, elemeik centralitásának, illetve operátorpárok felcserélhetőségének jellemzéseire vonatkozóan.

~~~~~~

Molnár Lajos: **Lokális automorfizmusok**

Egy binér művelettel ellátott matematikai struktúra valamely transzformációját lokális automorfizmusnak (pontosabban 2-lokális automorfizmusnak) nevezzük, ha a transzformáció tetszőlegesen kiválasztott két pontban felvett értéke megegyezik egy (a pontpártól függő) automorfizmusnak ezen két pontban felvett értékével. Elsősorban lineáris operátorok alkotta struktúrák esetén számos esetben előáll az az érdekes jelenség, hogy a lokális automorfizmusok szükségképpen (globális) automorfizmusok, amit úgy szokás kifejezni, hogy az adott struktúra automorfizmusai teljesen meghatározottak a két pontból álló részhalmazokon való hatásaik által. A doktori munka célja a szakirodalomban meglévő ismeretek feldolgozása után ilyen irányú vizsgálatok folytatása és új eredmények elérése.
~~~~~~

~~~~~~

Móricz Ferenc: **Abszolút konvergens többszörös Fourier sorok összegfüggvényének differenciálhatósága**

Többváltozós differenciálható függvényeket vizsgálunk, amelyeknek a Fourier sora abszolút konvergens. A Fourier együtthatók nagyságrendjére kirótt elegendő feltételeket keresünk arra, hogy az adott függvény parciális deriváltjai kiszámíthatók legyenek a többszörös Fourier sorok tagonkénti parciális deriválással kapott sorok összegfüggvényeként.

~~~~~~

Pusztai Béla Gábor: **Integrálható rendszerek**

Az integrálható rendszerek elmélete a matematikai fizika egyik népszerű, sokat kutatott tárgya. Ezen területen belül a Calogero-Moser-Sutherland típusú egzaktul megoldható sokrészecske rendszerek vizsgálatát tervezzük. Célunk között szerepel a BC(N) típusú Sutherland modellek szórási adatainak és kötött-állapoti spektrumának levezetése, továbbá a spin Sutherland modellek, a Yang-Mills mezők és a dinamikai r-mátrixok közötti kapcsolat mélyebb megértése.

~~~~~~

Stachó László: **Banach sokaságok és topologikus vektortereken modellezett sokaságok automorfizmus csoportjai és ezek kísérő algebrai, illetve geometriai struktúrái**

Elsősorban szimmetrikus komplex sokaságok teljes holomorf vektormezőinek vizsgálata, az azokkal kapcsolatos Banach-Lie algebrák és Jordan hármas-algebrák differenciálgeometriai következményei, különös tekintettel a korlátos szimmetrikus tartományok duális sokaságaira végtelen dimenzióban. A komplex struktúrák valós részeinek vizsgálata, az eredmények kiterjeszthetősége a Banach sokaságokon túl.

~~~~~~

Totik Vilmos: **Ortogonális polinomok, polinom egyenlőtlenségek és potenciálelmélet**

Az ortogonális polinomok elméletén és az approximációelméleten belül elsősorban olyan kérdések vizsgálata kerül előtérbe a doktori témákban, amelyek vizsgálatához komplex függvénytani vagy potenciálelméleti módszerek szükségesek. Ezek az ilyen irányú kutatások modern, és igen intenzíven vizsgált részét adják.

~~~~~~

Dinamikus rendszerek képzési program

Hatvani László: **Stabilitási problémák alkalmazásokkal**
~~~~~~

A különböző alkalmazások során a leggyakorib igény a modell megoldásainak kvalitatív leírása (oszcilláció, stabilitás, ...). A stabilitási tulajdonságok tanulmányozásának ma is leghatékonyabb módszere a Ljapunov-féle direkt módszer. Ennek továbbfejlesztése során vizsgáljuk olyan Ljapunov-függvények alkalmazhatóságát, amelyeknek a rendszer szerinti deriváltja nem negatív definit, mint a klasszikus elméletben, hanem csak negatív szemidefinit. Fontos annak a kérdésnek a vizsgálata is, hogy a különböző tulajdonságok hogyan függnek a rendszer paramétereitől (bifurkáció). Az alkalmazások során főleg biológiai és mechanikai modelleket tárgyalunk.

~~~~~~

Hatvani László: **Nem-autonóm másodrendű differenciálegyenletek**

A másodrendű differenciálegyenleteknek az ad jelentőséget, hogy ilyen egyenletek írják le a mechanikai rezgéseket. Ha a mechanikai paraméterek (pl. súrlódási együttható, rugalmassági együttható) függnek az időtől, akkor nem-atonóm rendszerről beszélünk. Az egyik klasszikus probléma: az egyenletben szereplő ilyen függvényekkel megfogalmazva mely feltételek biztosítják egyensúlyi helyzet stabilitását, aszimptotikus stabilitását, instabilitását? Például, a súrlódási együttható változásának milyen hatása van a stabilitásra? Külön érdekességgel bír a periodikus együtthatók esete (Hill-egyenlet), illetve a lépcsős függvények esete (Meissner-egyenlet).

~~~~~~

Karsai János: **Élettudományi modellek számítógéppel segített vizsgálata**

A differenciálegyenletek elméletének fejlődéséhez nagy lökést adott a számítógépes vizsgálatok lehetősége. Ez különösen igaz például az olyan bonyolult nemlineáris rendszerek esetén, amikor a folytonos változások mellett megjelennek pillanatnyi, impulzív hatások is. Az ilyen ún. impulzív rendszerek számos élettudmányi jelenség modelljei (például, impulzív oszcillátorok, vezérlések, fajok versengése, védőoltások). A formális vizsgálat elég nehéz, amit a számítógépes kísérletek megkönnyítenek. A helyzet még bonyolultabb, ha például fajok versengését időben és térben is vizsgáljuk. A versengés leírásának hatékony eszközei a szochasztikus sejtautomaták. Segítségükkel vizsgálható a mintázatok kialakulása, jól szimulálható a rendszer időbeli fejlődése. Bár a sejt-automaták jól definiált rendszerek, a nemlinearitás és a sztochasztikus jelleg miatt főként kísérleti eredmények várhatók. A fentiek a kísérletező matematika szerepének növekedését is jól mutatják. A téma során feladatok impulzív rendszerekkel illetve sejtautomatákkal leírható élettudományi jelenségek számítógéppel segített elméleti és kísérleti vizsgálata, számítógépes vizsgálati módszerek kidolgozása.

~~~~~~

Karsai János: **Impulzív rendszerek kvalitatív tulajdonságai**

A mindennapi tapasztalatok alapján megszoktuk, hogy a természetben lejátszódó folyamatok időben és térben folytonosan változnak. Gyakran előfordul azonban, hogy valamely hatás egészen rövid idő vagy akár egy pillanat alatt zajlik le. Ebben az utóbbi esetben impulzusról beszélünk. A bonyolult matematikai formalizmusok miatt a kísérleti vizsgálat kiemelten hasznos és informatív, és gyakran meggyőzőbb, mint a szigorú matematikai módszerek.
~~~~~~

Ehhez nagyteljesítményű számítógépes kapacitás és hatékony szoftverek szükségesek. Ezért a korszerű informatikai eszközök hiányában bizonyos matematikai problémák fel sem merülhettek, vagy, még ha fel is merültek, megoldásukra a számítógépek nélkül remény sem volt. A kutatás során feladat impulzív rendszerek számítógéppel segített vizsgálata, a vizsgálathoz szükséges számítógépes alkalmazások fejlesztése. A lehetséges területek közül kiemelendők a mechanikai rendszerekben, populációdinamikai és epidemiológiai problémákban, illetve az ismételt gyógyszeradagolás modelljeiben megjelenő impulzív rendszerek.

~~~~~~

Krisztin Tibor: **Nem-lineáris dinamikus rendszerek attraktorainak leírása**

Nem-lineáris dinamikus rendszerek széles osztályára létezik a fázistérnek olyan invariáns részhalmaza, amely vonzza környezetének a megoldásait. Ezen attraktorok jellemzése a teljes fáziskép megértését jelenti. Fontos alkalmazásokban előforduló, késleltetett visszacsatolást modellező funkcionál-differenciálegyenletek, neutrális funkcionál-differenciálegyenletek, állapotfüggő késleltetést tartalmazó egyenletek, differenciaegyenletek, időkésleltetést tartalmazó parciális differenciálegyenletek attraktorainak leírása a cél. A fontosabb eszközök: invariáns sokaságok, inerciális sokaságok, a redukció elve, Poincaré-leképezések, monodrómia operátor, Floquet-együtthatók, diszkrét Lajpunov-funkcionál, lokális és globális bifurkációk, fixponttechnikák, monoton dinamikai rendszerek.

~~~~~~

Krisztin Tibor: **Funkcionál-differenciálegyenletek stabilitáselmélete**

A különböző alkalmazások által motivált, időkésleltetést tartalmazó funkcionál-differenciálegyenletek vizsgálatában az egyensúlyi helyzetek vagy bonyolultabb invariáns halmazok stabilitása fontos probléma. A probléma nehézségét egyrészt a végtelen dimenziós fázistér okozza, másrészt a különböző típusú (végtelen retardálású, neutrális, állapotfüggő késleltetést tartalmazó, általánosított differenciaegyenletek, impulzust tartalmazó) egyenletek speciális módszereket igényelnek. Cél a stabilitás, instabilitás, aszimptotikus stabilitás, exponenciális stabilitás, hatványrend konvergencia bizonyítása. Az első sorban alkalmazott eszközök a Ljapunov-módszer és az invariancia-elv, valamint a végtelen dimenzióban fontos redukciós technikák (centrális sokaságok, normál-formák).

~~~~~~

Röst Gergely: **Nem-lineáris dinamika a matematikai epidemiológiában**

A napjainkban alkalmazott járványtani modellek egyre komplexebbé válnak. Késleltetett hatások figyelembe vétele funkcionál-differencialegyenletes modellekre vezet, sőt, állapotfüggő késleltetés is lehetséges (threshold-típusú egyenletek). Térbeli terjedést vizsgáló modellek parciális differenciálegyenletekre vezetnek. Az ilyen modellek vizsgalatához a végtelen dimenziós dinamikai rendszerek elméletének széles eszköztárát fel kell használni: stabilitás, bifurkációk, periodikus oszcillációk, invariáns sokaságok, permanencia. Ezek konkrét alkalmazásokban is megjelennek (influenza, SARS, tbc, gazda-parazita rendszerek, West Nile-virus stb.).
~~~~~~

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Röst Gergely: **Mathematical modeling of the spread of vector borne diseases**

Formulating mathematical models to describe the spatiotemporal patterns and the dynamics of the propagation of vector borne diseases. Modeling the transmission mechanism as well as the population dynamics of the host and vector species, including spatial dispersal and seasonality. Dyamics of adaptive host, vector and pathogen coevolution, modeling incubation periods with various distributions. Potential applications include West Nile virus, malaria, Lyme-disease, bluetongue disease etc.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Röst Gergely: **Epidemic spread on human transportation networks**

The global network of human transportation has been playing a paramount role in the spatial spread of infectious diseases. The high connectedness of distant territories by air travel makes it possible for a disease to rapidly invade geographically far regions. Mathematically describing the spread of infectious diseases on this network has critical importance. As several infectious diseases are known to be transmissible during flights, we need to incorporate this factor into our models. This leads to a new type of large time delay systems. The mathematical analysis of such systems is rather challenging and requires advanced mathematical tools such as functional differential equations, stability, asymptotically autonomous systems, spectral analysis of operator semigroups, bifurcations.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Geometria, kombnatorika és elméleti számítástudomány képzési program

Balogh József: **Extremális gráfelmélet és kombinatorika**

A modern kombinatorikában centrális kérdések közé tartozik, lokális megszorítások vajon milyen globális megszorításokhoz vezetnek. Klasszikus eredmény, Mantel tétele, hogy egy n pontú háromszögmentes gráfnak legfeljebb n^2/4 éle lehet. Ennek rengeteg általánosítása ismert, és rengeteg nyitott kérdés maradt, ami jelenleg is egy aktív kutatási terület.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Balogh József: **Véletlen kombinatorikus struktúrák**

Egy divatos kutatási terület annak vizsgálata, hogy a kombinatorika klasszikus eredményei milyen körülmények között maradnak igazak ha az alaphalmaz egy véletlen részhalmazán dolgozunk.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Csaba Béla: **Pakolási problémák**
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

A pakolási alapfeladat két gráf esetén annak eldöntése, egy H gráf részgráfja-e egy G gráfnak. Ez a gráfelmélet egy központi, nagyon aktívan kutatott kérdésköre. A pakolási problémáknak sok alkalmazása van kombinatorikában, geometriában, számítástudományban, de a matematika egyéb területein is. A fenti tartalmazási kérdés sokszor NP-teljes probléma. Ez azt jelenti, hogy általában elégséges feltételt keresünk, mely biztosítja a tartalmazást. Így extremális gráfelméleti kérdésekhez jutunk. Különösen fontos fák, korlátos fokú részgráfok keresése sűrű vagy véletlen gráfokban, melyekre valamilyen strukturális kikötést teszünk fel. A cél a fenti típusú problémák vizsgálata, konkrét problémák megoldása és ha szükséges új, általános módszerek kifejlesztése is.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Csendes Tibor: **Új, korszerű programozási struktúrák a megbízható optimalizálásban**

A tervezett kutatás célja az utóbbi években létrejött új algoritmikus eszközök hasznosíthatóságának tisztázása a megbízható optimalizálás területén. Ezen új paradigmák a DAG (directed acyclic graph) reprezentációja és alkotó használata a befoglaló függvények pontos meghatározásában, a DAG mentén való feltétel-kezelés (constraint propagation), a deriváltak automatikus előállítása, slope befoglalások, és a bizonytalanság leírására szolgáló "cloud" modell. Ide tartozik ezek hatékony együttes használati lehetőségei tisztázása is.
A jelentkező feladata olyan hatékony adatszerkezet kialakítása, amely a fent említett eszközöket kényelmesen de hatékonyan engedi alkalmazni (operátor túltöltés, új adattípusok stb.). A munka alapját megteremti a Bécsi Egyetemmel folytatott közös kutatás, illetve az általuk már kidolgozott eszköztár és módszertan is. A kutatás mind számítógépes tesztelést, algoritmus fejlesztést, mind az új eljárások elméleti vizsgálatát célozza.
A szakirodalom ez esetben is angolul érhető el többségében. Az egyik fő olvasmány a
- H. Schichl and A. Neumaier, Interval Analysis on Directed Acyclic Graphs for Global Optimization, J. Global Optimization 33 (2005), 541-562: {http://www.mat.univie.ac.at/~neum/ms/dag.pdf}
- A. Neumaier, Clouds, fuzzy sets and probability intervals, Reliable Computing 10 (2004), 249-272: { http://www.mat.univie.ac.at/~neum/ms/cloud.pdf}
illetve a Coconut projekt honlapja: {http://www.mat.univie.ac.at/users/neum/public_html/glopt/coconut/}
általános alapozásként ismét a korábbi két fontos könyv:
- Bazara, M.S., H.N. Sherali and C.M. Shetty: Nonlinear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1993
- Horst, R. and P.M. Pardalos (eds.): Handbook of Global Optimization. Kluwer, Dordrecht, 1995

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Csendes Tibor: **Sztochasztikus globális optimalizálási módszer továbbfejlesztése**

A feladat a GLOBAL nevű sztochasztikus globális optimalizálási eljárás továbbfejlesztése a következő irányok mentén:
- Növelni kell a megoldható feladatok dimenzióját. Ennek során nem csak a mechanikusan végrehajtható változásokra kell figyelni, hanem az algoritmus lényegi, belső szerkezetét is megfelelően át kell alakítani. A feladat része a dimenziószám növelése korlátainak meghatározása, kimerítő numerikus tesztelés és korrektség-vizsgálat is.

- Külön feladat a meglevő Matlab implementációk tesztelése standard és azon túl mutató tesztfeladat halmazon, valamint a hatékonyság növekedésének alapos dokumentálása.
- A feladat része a létrejött algoritmus ún. optimalizáló szerver formába öntése, tehát a hálózaton keresztül beérkező feladatok megoldására és a megfelelő jelentés írására való alkalmassá tétel.
- Önálló részfeladat a meglevő beépített helyi kereső eljárások összevetése, és cseréje a jelenleg hozzáférhető korszerűbb alternatívákkal.
- Meg kell teremteni a megfelelő interfészeket a szokásos modellezési rendszerekhez AMPL, GAMMS etc.
- Fontos a kapcsolódó elméleti vizsgálatok végrehajtása, amelyek a módosított algoritmus helyességét, és hatékonyságát jellemzik.
A program elérhető a http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/reg/regform.php címen, az algoritmus leírása pedig a http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/actacyb.pdf néven. A szakirodalom döntő részben angol nyelven érhető el, de több tárgy segíti majd a felkészülést. Az előzmények között két fontos könyvet említek:
- Bazara, M.S., H.N. Sherali and C.M. Shetty: Nonlinear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1993
- Horst, R.and P.M. Pardalos (eds.): Handbook of Global Optimization. Kluwer, Dordrecht, 1995

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Csendes Tibor: **Nemlineáris optimalizálási feladatok automatikus egyszerűsítése szimbolikus eszközökkel**

Gyakori eset az, amikor egy bonyolultnak és nehezen megoldhatónak tűnő nemlineáris optimalizálási feladat valójában egyszerűsíthető, és ráadásul ez az átalakítás automatikus módon, számítógépes programmal is megadható. A megvalósítás számos részletkérdése tisztázásra vár ugyan még, de az elméleti vizsgálatokkal alátámasztott eljárás képes a lényegesen eltérő helyi minimumpontok azonosítására, és az átalakított feladatra kapott megoldás visszaalakítására is.
A feladat hatásos és hatékony implementációt adni, tesztelni ezt standard globális optimalizálási tesztproblémákon és gyakorlati alkalmazásban is. Jellemezni kell a használhatóság korlátait és számítási költségét.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Csirik János: **Tanulási módszerek az információ kinyerésében**

Az információ kinyerésének vizsgálata az elméleti számítástudomány szempontjából. Az információ kinyerésének célja folyó szövegből (strukturálatlan információ) a releváns információ megtalálása. Ilyen információ lehet egyed azonosítása (pl. személyek, szervezetek stb), köztük fennálló relációk detektálása illetve események kinyerése. A problémát a gépi tanulási technikák széles spektrumának felhasználásával közelítjük meg. Számos alkalmazott információ kinyerési problémával kerülünk szembe, mint például a gazdasági események szereplőinek azonosítása (magyar és angol nyelvű szövegekben), orvosi zárójelentések anonimizációja, biológiai publikációk elemzése, vagy automatikus orvosi kódolás (BNO).

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Dombi József: **Lukasiewicz-típusú logikai operátorok vizsgálata**

A Lukasiewicz-típusú operátorokat a rendezett algebrai félcsoportokra vonatkozó reprezentációs tétel alapján nyerhetjük. Az ilyen műveletek logikai szempontból nagyon jó tulajdonságúak. Létezik az ellentmondás és a kizárt harmadik törvénye. Az implikáció eleget tesz az azonosság elvének. A kiterjesztett és a reziduális implikáció megegyezik. Fontos és hasznos lenne az ilyen logikák tulajdonságainak teljes feltárása. De-Morgan azonosság, az ellentmondás és a kizárt harmadik törvénye negációval megfogalmazottak. Megvizsgálandó, hogy a negációra milyen megfontolások érvényesek. Lehetséges-e, hogy több vagy akár végtelen sok negációesetén is érvényesek a fenti azonosságok? Alkalmazás szempontjából neurális hálózatok csomópontjainak választva a műveleteket hatékony tanulóalgoritmusok lennének kivitelezhetőek. A folytonosan differenciálható approximáció megvalósításával gyakorlati alkalmazások hatékonyan valósíthatók meg.
Kutatási célok:
• Lukasiewicz-típusú operátorok tulajdonságainak vizsgálata.
• Logikai rendszerben való következtetések meghatározása.
• Lukasiewicz-típusú operátorok approximációja analitikus függvények segítségével.
• Neurális hálókba való alkalmazás kidolgozása.
Irodalom:
• Fuchs László: Note on fully ordered semigroups
• Aczél János: Lectures on Functional Equations and Applications
• E.P.Klement, R. Mesiar, E. Pap: Triangular norms
• D. Dubois, H. Prade: Fundamentals of fuzzy sets

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Dombi József: **A fuzzy irányítás modelljeinek vizsgálata, új eljárás készítése egyenlőtlenségek szigmoid függvénnyel való modellezésével**

A fuzzy irányítás egyike a folytonos logikák legsikeresebb alkalmazásának. A kialakított modellek heurisztikusan megalapozottak (Tagaki-Sugeno, Mamdani, stb.). Az alkalmazások korlátja a változók függvényében a szabályok exponenciális növekedése. E hátrány interpolációs technika alkalmazásával csökkenthető (Kóczi). A kutatási feladat a halmazhoztartozási függvények, operátorok és a defuzzifikációs eljárások módosítása analitikusan jó tulajdonságú függvények alkalmazásával.
Irodalom:
• H.T. Nguyen, M. Sugeno: Fuzzy Systems Modeling and Control
• D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank: An Introduction to Fuzzy Control
• H. Hellendoorn: Reasoning with Fuzzy Logic

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Dombi József: **Folytonos logikák operátorainak alkalmazása a képfeldolgozás, alakfelismerés**

A képfeldolgozás területén sok módszer ismeretes, ezeknek egyik része statisztikai eljárásokon, másik részük pedig mérnöki számításokon alapul. A folytonos logikák utóbbi években való előre törése lehetővé teszi, hogy ugyanezen feladatokat más algoritmus koncepció alapján vizsgáljuk. Ez lehetőséget ad arra is, hogy az itt alkalmazott tanuló algoritmusok is hatékonyabban és elméletileg megalapozottabban tárgyaljuk.

~~~~~~

Dombi József: **Fuzzy modellek és algoritmusok alkalmazása a tanulás területén**

A feladat során a cél az, hogy a döntési fák, az egyosztályos tanulás és a klaszter tartományok leírásának segítségével, hatékony tanuló algoritmus kerüljön kifejlesztésre. Ezen az algoritmusokat az egyenlőtlenség rendszerek feletti logika segítségével egységesen kezelhetők a fuzzy koncepció segítségével. A hallgató feladata a klasszikus algoritmusok megismerése, a fuzzy logika alkalmazása, az új algoritmusok hatékonyság, hiba és robosztusság vizsgálatának kutatása.

~~~~~~

Fodor Ferenc: **Sztochasztikus geometria**

A kutatási téma leírása: A sztochasztikus geometria véletlen geometriai struktúrák vizsgálatával foglalkozik. Ebben a kutatási témában elsősorban véletlen politópok olyan tulajdonságait vizsgáljuk, mint például térfogatuk, felszínük és más kevert térfogataik várható értéke, szórása, illetve ezekre a nagy számok törvényei és centrális határeloszlás tételek.

~~~~~~

Fodor Ferenc: **Diszkrét és analitikus konvex geometria**

Az analitikus konvex geometria olyan témaköröket fog össze a konvex testek elméletében, amiket analitikus módszerekkel lehet megközelíteni. Ilyen például a konvex testek alapmértékeivel, illetve vegyes térfogatokkal kapcsolatos problémák nagy része, konvex testek affin alterekkel való metszeteivel és ezekre való projekcióival kapcsolatos kérdések egy része. A témakör tartalmaz integrálgeometriai módszereket és vannak random vonatkozásai is.
Az elhelyezések és fedések elmélete, illetve a geometriai transzverzálisok elmélete két olyan témakör, amelyekben az analitikus és diszkrét geometria találkozik és ebből több fontos kutatási probléma ered.

~~~~~~

Fülöp Zoltán: **Szimbolikus faautomaták és fatranszformátorok**

A klasszikus faautomaták és fatranszformátorok [3-5] egyik legújabb általánosítása a hálózati adatbiztonsággal kapcsolatos [1-2]. Az általánosítás abban áll, hogy szimbolikus címkék alkalmazásával végtelen ábécé feletti fákat kezelünk. A címkék predikátumok, melyek egy Boole algebra elemeiből kerülnek ki. A szimbolikus faautomatákra vonatkozóan csak néhány zártsági és eldönthetőségi eredmény ismert, míg a szimbolikus fatranszformátorok jóformán teljesen ismeretlen terület. Ígéretesnek tűnik a szimbolikus felismerhető erdőkre vonatkozó Kleene és Büchi-Elgot tételek kidolgozása, illetve a szimbolikus fatranszformátorok kompozíciós és regularitás megőrző tulajdonságainak felderítése. Ugyancsak ígéretes kutatási téma a súlyozott szimbolikus faautomaták vizsgálata. A meghirdetett tématerv egy fő olyan hallgatónak szól, aki érdeklődik az elméleti számítástudomány iránt és szívesen végezne kutatómunkát a témában.

[1] M. Veanes and N. Bjorner, Foundations of Finite Symbolic Tree Transducers, Buletin of EATCS, 105 (2011) 141-173.
[2] M. Veanes and N. Bjorner, Symbolic tree transducers, In. Proc. of Perspectives of System Informatics (PSI 11), LNCS., Vol. 7162, p. 371-387, Sringer-Verlag, 2011.
[3] Z. Fülöp and H. Vogler. Syntax-directed semantics --- Formal Models Based on Tree Transducers. Monogr. Theoret. Comput. Sci. EATCS Ser. Springer-Verlag, 1998.
[4] F. Gécseg and M. Steinby. Tree Automata. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.
[5] F. Gécseg and M. Steinby. Tree languages. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, Handbook of Formal Languages, volume 3, chapter 1, pages 1--68. Springer-Verlag, 1997.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Fülöp Zoltán: **Súlyozott faautomaták és fatranszformátorok**

Közismert, hogy a ma már klasszikusnak mondható faautomaták és fatranszformátorok [6,8,9] általánosíthatók félgyűrük feletti ún. súlyozott faautomatákká és fatranszformátorokká. Az általánosítás során a fanyelv egy olyan leképezés lesz, amely a fák halmazát egy S félgyűrűbe képezi le. Ezáltal a félgyűrű elemei adják a fák súlyait. Az ilyen leképezéseket S feletti fasoroknak nevezzük. Hasonlóan, a fatranszformációnak egy olyan leképezés felel meg, amely a fákból S feletti fasorokba képez le. Mára mind a súlyozott faautomatáknak, mind a súlyozott fatranszformátoroknak komoly irodalma van, lásd a [5,7] összefoglalókat. Ugyanakkor aktív kutatás is folyik, melynek egyik fő fóruma a két évente megrendezésre kerülő Weighted Automata: Theory and Applications workshop sorozat.
Számos nyitott probléma és kutatásra alkalmas feladat maradt még ezen a területen. Ilyenek például a súlyozott fatranszformátorokra vonatkozó eldönthetőségi eredmények keresése, melyek alapjául a súlyozott faautomatákra vonatkozó [2] és [10] pozitív eldönthetőségi eredmények szolgálhatnak. Teljesen feldolgozatlan még a manapság intenzíven tanulmányozott fabejáró automaták [1,3,4] általánosítása súlyozott fabejáró automatákká.
A meghirdetett tématerv egy fő olyan hallgatónak szól, aki érdeklődik az elméleti számítástudomány iránt és szívesen végezne kutatómunkát ezen a területen.
Irodalom:
[1] A. V. Aho and J. D. Ullman, Translations on a context--free grammar, Inform. Control, 19 (1971) 439-475.
[2] S. Bozapalidis. Positive tree representations and applications to tree automata. Inform. and Control, 139(2):130--153, 1997.
[3] J. Engelfriet, H. J. Hoogeboom and J.-P. Van Best, Trips on Trees, Acta Cybernet., 14 (1999) 51-64.
[4] J. Engelfriet, G. Rozenberg and G. Slutzki, Tree transducers, {L} systems, and two--way machines, J. Comput. System Sci., 20 (1980) 150-202.
[5] Z. Ésik and W. Kuich. Formal tree series. J. Autom. Lang. Comb., 8(2):219--285, 2003.
[6] Z. Fülöp and H. Vogler. Syntax-directed semantics --- Formal Models Based on Tree Transducers. Monogr. Theoret. Comput. Sci. EATCS Ser. Springer-Verlag, 1998.
[7] Z. Fülöp and H. Vogler. Weighted Tree Automata and weighted Tree transducers. in: Handbook of Weighted Automata (Eds. M. Droste, W. Kuich, and H. Vogler). Springer-Verlag, 2009.
[8] F. Gécseg and M. Steinby. Tree Automata. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.
[9] F. Gécseg and M. Steinby. Tree languages. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, Handbook of Formal Languages, volume 3, chapter 1, pages 1--68. Springer-Verlag, 1997.
[10] H. Seidl. Deciding equivalence of finite tree automata. SIAM J. Comput., 19(3):424--437, 1990.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

~~~~~~

Gévay Gábor: **Politopális és nem-politopális celluláris gömbök**

Karakterizálandó azon kombinatorikus komplexusok osztálya, amelyek egy konvex politóp határoló komplexusával izomorfak. Ez a nevezetes Steinitz-probléma, amelynek három dimenzióban 1922 óta ismerjük a megoldását, magasabb dimenzióban azonban mind a mai napig nyitott. Az utóbbi néhány évben előtérbe került olyan celluláris gömbök vizsgálata, amelyek nem, vagy csak bizonyos feltételek mellett politopálisak (mint a fenti, igen nehéznek bizonyult probléma egyik megközelítése). Ilyen struktúrák konstrukciójára részint klasszikus (mint pl. a Wythoff-konstrukció), részint új módszereket (mint pl. a Günter Ziegler és munkatársai által bevezetett E-konstrukció) kell kombinálnunk; azonban mind a konstrukcióra, mind pedig a politopalitás eldöntésére alkalmas újabb módszerek fontosak és érdekesek lehetnek.

~~~~~~

Gévay Gábor: **Perfekt politópok konstrukciója és vizsgálata**

A perfekt politópok fogalmát a szabályos politópok általánosításaként Stewart Robertson vezette be 1984-ben. Eleinte úgy tűnt, hogy ezek - miként a szabályos politópok - előállíthatók Wythoff-konstrukcióval. Néhány éve tisztázódott, hogy már négy dimenzióban is fellépnek nem-Wythoff perfekt politóposztályok; sőt, egészen friss eredmények szerint ilyenek tetszőleges magasabb dimenzióban is előfordulnak. Ezek a politópok többféle kombinatorikus és metrikus geometriai kontextusban is érdekessé váltak; így nemcsak klasszifikációjuk, hanem újabb osztályaik tényleges konstrukciója, leírása és vizsgálata is fontos probléma (az osztályozás mindössze két és három dimenzióban megoldott).

~~~~~~

Hajnal Péter: **Kombinatorikus és geometriai struktúrák extremális kérdései**

Gráfok, véges geometriák, véges ponthalmazok, halmazrendszerek extremális kérdéseivel kapcsolatos vizsgálatok.

~~~~~~

Hajnal Péter: **Kombinatorikus bonyolultságelmélet**

A bonyolultságelmélet kombinatorikus modelljeivel kapcsolatos kérdések vizsgálata. Döntési fák. Kommunikációs bonyolultság. Formulák és hálózatok. Determinisztikus és véletlen számítási bonyolultságok viszonya.

~~~~~~

Imreh Csanád: **Online erőforrás allokációs problémák**

Online problémának nevezzük azokat a feladatokat, amelyekben a probléma inputját csak részenként ismerjük meg és a döntéseket mindig csak a már megismert információk alapján
~~~~~~

kell meghoznunk. Számos ilyen probléma merül fel az operációkutatás és az elméleti számítástudomány különböző területein. Az erőforrás allokációs problémák többnyire az ütemezés és a ládapakolás témaköréhez tartoznak, de néhány új, a számítógépes hálózatok témaköréhez tartozó modell is ismert. Az on-line algoritmusok elemzésének legismertebb módszere a versenyképességi analízis (amely során korlátokat adunk az optimális off-line és az on-line algoritmus által kapott megoldások célfüggvényértékeinek hányadosára), a kifejlesztett algoritmusokat ezzel a módszerrel tervezzük elemezni. Az ütemezés témakörében a kutatás főleg olyan modellek vizsgálatát tartalmazza, ahol az ütemezésen kívül az algoritmusnak egyéb döntéseket is meg kell hoznia (munkák visszautasítása, gépek vásárlása). A pakolási problémák területén olyan modellek vizsgálata a kutatások tárgya, amelyekben az egyes ládák tartalmára extra feltételek is elő vannak írva.
Előzmények rövid összefoglalása: Az on-line algoritmusok elemzésére a versenyképességi elemzés az 1980-as évek végére terjedt el. Az elemzési módszer számos, ma már klasszikus alkalmazása mind az ütemezés mind pedig a ládapakolási problémák területéhez kapcsolódóan megtalálható a [1] könyvben és a [2] könyvfejezetben. A kiírt témán belül mind a gépköltséges mind pedig a visszautasításos ütemezési modellben több eredmény született. A visszautasításos modellre vonatkozó eredmények összefoglalása megtalálható a [3] cikkben, amely dolgozat egy olyan ütemezési modellt vizsgál, amely a visszautasításos modell egy általánosításaként interpretálható. A visszautasításos modell mellett a gépvásárlásos modellre vonatkozó eredmények összefoglalása pedig a [4] cikkben található meg, amely cikk azt az ütemezési modellt vizsgálja, ahol mind a munkák visszautasítása mind pedig a gépek vásárlása megengedett. A ládapakolási problémák összefoglalása megtalálható az [5] cikkben. A leggyakrabban használt megszorítás az, hogy korlátozzuk az egy ládába pakolható elemek számát. A kapcsolódó eredmények megtalálhatóak az [6] cikkben.

[1] A. Borodin, R. El-Yaniv, Online Computation and Competitive Analysis, Cambridge University Press, 1998.
[2] Imreh Cs., Versenyképességi elemzés, Informatikai Algoritmusok II, szerk. Iványi A., ELTE Eötvös Kiadó, 2005, 1350--1383.
[3] Cs. Imreh, Scheduling problems on two sets of identical machines, Computing, 70, (2003), 277--294.
[4] J. Nagy-György, Cs. Imreh, On-line scheduling with machine cost and rejection, közlésre benyújtva, (http://www.inf.u-szeged.hu/~cimreh /F047587t2.pdf)
[5] J. Csirik, G. Woeginger, On line packing and covering problems, in Online algorithms: The State of the Art (LNCS 1442) szerk. A. Fiat, and G. J. Woeginger, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1998, 147—177.
[6] L. Epstein, On-line bin packing with cardinality constraints, Proceedings of ESA 2005, (LNCS 3669), 604-615

~~~~~~

Imreh Csanád: **Online algoritmusok versenyképességi elemzése**

Online problémának nevezzük azokat a feladatokat, amelyekben a probléma inputját csak részenként ismerjük meg és a döntéseket mindig csak a már megismert információk alapján kell meghoznunk. Az on-line algoritmusok elemzésének legismertebb módszere a versenyképességi analízis (amely során korlátokat kell bizonyítani az optimális off-line és az on-line algoritmus által kapott megoldások célfüggvényértékeinek hányadosára). A téma online algoritmusok fejlesztéséről és versenyképességi elemzéséről szól, elsősorban az ütemezés és pakolási problémák részterületén.
~~~~~~

~~~~~~

Imreh Csanád: **Szállítmánytervezési algoritmusok**

Az egyik legfontosabb probléma a logisztika területén az a kérdés, hogy adott szállítóeszközök segítségével, adott árukat miként tudunk optimálisan szállítani. A kérdés tanulmányozására számos modellt dolgoztak ki, az operációkutatás egy sokak által tanulmányozott területe (vehicle routing) ilyen problémákkal foglalkozik. A részletesen vizsgált modellek többségében nem foglalkoznak az egyes járművek rakodásával (ha korlátokat vesznek figyelembe az többnyire csak kapacitáskorlát), főleg az optimális útvonalak meghatározása a cél. Csak az utóbbi években kezdtek el olyan modelleket vizsgálni, ahol a kamionok megrakodását is figyelembe veszik. A felmerülő problémák az eddig használt modellek általánosításai, és további érdekes kérdésekhez vezetnek az operációkutatás más területein is (pl. ládapakolás).
A kutatási terület fontosságát alátámasztja, hogy a "Vagyontárgyforgalom biztonsági követelményeket teljesítő on-line optimalizálása" című FKFP projekt, amelynek a témavezető kutatóként résztvevője volt, jelentős részben ilyen jellegű problémák kutatását támogatta.
Megoldandó feladatok
A doktorandusz hallgató kutatási témája a fentiekben megfogalmazott részterület. A témához elsősorban azon modellek vizsgálata tartozik, amely a szállítóeszközök kapacitására, és megrakodására vonatkozó korlátokat is figyelembe veszik. A kutatás során megoldandó részfeladatok:
- a szakirodalomban használt modellek kiterjesztése, általánosítása.
- egzakt megoldó, heurisztikus, és ahol lehetséges ott approximációs algoritmusok fejlesztése.
- a kifejlesztett algoritmusok elemzése.

~~~~~~

Kató Zoltán: **Efficient Markov Chain Monte Carlo Samplers for Bayesian Image**

Many image processing tasks can be formulated in a probabilistic framework. In particular, the Bayesian approach provides a powerful and generic modeling tool for a wide range of inverse problems in image analysis. In this context, we are given a set of observed image properties (like the color of pixels) and from these observations, we want to infer some higher level properties of the image (like a segmentation, 3D depth, etc..) that are hidden. Such an inverse problem can then be treated as a probabilistic inference of the hidden entities from the observations. Once a probabilistic model is constructed, we are given an optimization problem where one has to find the most likely settings of the hidden variables. However, due to the high complexity of the underlying probability measure, gradient-based optimization techniques cannot be applied. Therefore such problems are often solved using Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods. Although the general theory and methodology of these algorithms are fairly standard, they have their limitations in case of image processing problems (dependence of neighboring pixels or varying dimension of model parameters, to name a few). Hence the construction of such samplers, possibly tailored to a particular probabilistic image model, remains a challenge.
Specific aims of the proposed work
- Study a novel probabilistic image model
- Develop an MCMC method which can generate samples from the image model. This sampler will be used to solve the optimization problem.
- Analyze the convergence properties of the algorithm.

- Apply the algorithm to a practical problem, such as automatic segmentation of images, or automatic detection of objects represented by a template shape.

~~~~~~

Kató Zoltán: **Segmentation of 3D Structures in Volume Images Using Higher Order Active Contours**

When human observers are interpreting images, they are not only taking into account direct observations like color or intensity, but also a priori knowledge about the world. However, such a complex, interacting method is rarely used in image processing systems. Most of the algorithms are bottom-up: they try to extract some useful information (basically a segmentation) solely from the observed image data and then the segmentation is interpreted. Obviously, image data alone cannot provide reliable information. Hence the use of higher level knowledge, in the form of shape priors, received more attention in the past few years. The dominating approach adopts a variational or level set framework where the segmentation criteria is summarized in an energy functional which takes its minimum at the desired segmentation of the input image. Previous work concentrated on foreground - background segmentation with a data model relying on image gradient and with template-like shape priors where the actual contour is matched to a reference shape and high deviations were penalized. However, handling of more than one, possibly different objects in a scene remains a challenge as well as the use of more elaborated data models, especially in the area of volume image processing. Here we propose to extend the idea of Higher Order Active Contours (HOAC) for 3D volume image segmentation. In a HOAC model basic geometrical constraints are modeled by quadratic energy functionals in a level set framework. The method has been successfully applied to road extraction from satellite images using a prior which favors network-like objects as well as to tree crown extraction using a "gas of circles" prior.
Specific aims of the proposed work
1. Studying the possible 3D generalizations of the HOAC model.
2. Stability analysis of the 3D model which constraints the possible parameter settings for a given 3D shape prior.
3. Development of efficient data likelihood models and their integration into the 3D HOAC framework.
4. The proposed solution will have applications to problems of interest in a wide range of areas, such as automatic segmentation of medical images, analysis of nanostructures in electron-microscopic images, or trajectory detection in temporal volume images (i.e. video sequences).
Collaboration: The proposed research is closely related to our collaboration with the ARIANA research group at INRIA, Sophia Antipolis, France.

~~~~~~

Kató Zoltán: **Estimation of Multi-Dimensional Homeomorphisms for Automated Image Registration**

Automated image registration is required whenever information obtained from different views of an object needs to be combined or compared. Given two images, one is looking for a transformation, such that one transformed image becomes similar to the second image. While an extensive amount of work has been done on this problem the fundamental question of how to reliably and efficiently estimate the transformation relating two images remains largely

unsolved. Here we propose an approach aimed at solving directly this fundamental problem by modeling the transformation as a general continuous 2D mapping approximated by a parametric model. We then propose a method for estimating the parameters of the transformation in a computationally efficient manner involving a linear estimation problem rather than an extensive search! Once the transformation (or its inverse) has been estimated we proceed to map one image onto the other, i.e., to perform image registration.
Specific aims of the proposed work
- Studying a general parametric mathematical model for characterizing the class of deformations/transformations between the images that need to be registered.
- Developing computationally efficient linear techniques for estimating the transformation parameters from the given images. This is a very challenging problem, due to the inherent nonlinear nature of the problem. Existing methods are computationally intensive since they require the solution of non-convex minimization problems.
- Developing performance bounds on the accuracy with which image registration can be performed. This can be done in a natural way within our framework.
- The proposed solution will have applications to problems of interest in a wide range of areas, such as in automatic detection and recognition of deformations and anomalies in medical images; in security systems where claimed identity has to be verified by comparing an acquired image of a person or object to an existing database; in object based low bit rate image coding: most of the information on the moving objects in the scene can be faithfully described and tracked as a set of continuous transformations applied to a small set of templates providing the object appearance from various observation angles; or in remote sensing image registration where the problem becomes especially severe when images are taken at low angles and are therefore highly deformed by the perspective projection. The proposed algorithms will be applied to one of these key application areas.
Collaboration: The proposed research is closely related to our collaboration with the group of Prof. Joseph Francos at Electrical and Computer Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, Israel.

~~~~~~

Kiss György: **Véges síkok szemioválisai**

Véges projektív síkon a szemiovális olyan S nemüres ponthalmaz, melynek minden P pontjában egyértelműen létezik érintő egyenese, azaz olyan t_P egyenes, melyre S-nek és t_P-nek a metszete {P}. A szemioválisok tanulmányozását kriptográfiai alkalmazásuk motiválja. A tipikus példák polaritások autokonjugált pontjaiból, valamint minimális lefogó ponthalmazokból származnak. A szemioválisokkal kapcsolatban sok nyitott kérdés van, ezek közül néhány: Igaz-e, hogy ha egy szemioválisnak több mint q+1 pontja van, akkor legalább 3(q-1)/2 pontú? Lehet-e karakterizálni azokat a szemioválisokat, melyeknek az egyenesekre nézve kevés metszési számuk van? Milyen ciklikus szemioválisok léteznek?

~~~~~~

Kurusa Árpád: **Geometriai tomográfia**

A klasszikus és modern integrálgeometria, a konvex geometria, és az integráltranszformációk alkalmazásával vizsgáljuk geometriai objektumok (vagy azok függvényeinek és tulajdonságainak) meghatározhatóságát ezen objektumok különféle megfigyeléseit reprezentáló (többnyire integrálokként megjelenő) függvényekből. Legfontosabb példa a konvex síktartományok meghatározása néhány Steiner-szimmetrizáltjukból (Hammer-probléma), konvex testek meghatározása árnyékképei területéből (Aleksandrov-tétel), de ide tartozik a görbék meghatározása az egyenesekkel vett metszés-számaikból (Steinhaus-probléma), és mindezek különféle általánosításai.

~~~~~~

Kurusa Árpád: **Modern integrálgeometria**

A klasszikus integrálgeometria, a differenciálgeometria, a harmonikus analízis és az integráltranszformációk alkalmazásával vizsgáljuk függvények (vagy azok tulajdonságainak) meghatározhatóságát geometriai objektumok családjának elemein vett integráljai alapján. Legfontosabb példa a síkfüggvények meghatározása az egyeneseken vett integráljaikból (klasszikus Radon-transzformáció) és ennek általánosításai súlyokkal, az egyenesek helyett más geometriai objektumcsaládokkal és olyan általános geometriai tereken mint például a kétponthomogén Riemann-sokaságok. Ide tartozik a Pompeiu-probléma is, a sejtés az, hogy a körlaptól eltekintve minden síkidomra lehetséges bármely függvénynek a meghatározása pusztán a függvénynek a síkidom izometrikus képein vett integráljaiból.

~~~~~~

Kurusa Árpád: **Metrizált projektív terek**

A projektív sík összes folytonos metrizálásának integrálgeometriai konstrukciójából kiindulva ezen metrikus projektív geometriák osztályozása a metrikákra szabott különféle feltételek szerint, illetve ezen metrizált projektív tereken a modern integrálgeometria alapkérdéseinek vizsgálata. A kérdéskör eredete Hilbert IV-edik problémája az előző századfordulóról.

~~~~~~

Nagy Gábor Péter: **Geometriai algebra**

Geometriai struktúrák koordinátázása, axiomatizálás, a geometria megalapozása. Csoportok, testek és ezek nem-asszociatív általánosításai. Szövetgeometria. Differenciálalgebra. Transzformációcsoportok, a klasszikus csoportok geometriája. Véges geometriák vizsgálata csoportelméleti és kombinatorikai módszerekkel. A sporadikus csoportok geometriája.

~~~~~~

Nagy-György Judit: **Online algoritmusok elemzése**

Az online algoritmusok témaköre mostanában sokat kutatott terület. A megközelítés - hogy nem ismerhetjük előre a jövőt, amikor döntést kell hoznunk - a való élethez közelebb viszi a modellt. Az algoritmusok versenyképességének elemzése az optimális megoldással való összevetés, erre általában alsó és felső korlátokat szokás adni. A meghirdetett téma tetszőlegesem választott kombinatorikai probléma (determinisztikus és véletlen) online változatának (illetve módosított modelljeinek) vizsgálata, a versenyképesség elemzésével, esetlegesen az advice complexity vizsgálatával.

~~~~~~
~~~~~~

Pluhár András: **Extremális és algoritmikus gráfelméleti problémák**

A gráfok intervallumokkal reprezentálhatósága számos nyitott problémát rejt (csak részleges eredmények vannak az összehasonlítási gráfok vagy a sűrű gráfok intervallumszámára). Hasonlóan megoldatlanok a síkgráfok partícionálásának algoritmikus vonatkozásai, hogyan használhatók az ún. jól szeparált fa partíciók jó néhány kérdése. A jó reprezentációk utat nyithatnak a sávszélesség ill. a kromatikus szám további vizsgálatához (speciális gráfok sávszélessége, gráfokon értelmezett játékok, a P_k-mentesség és 3-színezhetőség kapcsolata stb.)

~~~~~~

Sztochasztika képzési program

Kevei Péter: **Elágazó folyamatok aszimptotikája**

Az elágazó folyamatok olyan populációkat modelleznek, melyben az egyedek élethossza, utódainak száma egymástól független. A klasszikus Galton-Watson folyamat 1873-as megszületése óta az elmélet folyamatosan fejlõdik, így egyre összetettebb rendszerek leírására alkalmas. Az elágazó folyamatok vizsgálata során a generátorfüggvényektõl a sztochasztikus differenciálegyenletekig a valószínûségelmélet legtöbb fontos témaköre elõkerül.

~~~~~~

Pap Gyula: **Elágazó folyamatok**

Diszkrét és folytonos idejű, diszkrét és folytonos állapoterű elágazó folyamatoknak a vizsgálata. Statisztikai elemzés: paraméterbecslés különböző módszerekkel, továbbá a becslések aszimptotikájának megállapítása. Többtípusos populációk. Közelítés diffúziós folyamatokkal. Szubkritikus, kritikus, valamint szuperkritikus modellek vizsgálata. Elágazó folyamatok alkalmazása.

~~~~~~

Stéhlikné Boda Krisztina: **Orvosi döntéseket támogató biostatisztikai módszerek**

A biostatisztika a matematikai statisztika alkalmazása biológiai, orvosi kísérletekből, mérésekből származó adatokra. Nagyon sok biostatisztikai probléma oldható meg általános lineáris modellekkel. E módszerek pl. az egyszerű t-próbák, regressziók általánosításai. Az orvosi döntéseket támogatásában jól alkalmazhatók azok a többváltozós módszerek, amelyek adott betegség rizikófaktorait vizsgálják, vagy adott tünetek alapján következtetnek adott betegségek közül a közül a legvalószínűbbre. Speciális statisztikai szoftverek állnak rendelkezésre e feladatok végrehajtására. Feladat e módszerek tanulmányozása, összehasonlítása, működésük bemutatása valós vagy szimulált adatbázison.

~~~~~~

Timár Ádám: **Valószínűségszámítás gráfokon**

Véletlen bolyongás és harmonikus függvények gráfokon. Bernoulli perkoláció tranzitív gráfokon. A végtelen komponensek száma és tulajdonságai. Szubkritikus és szuperkritikus perkoláció. Kritikus perkoláció, kritikus exponensek. Uniform és minimális feszítőerdők, Ising és Fortuin-Kasteleyn véletlen fürt modell, Gibbs mértékek és fázisátmenetek. Véges gráfok sorozatainak Benjamini-Schramm konvergenciája, unimoduláris véletlen gráfok, i.i.d. faktorok, tesztelhető gráfparaméterek és gráftulajdonságok.

Irodalom:

L. Lovász: Large networks and graph limits, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012.

R. Lyons, Y. Peres: Probability on Trees and Networks, book under preparation, 2013.

G. Grimmett: Probability on graphs, Cambridge University Press, 2010.

G. Pete: Probability and Geometry on Groups, lecture notes, 2012

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Matematikadidaktikai (vagy matematikadidaktikai vonatkozásokat is tartalmazó) kutatási témák

Karsai János: **Interaktív, "computable" tankönyvek fejlesztése és alkalmazása**

Ma már a számítógép-algebra önálló tudományág, a számítógéppel segített oktatás módszertana is kiemelt kutatási terület. Számos, órán vagy egyéni tanulás számára készült elektronikus segédanyag létezik, de a tankönyvek nagyrészt hagyományosak. A modern számítógép-algebrai rendszerek azonban lehetővé teszik, hogy a velük elkészített könyveket ne csak olvassuk, hanem a bennük levő 3D ábrákat forgassuk, az utasításokat módosítsuk és valós időben futtassuk. Így már nem csupán statikus tudáshalmazt, hanem hatékony kísérletező eszközt adnak az „olvasó” kezébe. Ezek a klasszikus könyvekhez képest gyakran teljesen más megfogalmazást, felépítést igényelnek, a problémamegoldásban a kísérletezésnek a könyvekben is (nem csak az órán!) több szerep jut. Az ilyen rendszerek ma már Web-ről is elérhetők (plugin segítségével). Bár számtalan könyv íródott számítógépes eszközök használatával (… with Mathematica; … with Maple), a jó interaktív tankönyvtől elvárt kritériumokat csak kevés elégíti ki.

A kutatás során többféle feladat (és ezek kombinációja) képzelhető el:

- A matematikai interaktív tankönyvek (ezen belül web-alapú) példatárak, oktatórendszerek fejlesztésének, használatának módszertani elemzése, a lehetséges szoftverek alkalmazhatóságának vizsgálata
- A matematikai programnyelvek hatásának vizsgálata: a számítógép-algebrai rendszerek nyelve és szolgáltatásai mennyire segítik, illetve akadályozzák a matematikai problémák megfogalmazását, ezek mennyire válnak a tárgyalás (pl. a tanköny szövege) szerves részévé (avagy elrejtendők). Vizsgálandó, hogy mindez menyire hasznos, vagy káros a megszerzett matematikai ismeretek mélységének szempontjából.
- Adott tantárgy (különös tekintettel a középiskolákra vagy nem matematika szakokra) számára interaktív tankönyv és oktatóanyag (feladat) gyűjtemény elkészítése, a fejlesztések tantermi kipróbálása, az eredmények elemzése. Például:

− Kísérletező matematika élettudományi szakok számára: tantárgy és interaktív segédanyagainak, jegyzetének kidolgozása.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

− Számítógépes kísérletező interaktív könyv(fejezet) a dinamikus rendszerek oktatásához
− Tananyag fejlesztése az elmélet és a számítógépes implementációk (modellezés) ismeretek integrált oktatására.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Katonáné Horváth Eszter: **Szigetek hálóelméleti és módszertani szempontból**

Szigetek, szigetrendszerek különféle rácsokon. Maximális szigetrendszerek, további kapcsolódó megszámlálási problémák. Kombinatorikus, hálóelméleti és elemi bizonyítási módszerek. Függetlenségi feltételek hálókban. Szigetekkel kapcsolatos elemi problémák tanítása.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

IV. Doktori kurzusok rendszere és felsorolása képzési programonként (2 + 2 éves képzés)

Szegedi Tudományegyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

2016. augusztus 30.

A doktori kurzusok három kategóriába sorolhatók.

a) **Általános kurzusok**: a doktori fokozathoz szükséges általános matematikai műveltség megszerzését célozzák. (A doktorandusz előképzettségétől függően a Tanács előírhat egy-két ilyen kurzust. Matematikadidaktikai témákat leszámítva, ilyen kurzus csak a Tanács engedélyével vehető fel.)

b) **Alapkurzusok**: a választott kutatási témacsoport legalapvetőbb ismereteit szolgáltatják.

c) **Speciális kurzusok**: a választott kutatási témához kapcsolódó ismereteket szolgáltatják.

Ha az adott félévben egy kurzust legalább öt hallgató felvesz, akkor abból tantermi (tábla-kréta) foglalkozások vannak **heti 2+0 óraszámban**. Ötnél kevesebb hallgató esetén a kurzus olvasókurzus, igény szerinti konzultációkkal kiegészítve.

Mindegyik kurzus 5 kreditet ér. A kurzusok felvétele —bár sok szabadsági fokot engedélyez— nem teljesen tetszőleges, és a **Kredittáblázat** szabályozza. A félévente elérendő kreditek számát az SZTE Doktori Szabályzata szabályozza.

Ez a rész csak a kurzusokról szól; **további fontos tudnivalók** (pl. a szemeszterenkénti beszámolási kötelezettségről) a Doktori Iskola Működési Szabályzatának „A szervezett képzésben résztvevő doktoranduszok tanulmányai” című 6. fejezetében olvashatók.

Itt a Tanács által már jóváhagyott állandó kurzusok szerepelnek. Ezeket az ETR-ben a felmerülő igényeknek megfelelően hirdetjük meg. Alkalmanként eseti kurzusokra is van lehetőség, de azokat (a Működési Szabályzat 2.1. pontja szerint) csak a Tanács engedélyezheti. Ezért egy eseti kurzus meghirdetése **több időt** kíván, mint egy állandó kurzusé.

Technikai megjegyzés: a kurzusok felsorolásakor nemcsak a kurzus ETR-beli kódját adjuk meg, hanem azt is, hogy miként lehet az ETR-kódból megtudni, hogy milyen fajta kurzusról van szó. Mivel néha (főleg személyi változások miatt) az állandó kurzusok listája változik és a korábbi ETR-kódok nem használhatók új kurzusoknál, a jelenleg érvényes ETR-kódok halmaza nem hézagmentes.

1. Általános kurzusok (ETR-kódok: MDPT1n)

- MDPT11. Algebra
- MDPT12. Mérték- és integrálelmélet
- MDPT13. Topológia
- MDPT14. Diszkrét matematika
- MDPT15. Valószínűségelmélet

2. Alapkurzusok (ETR-kódok: MDPT2mn)

Algebra képzési program (ETR-kódok: MDPT21n)

- MDPT211. Félcsoportelmélet
- MDPT212. Hálóelmélet
- MDPT213. Univerzális algebra
- MDPT214. Csoportelmélet

Analízis képzési program (ETR-kódok: MDPT21n)

- MDPT221. Fejezetek a komplex függvénytanból
- MDPT223. Bevezetés az approximációelméletbe
- MDPT224. Fourier sorok I
- MDPT225. Funkcionálanalízis

Dinamikus rendszerek képzési program (ETR-kódok: MDPT23n)

- MDPT231. Közönséges differenciálegyenletek I
- MDPT232. Közönséges differenciálegyenletek II
- MDPT233. Parciális differenciálegyenletek I
- MDPT234. Dinamikus rendszerek I
- MDPT235. Dinamikus rendszerek II

Geometria, kombinatorika és elméleti számítástudomány képzési program (ETR-kódok: MDPT24n)

- MDPT241. Kombinatorikus módszerek a geometriában
- MDPT242. Riemann geometria
- MDPT243. Konvex testek és klasszikus integrálgeometria
- MDPT244. Algoritmikus geometria
- MDPT245. Geometriai algebra
- MDPT246. Algebrai topológia

Sztochasztika képzési program (ETR-kódok: MDPT25n)

- MDPT251. Valószínűségelmélet I
- MDPT252. Valószínűségelmélet II
- MDPT253. Matematikai statisztika I
- MDPT254. Matematikai statisztika II
- MDPT255. Bevezetés az ergodelméletbe
- MDPT256. Bevezetés a Kolmogorov–Arnold–Moser elméletbe

Matematikadidaktikai alapkurzusok (ETR-kódok: az újabbak MDPT26n, a régebbiek MDPT2mn)

- MDPT261. Fejezetek az algebra, a számelmélet, a geometria és a kombinatorika közép- és felsőfokú tanításának módszertanából
- MDPT262. Fejezetek az analízis, valamint a valószínűségszámítás és statisztika közép- és felsőfokú tanításának módszertanából

3. Speciális kurzusok (ETR-kódok: MDPT3mnk)

Algebra képzési program (ETR-kódok: MDPT31nk)

- MDPT3100. Reguláris félcsoportok
- MDPT3101. Félcsoportosztályok univerzális algebrai vizsgálata
- MDPT3102. Kongruenciavarietások
- MDPT3103. Hálók koordinátázáselmélete
- MDPT3104. Véges rendezések
- MDPT3105. Klónok
- MDPT3106. Véges algebra
- MDPT3109. Testelmélet és Galois-elmélet
- MDPT3110. Gyűrűk és modulusok
- MDPT3112. Lineáris algebra

- MDPT3117. Szabad hálók
- MDPT3118. A gráfhomomorfizmus-probléma algoritmikus bonyolultsága

Analízis képzési program (ETR-kódok: MDPT32nk)

- MDPT3200. Hilbert terek, Banach terek és operátoraik I
- MDPT3201. Hilbert terek, Banach terek és operátoraik II
- MDPT3202. Hilbert térbeli kontrakciók I
- MDPT3203. Hilbert térbeli kontrakciók II
- MDPT3204. Erős szummáció és approximáció I
- MDPT3205. Erős szummáció és approximáció II
- MDPT3210. Egyenlőtlenségek, numerikus approximáció
- MDPT3211. Fourier sorok II
- MDPT3214. Komplex harmonikus analízis I
- MDPT3215. Komplex harmonikus analízis II
- MDPT3216. Valós harmonikus analízis I
- MDPT3217. Valós harmonikus analízis II
- MDPT3218. Numerikus analízis
- MDPT3219. Ortogonális polinomok I
- MDPT3220. Ortogonális polinomok II
- MDPT3221. Fejezetek az approximációelméletből I
- MDPT3222. Fejezetek az approximációelméletből II
- MDPT3224. Operátor-approximáció
- MDPT3225. Polinom-approximáció
- MDPT3226. Fraktálok és waveletek
- MDPT3227. Speciális függvények
- MDPT3228. Potenciálelmélet és alkalmazásai
- MDPT3231. Ortogonális sorok I
- MDPT3232. Fourier integrálok

Dinamikus rendszerek képzési program (ETR-kódok: MDPT33nk)

- MDPT3300. Funkcionál-differenciálegyenletek I
- MDPT3301. Funkcionál-differenciálegyenletek II
- MDPT3302. Parciális differenciálegyenletek II
- MDPT3303. Stabilitáselmélet I
- MDPT3304. Stabilitáselmélet II

- MDPT3305. Bifurkációelmélet, káosz I
- MDPT3306. Bifurkációelmélet, káosz II
- MDPT3307. Bevezetés az irányításelméletbe
- MDPT3308. Differenciálegyenletek alkalmazásai
- MDPT3309. Differenciálegyenletek numerikus módszerei
- MDPT3310. Differenciaegyenletek
- MDPT3311. Differenciál- és integrálegyenlőtlenségek
- MDPT3312. Klasszikus mechanika
- MDPT3314. Dinamikus modellek a biológiában

Geometria, kombinatorika és elméleti számítástudomány képzési program (ETR-kódok: MDPT34nk)

- MDPT3400. Gelfand-féle integrál geometria
- MDPT3401. Geometriai analízis
- MDPT3402. Gráfelmélet
- MDPT3403. Konvex geometria
- MDPT3405. Integrálható rendszerek
- MDPT3407. Politopok kombinatorikája
- MDPT3408. Halmazrendszerek
- MDPT3409. Konnexió elmélet és holonómia csoportok
- MDPT3410. Szimmetrikus terek
- MDPT3411. Összeszámlálási problémák
- MDPT3412. Speciális gráfosztályok
- MDPT3413. Kombinatorikus optimalizáció
- MDPT3414. Speciális halmazrendszerek
- MDPT3415. Blokkrendszerek és kódok
- MDPT3416. Matroidelmélet
- MDPT3417. Véletlen módszer a kombinatorikában
- MDPT3418. Kombinatorikus módszerek a bonyolultságelméletben I.
- MDPT3419. Kombinatorikus módszerek a bonyolultságelméletben II.
- MDPT3421. Elemi kombinatorika
- MDPT3422. Elemi bonyolultságelmélet
- MDPT3423. Coxeter-csoportok
- MDPT3424. Diszkrét geometria
- MDPT3425. Sztochasztikus geometria
- MDPT3426. Csoportok és geometriák
- MDPT3427. Véges ponthalmazok kombinatorikája

Sztochasztika képzési program (ETR-kódok: MDPT35nk)

- MDPT3500. Klasszikus határeloszlástételek
- MDPT3501. Valószínűségi mértékek konvergenciája
- MDPT3502. Gauss-approximációk a sztochasztikában
- MDPT3503. Empirikus és kvantilis folyamatok
- MDPT3506. Extrémális eloszlások
- MDPT3508. A sztochasztikus folyamatok elemei
- MDPT3509. Markov láncok
- MDPT3510. Elágazó folyamatok
- MDPT3511. Martingálok
- MDPT3512. Sztochasztikus folyamatok és mezők
- MDPT3513. Sztochasztikus analízis
- MDPT3514. Markov és diffúziós folyamatok
- MDPT3515. Matematikai fizika: konzervatív rendszerek
- MDPT3516. A statisztikus fizika matematikai módszerei
- MDPT3517. Ergodelmélet
- MDPT3518. Többváltozós statisztikai analízis
- MDPT3519. Lineáris statisztikai modellek
- MDPT3520. Idősorok statisztikai analízise
- MDPT3521. Sztochasztikus folyamatok statisztikája
- MDPT3522. Nemparametrikus statisztika
- MDPT3525. Aszimptotikus módszerek a matematikai statisztikában
- MDPT3526. Alkalmazott valószínűségszámítás
- MDPT3529. Nagyméretű gráfok limesze.
- MDPT3530. A. N. Kolmogorov matematikai munkássága

Matematikadidaktikai speciális kurzusok (ETR-kódok: az újabbak MDPT36nk, az $m \in \{1, \ldots, 5\}$ képzési program által szolgáltatott régebbiek MDPT3mnk)

- MDPT3115. Egyetemi algebraoktatás a 20. században
- MDPT3116. Néhány kérdés a matematika kultúrtörténetéből
- MDPT3229. Az analízis alapvető fogalmainak különféle bevezetése
- MDPT3230. Az analízis néhány érdekes problémája, és ezek tanítás során történő feldolgozása
- MDPT3313. Függvények és dinamikus rendszerek vizsgálatának számítógépes módszerei

- MDPT3420. Számítógép programok használata a geometria tanításához és tanulásához
- MDPT3527. A véletlen története I
- MDPT3528. A véletlen története II
- MDPT3600. Problémamegoldás a matematikában és a matematika tanításában
- MDPT3601. Számítógépes alkalmazások az analízis fogalmainak oktatásához
- MDPT3602. Számítógéppel támogatott matematikaoktatás eszközei és módszerei

V. Doktori kurzusok tematikái képzési programonként (2 + 2 éves képzés)

Szegedi Tudományegyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

2016. augusztus 30.

Mivel a 2 + 2 éves képzés több hangsúlyt helyez a kutatásra és kevesebb kurzus teljesítését írja elő, mint a korábbi 3-éves képzés, ezért most kezdetben az eddigi kurzuskínálatot vesszük át (és a továbbiakban csak ezt fogjuk karbantartani). A kurzustematikákat a képzési programok szerint, azon belül pedig az ETR-kódok szerint soroljuk fel.

Algebra képzési program:

MDPT11. Algebra
Általános ismeretek a klasszikus algebrai struktúrák, úgymint a csoportok, gyűrűk, testek, modulusok elméletében. Alapvető algebrai fogalmak, konstrukciók. Jellemzési és felbontási tételek. Hálók, legfontosabb hálóosztályok. Kategóriaelméleti alapfogalmak. Algebraosztályok, mint kategóriák.
Irodalom:
Hungerford, T. W.: Algebra
Kiss E.W.: Bevezetés az algebrába

MDPT211. Félcsoportelmélet
Transzformációfélcsoport, szabad félcsoport. Ideál és Rees-kongruencia, félháló- és Green-relációk, a D-osztályok szerkezete. Reguláris elem, inverzelem, reguláris D-osztályok. Egyszerű félcsoportok, főfaktorok, Rees tétele teljesen 0-egyszerű félcsoportokra. Teljesen reguláris félcsoportok, csoportok félhálói. Inverz félcsoportok, Wagner-Preston-féle reprezentáció, természetes rendezés. Fundamentális inverz félcsoportok, Munn-tétel. Kommutatív félcsoportok.
Irodalom:

Grillet, P. A.: Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, 1995.
Howie, J. M.: Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, 1995.

MDPT212. Hálóelmélet
Hálóelméleti alapfogalmak, dualitás, teljes hálók. Algebrai hálók, részalgebra hálók. Disztributív hálók: Birkhoff és Stone reprezentációs tétele, véges disztributív hálók szerkezete. Birkhoff és Dedekind kritériuma, a három elem által generált szabad moduláris és disztributív háló. Hálókongruenciák. Moduláris hálók: intervallumok, elemfelbontások. Geometriai hálók és komplementumos moduláris hálók. Projektív geometriák mint moduláris hálók. Hálóvarietások.
Irodalom:
Czédli G.: Hálóelmélet
G. Grätzer: General Lattice Theory

MDPT213. Univerzális algebra
Algebra, kifejezésfüggvény, polinomfüggvény. Részalgebra. Izomorfizmus, homomorfizmus, általános izomorfiatételek. Direkt szorzat, további szorzatfajták. Szubdirekt felbontás, Birkhoff tétele. Lezárási operátorok, lezárási rendszerek. Kongruenciaháló. Szabad algebra. Varietások. Birkhoff varietás-tétele, Birkhoff-féle teljességi tétel. Varietások ekvivalenciája. Azonosságokkal jellemezhető tulajdonságok varietásokon. Malcev és Pixley tétele. Magari tétele. Minimális varietások. Ultraszorzat, kongruenciadisztributív varietások. Primál algebra által generált varietások. Kváziprimál algebrák, diszkriminátorvarietások. Véges azonosságbázis létezésére vonatkozó tételek.
Irodalom:
Burris–Sankappanavar: Bevezetés az univerzális algebrába.
McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, Lattices, Varieties.

MDPT214. Csoportelmélet
Testek multiplikatív csoportja. Permutációcsoportok (primitív és többszörösen tranzitív csoportok, koszorúszorzat, Frobenius csoportok). Szabad csoportok (részcsoportok, rang, definiáló relációk, Reidemeister-Schreirer elmélet). Feloldható csoportok. p-csoportok. Nilpotens csoportok. A transzfer. A Burnside-probléma. Mátrix-csoportok. Véges egyszerű csoportok. Részcsoporthálók.
Irodalom:
Aschbacher: Finite Group Theory.
Hall, M. Jr.:The Theory of Groups.

Huppert: Endliche Gruppen.
Lyndon-Schupp: Combinatorial Group Theory.

MDPT3100. Reguláris félcsoportok
Reguláris félcsoportok kongruenciái: kongruenciák magja és nyoma, a kongruenciaháló, speciális kongruenciák. A teljesen reguláris félcsoportok finom szerkezete, Lallement tétele, kötegek. Inverz félcsoportok: E-unitér inverz félcsoportok, fedési tétel, P-tétel. Ortodox félcsoportok: Hall-félcsoportok, E-unitér reguláris félcsoportok. Lokálisan inverz félcsoportok: Pastijn és McAlister fedési tételei. Reguláris félcsoportok és birendezett halmazok. Reguláris félcsoportok általánosításai.
Irodalom:
Grillet, P. A.: Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, 1995
Howie, J. M.: An introduction to Semigroup Theory, Academic Press, 1976
Howie, J. M.: Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, 1995
Lawson, M. V.: Inverse semigroups: The Theory of Partial Symmetries, World Sci., 1998
Nambooripad, K. S.S.: Structure of Regular Semigroups I, Mem. Am. Mat. Soc. 22, 1979
továbbá válogatott cikkek.

MDPT3101. Félcsoportosztályok univerzális algebrai vizsgálata
Félcsoportvarietások hálója, fontos részhálói, véges bázis tulajdonság, szóprobléma. Szabad teljesen reguláris félcsoportok, a teljesen reguláris félcsoportok varietásainak hálója, a kötegvarietások hálója. Szabad inverz félcsoportok, az inverz félcsoportok varietásainak hálója. Nincs szabad reguláris ill. szabad ortodox félcsoport. Reguláris félcsoportok egzisztenciavarietásai, biszabad objektumok, ortodox félcsoportok egzisztenciavarietásai. Véges félcsoportok pszeudovarietásai, provéges objektumok.
Irodalom:
Almeida, J.: Finite Semigroups and Universal Algebra, World Scientific, 1994
Howie, J. M.: Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, 1995
Petrich, M.: Inverse Semigroups, John Wiley & Sons, 1984
Petrich-Reilly: Completely Regular Semigroups, John Wiley & Sons, 1999
továbbá válogatott cikkek

MDPT3102. Kongruenciavarietások
A kongruenciadisztributivitás jelentősége, Baker tétele. Jónsson-kifejezések, Day-kifejezések (Gumm-kifejezések). Malcev-feltétel a modularitásnál erősebb hálóazonosságokra. Malcev-osztályok és erős Malcev-osztályok jellemzése. Nation hálóazonosságai, (3,3)-azonosságok. Polin ellenpéldája és a

$\models_c$ jellemzése. A modularitás néhány következményazonossága kongruencia-varietásokban. Abel-féle hálók és Abel-féle (= modulusvarietásból származó) kongruenciavarietások. Az Abel-féle kongruenciavarietások öndualitása. Modulusvarietások kongruencia-kvázivarietásai. A kommutátorelmélet alapjai. A kommutátorelmélet alkalmazásai kongruenciavarietásokra: "kongruencia-pattintás", gyémántazonosságok, Day és Kiss elegendő feltételei az Abel-féleségre. Példa nem-Abel-féle kongruenciavarietásra. Lokális varietások kongruenciavarietásai.
Irodalom:
Freese–McKenzie: Commutator Theory
továbbá Jónsson, Day, Freese és mások válogatott cikkei

MDPT3103. Hálók koordinátázáselmélete
Geometriai hálók. Geomoduláris hálók és projektív geometriák jellemzése. A Desargues-tétel hálóelméleti megfelelői. Desargues-féle geometriai hálók (direkt tényezőinek) koordinátázása. Neumann-keretek és az általuk generált komplementumos moduláris hálók koordinátázása. Huhn-gyémánt. Az n-disztributív hálók elmélete. Huhn-gyémánt által prezentált szubdirekt irreducibilis hálók. Gyémánt (illetve keret) által generált Desargues-féle hálók koordinátázása. Neumann-féle dimenziófüggvény. Lineáris hálók bizonyításelmélete.
Irodalom:
Crawley–Dilworth: Algebraic Theory of Lattices
Grätzer: General Lattice Theory
Neumann, J.: Continuous Geometries
továbbá Day, Freese, Haiman, Herrmann, Huhn és mások válogatott cikkei

MDPT3104. Véges rendezések
Soros-párhuzamos rendezések. Dilworth láncokra bontási tétele. Rendezések dimenziója. Schnyder tétele. Véges disztributív hálók és rendezések kapcsolata. Sperner típusú tételek. Lebontható rendezések és a fixponttulajdonság. Roddy tétele. Rendezések cikkcakkjai. Monotone műveletek, Tardos tétele. Irreducibilis rendezések. Rendezésvarietétások. Rendezések aritmetikája. Hashimoto tétele.
Irodalom:
Bogart–Freese–Kung (szerkesztők): The Dilworth Theorems. Selected papers of Robert P. Dilworth
Schröder: Ordered sets
Trotter: Combinatorics and Partially Ordered Sets. Dimension Theory
továbbá válogatott cikkek az Order c. folyóiratból

MDPT3105. Klónok

Absztrakt klónok és műveletklónok. Galois-kapcsolatok. Relációklónok és műveletklónok kapcsolata, Baker–Pixley-tétel. Nevezetes teljességi tételek: általános Lagrange-interpoláció véges testekben, Werner–Wille-tétel, Sheffer–Webb-tétel, Slupecki-tétel, Salomaa-tétel. Véges halmazok klónhálói; Janov–Mucnik-tétel. Maximális klónok; Post-tétel. Rosenberg-tétel és néhány alkalmazása: McKenzie-tétel, a minta-függvények teljessége. Sheffer-függvények; Rousseau-tétel. Minimális klónok. Swierczkowski lemmája. Rosenberg típus-tétele. Primitív pozitiv klónok; Kuznyecov-tétel.
Irodalom:
Csákány B.: Klónok (Függelék Burris–Sankappanavar Bevezetés az univerzális algebrába c. könyvéhez)
Pöschel–Kaluzsnyin: Funktionen- und Relationenalgebren
Szendrei Ágnes: Clones in Universal Algebra

MDPT3106. Véges algebra
Primál algebrák és általánosításaik. A primál algebrák Stone-Hu-féle dualitás-elmélete. A term-feltétel, kommutátorok, Abel-féle algebrák. McKenzie tétele kongruencia-fölcserélhető varietás szigorúan egyszerű algebráiról. Lokálisan véges varietások. Varietás spektruma. Relációklónok és szabad algebrák kapcsolata. Véges azonosságbázisú algebrák. Post és Lyndon tételei, a Lyndon-féle grupoid, a Murszkij-féle grupoid, örökletesen nem-végesbázisú algebrák. Pálfy-Pudlák-tétel, Pálfy tétele. Minimális algebrák, a szelíd kongruenciák elméletének elemei. elméletének elemei.
Irodalom:
Burris–Sankappanavar: Bevezetés az univerzális algebrába
McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, Lattices, Varieties
Szendrei Ágnes: Clones in Universal Algebra
Hobby–McKenzie: The Structure of Finite Algebras
továbbá Baker–McNulty–Werner, Berman, McKenzie, Pálfy, Pudlák és mások válogatott cikkei

MDPT3109. Testelmélet és Galois-elmélet
Testbővítések. Egyszerű algebrai és transzcendens bővítés. Véges fokú testbővítés, a fokszámok szorzástétele. Felbontási test és normális bővítés. Véges testek. Tökéletes testek. Galois-csoport. A Galois-elmélet főtétele. Egyenletek megoldhatósága gyökmennyiségekkel. Ruffini-Abel-tétel. A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete.
Irodalom:
Czédli–Szendrei Ágnes: Geometriai szerkeszthetőség
Garling: A Course in Galois Theory
Hungerford: Algebra

MDPT3110. Gyűrűk és modulusok
Morita-elmélet. Morita-ekvivalencia; jellemzések és alkalmazások struktúraelméletre és Brauer-csoportra. Morita-dualitás; jellemzések, duális, PF- és QF-gyűrűk, AB és lineáris kompaktság. Struktúraelmélet. Szemiperfekt modulusok és gyűrűk. Perfekt gyűrűk. Bass és Björk tételei. PI-gyűrűk. Alapvető fogalmak. Kaplansky, Amitsur-Levitzky tételei.
Irodalom:
Jacobson: Basic Algebra I, Freeman, 1974
továbbá válogatott cikkek

MDPT3112. Lineáris algebra
Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai, karakterisztikus polinomja. Euklideszi terek. Ortogonális és önadjungált transzformációk. A kvadratikus alakok főtengelytétele. Unitér terek, normális transzformációk. Modulusok. A főideálgyűrű feletti végesen generált modulusok alaptétele. Test feletti mátrixok Jordan-féle normálalakja, Cayley-Hamilton tétel.
Irodalom:
Birkhoff–MacLane: Algebra
Fried: Klasszikus és lineáris algebra
Jacobson: Basic Algebra I

MDPT3117. Szabad hálók
A szóprobléma Whitman-féle megoldása, kanonikus alak, folytonosság, fixpontmentes transzláció, FL(omega) beágyazása. Korlátos homomorfizmusok, Day-féle intervallumkettőzés és véges korlátos hálók. D-reláció, féligdisztributivitás, splitting hálók. Gyenge atomosság.
Irodalom:
Freese-Jezek-Nation: Free lattices

MDPT3118. A gráfhomomorfizmus-probléma algoritmikus bonyolultsága
Algoritmikus bonyolultsági osztályok (P, NP, NP-teljes). A CSP-problémaosztály, a dichotómiasejtés. A homomorfizmusprobléma különböző megadásai (relációs struktúrákra, algebrákra, egyenletrendszerekre, varietásokra). Feder-Vardi féle redukciók. Schaefer dichotómiatétele. Speciális esetek (félháló, többségi függvény, és Maltsev művelet esetén). Gyönge többségi függvények. A Bang-Jensen és Hell sejtés bizonyítása. Korlátos szélességű problémák jellemzése. CSP és MMSNP kapcsolata.
Irodalom:
Hell-Nesetril: Graphs and homomorphisms
továbbá Feder, Vardi, Bulatov, Jaevons, Dalmau, Kozik, Barto válogatott cikkei

Analízis képzési program:

(A jelen fejezet hivatkozásainak listája a fejezet végén található.)

MDPT12. Mérték- és integrálelmélet
Mértéktér, mérhető függvények. Az integrál definíciója, konvergencia-tételek. Mérték kiterjesztése félalgebráról a generált σ-algebrára. Mértékek megadása $\mathbf{R}^n$-en, a Lebesgue-mérték. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata. Mértékterek szorzata, a Fubini tétel. Borel mértékek regularitása. Luzin és Jegorov tételei. A Hölder- és a Minkowski-egyenlőtlenségek. Az $L^p(\mu)$ függvényterek, a Banach-tér és a Hilbert-tér fogalma. Altér ortogonális komplementere, Hilbert-tér duálisa. Komplex mértékek, teljes változás. Mértékek Lebesgue-féle felbontása, a Radon–Nikodym-tétel. Polár-felbontás, Hahn-felbontás. Komplex Borel-mértékek megadása az egyenesen, korlátos változású függvények.
Kötelező irodalom: Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.
Ajánlott irodalom: 58, 69.

MDPT221. Fejezetek a komplex függvénytanból
Mittag-Leffler tétele meromorf függvények parciális törtekre bontásáról, a $\operatorname{cotg} \pi z$ felbontása. Weierstrass tétele egész függvények szorzat-előállításáról, a $\sin \pi z$ felbontása. A gamma-függvény. Racionális törtfüggvényekkel való approximáció, Runge tétele. A nyílt egységkörlapon analitikus függvények Hardy-féle H^p terei. Határértékek a körvonalon, Fatou tétele. Riesz Frigyes és Marcell tétele, Szegő tétele. Blaschke-szorzatok, belső és külső függvények, faktorizáció. A zárt egységkörlapon folytonos és a nyílt egységkörlapon analitikus függvények Banach algebrája. Az eltolás-operátor invariáns alterei a H^2 Hilbert térben.
Kötelező irodalom: 69, 31
Ajánlott irodalom: 19, 24, 38, 58

MDPT223. Bevezetés az approximációelméletbe
Approximáció pozitív operátorokkal, Korovkin tétele. Weierstrass és Weierstrass–Stone tétel. Folytonossági és simasági modulusok, Jackson tétel, direkt tételek. Deriváltak becslése, Bernstein tétel és az approximációelmélet inverz tételei. Legjobban közelítő polinomok jellemzése, extrémális szignatúrák. L^p-approximáció. Bernstein polinomok naturációja, parabola módszer.
Kötelező irodalom: 43, 44
Ajánlott irodalom: 1, 11, 45, 49, 72

MDPT224. Fourier sorok I
A trigonometrikus rendszer teljessége. Bessel egyenlőtlenség, Parseval formula. Fourier sorok konvergenciája: Riemann-Lebesgue lemma, Dini tétele, lokalizációs elv, Dirichlet-Jordan tétel, Lebesgue állandók. Fourier sorok szummálhatósága: Fejér tétele és következményei, Lebesgue tétele, integrálható függvény Lebesgue pontjai. Fourier sorok divergenciája: Fejér és Kolmogorov példái. Speciális trigonometrikus sorok, amelyeknek együtthatói monoton konvergálnak zérushoz.
Kötelező irodalom: 79
Ajánlott irodalom: 4, 20, 69

MDPT225. Funkcionálanalízis
Ortonormált rendszerek Hilbert terekben, Hilbert tér dimenziója. Fourier sorok konvergenciája, Cesaro és Abel összegzés. A Hahn-Banach tétel és alkalmazásai, Banach limesz, Banach integrál és mérték. A Banach-Steinhaus tétel, a nyílt leképezések tétele és a zárt gráf tétel; alkalmazásaik Fourier sorokra. Az L^p terek duálisai, reflexivitás. A folytonos függvények terének duálisa, Riesz reprezentáció tétele. A Weierstrass-Stone approximáció tétel.
Kötelező irodalom: Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.
*Ajánlott irodalom:*57, 58, 69

MDPT3200. Hilbert terek, Banach terek és operátoraik I
Ortonormált bázis Hilbert terekben, az altérháló. Eltolás-, szorzás- és integrál-operátorok. Adjungálás, normális operátorok, ortogonális projekciók. A kompakt operátorok ideálja. Banach algebra elemének spektruma, spektrálsugár, a Riesz-Dunford kalkulus. Térbeli spektrum-fogalmak, kompakt operátor spektruma. Kommutatív Banach algebrák, Gelfand transzformáció, a Gelfand-Naimark tétel. Operátor-topológiák, önadjungált operátorok monoton sorozatai. Spektrálmérték, spektráltétel. Függvénykalkulus és függvénymodell normális operátorokra. Neumann bikommutáns tétele, kommutatív Neumann algebrák. Kompakt operátor invariáns alterei, Lomonoszov tétele.
Kötelező irodalom: Kérchy László: Hilbert terek operátorai, Polygon, Szeged, 2003
Ajánlott irodalom: 13, 18, 26, 34, 59

MDPT3201. Hilbert terek, Banach terek és operátoraik II
Nem-korlátos szimmetrikus és önadjungált operátorok, Cayley transzformáció. Spektráltétel nem-korlátos normális operátorokra. Stone tétele egyparaméteres unitér csoportra. Fredholm operátorok, Fredholm index,

lényeges spectrum. C^*-algebrák, a Gelfand-Najmark-Segal kontsrukció. Véges nyomú, Hilbert-Schmidt, Bergman és szubnormális operátorok. Pozitív és teljesen pozitív leképezések. Reflexív és hiperreflexív operátor-algebrák és operátor-alterek.
Kötelező irodalom: 13, 14
Ajánlott irodalom:
J.B. Conway: The theory of subnormal operators, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.
K.-J. Engel - R. Nagel: One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer, New York, 2000.

MDPT3202. Hilbert térbeli kontrakciók I
Izometriák Wold-féle felbontása. Szőkefalvi-Nagy Béla dilatációs tétele. Dilatációs tételek felcserélhető kontrakciókra. Unitér ρ-dilatációk. A minimális unitér dilatáció szerkezete, reziduális részei. A kommutáns dilatációja, „lifting" tételek. Osztályozás az iteráltak aszimptotikus viselkedése szerint. Kvazihasonlóság, hiperinvariáns alterek, a C_{11}-osztály. A minimális unitér dilatáció spektrális tulajdonságai. A Hardy-féle H^∞ térbeli függvényekkel értelmezett függvénykalkulus. A C_0-osztály, minimálfüggvény, spektrum, hiperinvariáns alterek, kvázihasonlósági modell, reflexivitás.
Kötelező irodalom: 9, 71
Ajánlott irodalom: 23

MDPT3203. Hilbert térbeli kontrakciók II
Operátor-értékű analitikus függvények. Belső és külső függvények, faktorizáció. Skaláris többszörös. Kontrakciók karakterisztikus függvénye, függvény-modellje. A karakterisztikus függvény és a spektrum kapcsolata. Az invariáns alterek kapcsolata a karakterisztikus függvény reguláris faktorizációival. C_{11}-kontrakciók hiperinvariáns alterei. Gyenge kontrakciók.
Kötelező irodalom: 71
Ajánlott irodalom: 9, 23, 31

MDPT3204. Erős szummáció és approximáció I
Hardy–Littlewood tétel, Marcinkiewicz és Zygmund tételei. Alexits problémája és társszerzős eredményei, erős approximáció nagyságrendje. Függvények strukturális tulajdonságai, amelyek az erős approximáció nagyságrendjéből adódnak. Erős és legjobb approximáció kapcsolata. Függvényosztályok és Fourier sorokkal való approximáció. Nagyon erős és kevert approximáció.
Kötelező irodalom: 41, 43
Ajánlott irodalom: 61, 79

MDPT3205. Erős szummáció és approximáció II
Ortogonális sorok erős szummációja. Ortogonális sorokkal való erős approximáció, extra erős approximáció, erős approximáció nagy kitevőkkel. Ortogonális sorok erős és nagyon erős szummációja és approximációja speciális összegzési módszerekkel (pl. Abel, Cesàro, Euler, Hausdorff). Határesetek az erős approximációban. Kapcsolat a rendes és erős approximáció között ortogonális sorok esetén.
Kötelező irodalom: 41, 43
Ajánlott irodalom: 61, 79

MDPT3210. Egyenlőtlenségek, numerikus approximáció
Klasszikus és új egyenlőtlenségek sorokra és integrálokra, Hardy-Littlewood típusú egyenlőtlenségek, Copson-egyenlőtlenségek, Graham Bennett egyenlőtlenségei. Bizonyos fordított Hölder egyenlőtlenségek sorokra és integrálokra, Bernoulli típusú egyenlőtlenségek. Egyenlőtlenségek blokkokkal és általánosított "kitevőkkel". Numerikus approximációs módszerek.
Kötelező irodalom: 6, 27
Ajánlott irodalom: 8, 25, 75, 79

MDPT3211. Fourier sorok II
Fourier sorok abszolút konvergenciája: Bernstein és Zygmund tételei, Wiener és Lévy tételei. A konjugált függvény egzisztenciája, Abel-Poisson közepek. A konjugált sor Fourier karaktere, Fourier sor és konjugált sor konvergenciája L^1-normában. Riesz-Thorin interpolációs tétel, Hausdorff-Young és Riesz Frigyes tételei. Marcinkiewicz interpolációs tétele, Paley tétele Fourier együtthatókról. Többszörös Fourier sorok szummálhatósága.
Kötelező irodalom: 79
Ajánlott irodalom: 4, 20

MDPT3214. Komplex harmonikus analízis I
A nyílt egységkörlapon holomorf függvény reprezentálása Poisson integrállal. Harmonikus függvény holomorf kiegészítése, Herglotz integrál. H^p és h^p terek a nyílt egységkörlapon. A h^1 tér jellemzése Poisson-Stieltjes integrállal. h^1-beli függvény peremfüggvényének egzisztenciája. Holomorf függvény logaritmusának holomorf értelmezése. Jensen és Poisson-Jensen formulák, holomorf függvény zérushelyeinek eloszlása. Blaschke szorzat egzisztenciája és jellemzése, Riesz Frigyes és Nevalinna faktorizációs tételei. Belső függvény faktorizációja. N-beli függvény peremfüggvényének egzisztenciája. Peremfüggvényhez való konvergencia L^p-normában. H^1 jellemzése Poisson integrállal, a Riesz-fivérek tétele és ekvivalens átfogalmazásai. Külső függvény egzisztenciája. H^p-beli függvény kanonikus faktorizációja.

Kötelező irodalom: 19
Ajánlott irodalom: 24, 31, 38, 74, 79

MDPT3215. Komplex harmonikus analízis II
H^p és hp terek jellemzése Poisson integrállal, $1 < p \leq \infty$. A Nevanlinna N osztály jellemzése Poisson-Stieltjes integrállal. H^p tér teljessége, $0 < p \leq \infty$, és jellemzése az approximációs tulajdonsággal, $0 < p < \infty$. A Szmirnov N^+ osztály jellemzése. Hardy egyenlőtlensége H^1-beli függvényekre. Szmirnov és Privalov tételei a nyílt egységkörlapon holomorf függvényekre, amelyek peremfüggvénye abszolút folytonos. A zárt egységkörlapon folytonos és a nyílt egységkörlapon holomorf függvények Banach algebrája (ún. diszk-algebra), $p > 0$. h^p-beli függvény harmonikus konjugáltja, $p > 0$. H^p és h^p terek a komplex felső síkon.
Kötelező irodalom: 19
Ajánlott irodalom: 24, 31, 38, 74. 79

MDPT3216. Valós harmonikus analízis I
Az f mérhető függvény f^* monoton csökkenő átrendezése és az f^{**} elemi maximál függvény. A Hardy-Littlewood $f \to Mf$ maximál operátor korlátos $L^1(R^n)$-ből weak-$L^1(R^n)$-be és korlátos $L^p(R^n)$-ben, ha $p > 1$. Azon tétel bizonyítása, hogy f^{**} ekvivalens $(Mf)^*$-gal. Az $L^1 + L^\infty$ és $L^1 \cap L^\infty$ terek. Riesz Marcell-Thorin és Marcinkiewicz interpolációs tételei. Zygmund $L \ln^+ L$ és $\exp L$ osztályai. L^1-beli függvény Calderón-Zygmund felbontása.
Kötelező irodalom: 7
Ajánlott irodalom: 64, 74

MDPT3217. Valós harmonikus analízis II
Periodikus függvény Fourier sora és konjugált sora, konjugált függvénye. A csonkított konjugált függvény. Fourier sorok konvergenciája L^p-normában és a konjugált függvény létezése. Karakterisztikus függvény Hilbert transzformáltja. Maximál Hilbert transzformált, Calderón operátor, Kolmogorov és Riesz Marcell tételei. L^∞-beli függvény módosított Hilbert transzformáltja. A BMO tér és John-Nirenberg egyenlőtlenség. BMO-beli függvény Hardy-Littlewood maximál függvényre és Hilbert transzformáltja. A valós H^1 és a komplex H^1 terek ekvivalenciája, atomos felbontás. Peetre K-funkcionálja. Fefferman dualitási tétele és BMO-beli függvény előállítása $\varphi_1 + \tilde{H}\varphi_2$ alakban, ahol $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty$.
Kötelező irodalom: 7
Ajánlott irodalom: 64, 74

MDPT3218. Numerikus analízis

A sajátérték feladat: mátrixok ortogonális triangularizációja és hasonlósági transzformációja felső Hessenberg alakra. Az LR algoritmus és módosítása, a QR algoritmus: konvergencia és műveletigény. Az inverz hatványiteráció. A Moore–Penrose általánosított inverz mátrix: számítása rang-faktorizációval, particionálással és ortogonális triangularizációval. Lineáris egyenletrendszerek vizsgálata az együtthatómátrix általánosított inverzének segítségével: a normál megoldás egzisztenciája és unicitása. Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása: Sturm módszere polinomok összes valós gyökének közelítésére. Lehmer-Schur módszere polinomok összes komplex gyökének közelítésére. A többváltozós Newton–Raphson módszer. Bairstow módszere. Kontrakciós operátorok Caccioppoli–Banach fixpont tétele. Függvények feltétel nélküli minimalizálása: Lejtő módszerek. Vonalmenti minimum keresése, aranymetszés. Lineáris egyenletrendszerek megoldása gradiens módszerrel és konjugált gradiens módszerrel. Függvények közelítései: interpoláció algebrai polinomokkal, trigonometrikus polinomokkal és köbös spline-okkal. Periodikus függvények közelítése a legkisebb négyzetek módszerével. Gyors Fourier transzformáció. Kvadratúra formulák: Romberg integrálási módszere.
Kötelező irodalom: 47
Ajánlott irodalom: 65, 77

MDPT3219. Ortogonális polinomok I
Mértékek és ortogonális rendszerek; ortogonális polinomok; rekurziós együtthatók; differenciálegyenletek; zéróhelyek; Gauss kvadratúra; generátor függvények; klasszikus ortogonális polinomok; ortogonális polinomok a körön és kapcsolatuk valós polinomokkal; Szegő elmélet.
Kötelező irodalom: 22, 68
Ajánlott irodalom: 62

MDPT3220. Ortogonális polinomok II
A potenciálelmélet alapjai; általános ortogonális polinomok; n-gyök aszimptotikák; reguláris mértékek és jellemzéseik; Freud polinomok; ortogonális polinomok nem korlátos rekurziós együtthatókkal.
Kötelező irodalom: 62
Ajánlott irodalom: 22, 68

MDPT3221. Fejezetek az approximációelméletből I
és
MDPT3222. Fejezetek az approximációelméletből II
Approximáció operátorokkal; polinom approximáció; Müntz témakör; legjobb megközelítések; unicitás; egyoldalú approximáció; súlyozott approximáció; változó súlyokkal történő approximáció; spline-ok; többváltozós

problémák; radiális függvények; waveletek; diadikus analízis; szignál analízis; konvolúciós eljárások; nemlineáris approximáció; interpoláció; kvadratúrák; lánctörtek; momentum problémák.
*Kötelező irodalom:*16, 44
Ajánlott irodalom: 1, 2, 11, 17, 45, 49, 52, 66, 72

MDPT3223. Racionális és komplex approximáció
Polinomok a komplex síkon, Bernstein és Mergelian tételei; racionális függvények a komplex síkon, Runge tétele; Padé approximáció, Gonchar és Nuttall tételei; valós racionális approximáció és kapcsolata spline-approximációval; Pekarskii tételei; interpoláció. Waveletek, Schauder bázisok korlátos fokszámmal.
Kötelező irodalom: 52
Ajánlott irodalom: 43, 44, 58

MDPT3224. Operátor-approximáció
Pozitív operátorok; K-funkcionálok, φ-modulusok; a direkt approximáció tételei; inverz tételek; szaturáció; operátorok kombinációi; többváltozós operátorok; erős inverz tétel Bernstein polinomokra.
Kötelező irodalom: 16
Ajánlott irodalom: 17, 43, 44

MDPT3225. Polinom-approximáció
Trigonometrikus polinomok; Nikolskii témakör; Dzjadik inverz tételei; legjobb algebrai polinom-approximáció karakterizációja a φ-modulus segítségével; diszkrét operátorok; potenciálelmélet és polinomok; változó súlyokkal történő approximáció; ortogonális polinomok és súlyozott polinomapproximáció; Müntz témakör és általánosításai.
Kötelező irodalom: 17, 44, 72
Ajánlott irodalom: 1, 43, 49

MDPT3226. Fraktálok és waveletek
Iterált rendszerek és limeszeik; törtdimenzió; fraktálok; reprezentáció; ortogonális rendszerek és Haar rendszer; waveletek, Daubechie konstrukciója; multirezolúciós analízis; képösszenyomás; nemlineáris approximáció, Schauder bázisok.
Kötelező irodalom: 5, 78
Ajánlott irodalom: 12

MDPT3227. Speciális függvények

Ortogonális polinomok és lánctörtek; hipergeometrikus függvények; differenciálegyenletek; generátorfüggvények; zérushelyek; addíciós képletek; ortogonális polinomok aszimptotikája; q-sorok és speciális függvények; diszkrét ortogonális polinomok; gyökrendszerek; kombinatorika.
Kötelező irodalom: 68
Ajánlott irodalom: 22

MDPT3228. Potenciálelmélet és alkalmazásai
Logaritmikus potenciálok; szuperharmonikus függvények; Riesz reprezentációs tétel; elvek; egyensúlyi mértékek és potenciálok; potenciálok külső térben; Riesz potenciálok; alkalmazások.
Kötelező irodalom: 55, 60
Ajánlott irodalom: 29, 76

MDPT3231. Ortogonális sorok I
Ortogonális sorok az L^2-térben, Riesz-Fischer tétel, Bessel egyenlőtlenség, teljes ortonormált rendszer, Parseval formula. Speciális ortogonális rendszerek: trigonometrikus, Haar, Rademacher, Walsh rendszer és alapvető konvergencia tételek. Ortogonális sorok konvergenciája: Rademacher-Mensov egyenlőtlenség és tétel, Tandori tétele, Mensov-Kaczmarz függvények. Ortogonális sorok feltétel nélküli konvergenciája: Orlicz és Tandori tételei. Ortogonális sorok Cèsaro szummálhatósága és összefüggése részsorozatok konvergenciájával: Kolmogorov, Kaczmarz és Zygmund tételei, Mensov-Kaczmarz tétel és Tandori tétele. Erős szummálhatóság.
Kötelező irodalom: 3
Ajánlott irodalom: 33, 36

MDPT3232. Fourier integrálok
L^1-beli függvény Fourier transzformáltja. A Fourier integrál Cesàro, Abel és Gauss-Weierstrass szummálhatósága, unicitás és inverziós formula. L^2-beli függvény Fourier transzformáltja, Plancherel tétele. L^p-beli függvény Fourier transzformáltja $1 < p < 2$ esetén, Hausdorff-Young egyenlőtlenség, konvolúció tétel. Disztribució Fourier transzformáltja.
Kötelező irodalom: 64, 73
Ajánlott irodalom: 69, 79

Irodalomjegyzék az Analízis képzési programhoz

[1.] N. I. Akhiezer: Lectures on the theory of approximation

[2.] N. I. Akhiezer: The classical moment problem

[3.] G. Alexits: Convergence problems of orthogonal series

[4.] N. K. Bary: A treatise on trigonometric series

[5.] M. Barnsley: Fractals everywhere

[6.] E. F. Beckenbach–R. Bellman: Inequalities

[7.] C. Bennett–R. Sharpley: Interpolation of operators

[8.] G. Bennett: Factorizing the Classical Inequalities

[9.] H. Bercovici: Operator theory and arithmetic in H^∞

[10.] F. F. Bonsall–J. Duncan: Complete normed algebras

[11.] P. Borwein–T. Erdelyi: Polynomials and Polynomial Inequalities

[12.] C. K. Chui: Wavelets

[13.] J. B. Conway: A course in functional analysis

[14.] J.B. Conway: A course in operator theory

[15.] Császár Ákos: Valós analízis I-II.

[16.] R. DeVore: Approximation by positive operators

[17.] Z. Ditzian–V. Totik: Moduli of smoothness

[18.] N. Dunford–J. Schwartz: Linear operators

[19.] P. L. Duren: Theory of H^p spaces

[20.] R. E. Edwards: Fourier series

[21.] L. Euler: Introduction to Analysis of the Infinite

[22.] G. Freud: Orthogonal polynomials

[23.] C. Foias–A.F. Frazho: The commutant lifting approach to interpolation problems

[24.] J. Garnett: Bounded analytic functions

[25.] K.-G. Grosse-Erdmann: The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequalities

[26.] P. R. Halmos: A Hilbert space problem book

[27.] G. H. Hardy–J.E. Littlewood-G. Pólya: Inequalities

[28.] G.H. Hardy: Divergent series

[29.] L. L. Helms: Introduction to potential theory

[30.] E. Hille–R.S. Phillips: Functional analysis and semigroups

[31.] K. Hoffmann: Banach spaces of analytic functions

[32.] L. Jaconsen–O. Nostrad: Continued fractions

[33.] S. Kaczmarz-H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen

[34.] R. V. Kadison–J.R. Ringrose: Fundamentals of the theory of operator algebras, Volume I: elementary theory

[35.] Kalmár László: Bevezetés a matematikai analízisbe I-II

[36.] B. S. Kashin–S.A. Saakjan: Orthogonal series

[37.] M. Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times

[38.] P. Koosis: Introduction to H^p spaces

[39.] J. D. Lambert: Computational methods in ordinary differential equations

[40.] J. D. Lambert: Numerical methods for ordinary differential systems

[41.] L. Leindler: Strong approximation by Fourier series

[42.] Leindler László: Analízis

[43.] G. G. Lorentz: Approximation of functions

[44.] G. G. Lorentz–R. DeVore: Approximation theory

[45.] G. G. Lorentz–M. Von Golitschek-A. Makovez: Approximation Theory II.

[46.] A.I. Markusevich: Series

[47.] Móricz Ferenc: Numerikus módszerek az algebrában és az analízisben

[48.] Móricz Ferenc: Differenciálegyenletek numerikus módszerei

[49.] I.P. Natanson: Constructive function theory

[50.] Sz. Sz. Pontrjagin: Matematikai analízis középiskolák számára (orosz nyelven)

[51.] G. K. Pedersen: Analysis now

[52.] P. Petrushev–V. Popov: Rational approximation

[53.] Pintér Lajos: Analízis I-II.

[54.] Pólya György–Szeghő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből I-II.

[55.] T. Ransford: Potentials Theory on the Complex Plane

[56.] W. Rendin: A matematikai analízis alapjai

[57.] F. Riesz–B. Szőkefalvi-Nagy: Functional analysis

[58.] W. Rudin: Real and complex analysis

[59.] W. Rudin: Functional analysis

[60.] E. B. Saff-V. Totik: Logarithmic Potentials with External Fields

[61.] S. R. Siha: Summability methods and their applications

[62.] H. Stahl–V. Totik: General orthogonal polynomials

[63.] E. M. Stein: Singular integrals and differentiability properties of functions

[64.] E. Stein–G. Weiss: Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces

[65.] J. Stoer–R. Bulirsch: Introduction to numerical analysis

[66.] J. Szabados–P. Vértesi: Interpolation theory

[67.] Szász Pál, A differenciál- és integrálszámítás elemei 1, 2

[68.] G. Szegő: Orthogonal polynomials

[69.] Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

[70.] Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan

[71.] B. Szőkefalvi-Nagy–C. Foias: Harmonic analysis of operators on Hilbert spaces

[72.] M. Timan: The approximation of real functions

[73.] E. C. Titchmarsh: Introduction to the theory of Fourier integrals

[74.] A. Torchinsky: Real variable methods in harmonic analysis

[75.] H. Triebel: Interpolation theory, function spaces, differential operators

[76.] M. Tsuji: Potential theory in modern function theory

[77.] J. H. Wilkinson: The algebraic eigenvalue problem

[78.] J. Wojsztaczyk: A Mathematical Introduction to Wavelets

[79.] A. Zygmund: Trigonometric series

Dinamikus rendszerek képzési program:

MDPT231. Közönséges differenciálegyenletek I
és
MDPT232. Közönséges differenciálegyenletek II
Differenciálegyenletek sokaságokon. Egzisztencia- és unicitástételek. Differenciálegyenletek végtelen dimenziós terekben. Lineáris rendszerek. Infinitezimális generátor. Integrálsokaságok. Linearizálás, Hartman–Grobman-tétel. Perturbációelmélet. Nem-autonóm rendszerek. Periodikus és majdnem periodikus egyenletek. A közepelés módszere. Peremértékproblémák. Sturm–Liouville-elmélet. Másodrendű egyenletek, oszcilláció. Határhalmazok, határciklusok. Poincaré–Bendixson-tétel. Stabilitás, Ljapunov-módszer. Invariancia-elv. Elsőrendű parciális differenciálegyenletek. Hamilton-Jacobi-elmélet.
Kötelező irodalom:
H. Amann, Ordinary Differential Equations, DeGruyter, 1990.
V. I. Arnold, Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1992.
J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, 1969.
Ajánlott irodalom:
D. V. Anosov, V. I. Arnold, Dynamical Systems I, Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.
C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer, 1999.
Ph. Hartman, Ordinary Differential Equations, Birkhäuser, 1982.
M. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.
M. A. Naimark, Linear Differential operators, Nauka, 1969 (in Russian).
V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Dover Publications, 1954.
J. Palis, W. DeMelo, Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1982.
V. A. Pliss, Integral Manifolds of Periodic Systems of Differential Equations, Nauka, 1977 (in Russian).

MDPT233. Parciális differenciálegyenletek I
Disztribuciók. Szoboljev terek. Disztribuciók Fourier-transzformációja. Parciális differenciálegyenletek fundamentális megoldásai. Parciális differenciáloperátorok. Klasszikus és általánosított megoldások. Hipoelliptikus differenciáloperátorok. Korrekt kitűzésű feladatok féltérben lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszerre. Elliptikus, hiperbolikus, parabolikus parciális differenciálegyenletekre kitűzött peremérték- ill. vegyes feladatok egzisztencia-, unicitás-, stabilitásvizsgálata Szoboljev-terekben.
Kötelező irodalom:

V. Sz. Vlagyimirov, Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe, Műszaki Könyvkiadó, 1979.
L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 20, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
Ajánlott irodalom
O. A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer- Verlag, 1985.
I. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1986.

MDPT234. Dinamikus rendszerek I
és
MDPT235. Dinamikus rendszerek II
Invariáns sokaságok létezése, simasága. Viselkedés fixpont és periodikus pálya környezetében. Linearizálás. Orbitális stabilitás. Poincaré-leképezések. Átlagolás. Limeszhalmazok. Aszimptotikusan sima leképezések és félcsoportok. α-kontraktív félcsoportok. Invariáns halmazok stabilitása. Disszipativitás. Globális attraktorok. Fixpont tételek. Morse-Smale leképezések. A globális attraktor dimenziója. Periodikus folyamatok. Gradiens rendszerek. Példák: retardált differenciálegyenletek, neutrális differenciálegyenletek, parabolikus és hiperbolikus parciális differenciálegyenletek.
Kötelező irodalom:
M. Hirsch and S. Smale, Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.
J. Palis, W. DeMelo, Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction, Springer- Verlag, 1982.
S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 1990.
Ajánlott irodalom:
J. Guckenheimer and P.J. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.
J. Hale, L. Magalhaes, W. Oliva, An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems — Geometric Theory, Springer-Verlag, 1984.
J. Hale, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, AMS, 1986.
D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, 1981.
M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, Invariant Manifolds, Springer-Verlag, 1977.
V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Dover Publications, 1954.
H. L. Smith, Monotone Dynamical Systems, AMS, 1995.

R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, 1997.

MDPT3300. Funkcionál-differenciálegyenletek I
és
MDPT3301. Funkcionál-differenciálegyenletek II
A fázistér, trajektóriák és a megoldások absztrakt elmélete. Egzisztencia- és unicitás-tételek. A kezdeti adatoktól való folytonos függés. A közönséges egyenletek körében szokatlan jelenségek. A megoldások folytathatósága, kompaktsága. Lineáris funkcionál-differenciálegyenletek. Oszcillációs kérdések első és másodrendű egyenletekre. Stabilitás. Integro-differenciálegyenletek. Neutrális egyenletek. Autonóm egyenletek geometriai elmélete. Periodikus megoldások létezése. Biológiai, mechanikai és egyéb alkalmazások.
Kötelező irodalom:
O. Dickmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walter, Delay Equations, Springer, 1995.
J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1977.
Ajánlott irodalom:
T. A. Burton, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, 1985.
G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Staffans, Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge University Press, 1990.
I. Győri, G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations, Carendon Press, 1991.
Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, Functional Differential Equations with Infinite Delay, Springer-Verlag, 1991.
V. B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic Press, 1986.
T. Krisztin, H.-O. Walter, J. Wu, Shape, Smoothness and Invariant Stratification of an Attracting Set for Delayed Monotone Positive Feedback, AMS, 1999.
S. H. Saperstone, Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces, Springer-Verlag, 1981.

MDPT3302. Parciális differenciálegyenletek II
Integrálegyenletek. A Fredholm-alternativa Hilbert-térben. Potenciálelmélet. Elliptikus, hiperbolikus, parabolikus (változó együtthatós) parciális differenciálegyenletek speciális kérdései: egzisztencia, unicitás, stabilitás; kis és nagy-paraméteres egyenletek aszimptotikus megoldásai. Pszeudo-differenciáloperátorok, Fourier-integráloperátorok. Szingularitások terjedése. A nemlineáris parciális differenciálegyenletek elméletének alapjai.

Kötelező irodalom:
L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 20, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
A. Haraux, Nonlinear Evolution Equations-Global Behavior of Solutions, Springer-Verlag, 1981.
M. Renardy, R.C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 2004.
Ajánlott irodalom:
M. H. Holmes, Introduction to Perturbation Methods, Springer, 1995.
S. G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Spaces, Nauka, 1967 (in Russian).
L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I-IV, Springer-Verlag, 1983-85.
S. A. Lomov, Introduction to the Theory of Singular Perturbations, Nauka, 1981 (in Russian).
B. R. Vainberg, Asymptotic Methods of the Equations of Mathematical Physics, Moscow State Univ., 1982 (in Russian).

MDPT3303. Stabilitáselmélet I
és
MDPT3304. Stabilitáselmélet II

Ljapunov-féle stabilitás és aszimptotikus stabilitás. Lineáris rendszerek stabilitása. Ljapunov- kitevők, spektrum. Szabályos rendszerek. Stabilitás első közelítés alapján; kritikus esetek. Bifurkációk. Dichotómia. Ljapunov direkt módszere. Invariancia-elv autonóm rendszerekre. Barbasin–Kraszovszkij-tételek és alkalmazásaik. Nem-autonóm rendszerek; lokalizációs tételek a határhalmazokra. Periodikus megoldás stabilitása autonóm és nem-autonóm rendszerekben; Poincaré-leképezések. Egyensúlyi helyzet és stacionárius mozgás stabilitása a mechanikában. Parciális stabilitás. Strukturális stabilitás. Lokális strukturális stabilitás. Invariáns sokaságok, transzverzalitás. Generikus tulajdonságok. Hiperbolikus zárt trajektóriák, Kupka–Smale-tétel. Morse–Smale típusú vektormezők. Az első prolongáció és prolongált határhalmazok. Visszatérési tulajdonságok (Poisson-stabilitás, nem-vándorló pontok, Lagrange-stabilitás). Diszperziós tulajdonságok, párhuzamosíthatóság.
Kötelező irodalom:
N. P. Bhatia, G. P. Szegő, Stability Theory of Dynamical Systems, Springer, 1970.
W. Hahn, Stability of Motion, Springer, 1967.
N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, Stability Theory by Liapunov's Direct Method, Springer- Verlag, 1977.

T. Yoshizawa, Stability Theory by Lyapunov's Second. Method, Math. Soc. Japan, 1966.

Ajánlott irodalom:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemytskii, Theory of Lyapunov Exponents, Nauka, 1966 (in Russian).

W. A. Coppel, Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, D.C. Heath and Company, 1965.

Ju. L. Daletskii, M. G. Krein, Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces, Nauka, 1970 (in Russian).

B. P. Demidovich, Lectures on Mathematical Theory of Stability, Nauka, 1967 (in Russian).

V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic Press, 1986.

N. N. Krasovskii, Stability of Motion, Stanford University Press, 1963.

V. Lakshmikantham, S. Leela, Differential and Integral Inequalities, I-II, Academic Press, 1969.

J. P. LaSalle, The Stability of Dynamical Systems, SIAM, 1976.

D. Merkin, Introduction to the Theory of Stability, Springer, 1997.

MDPT3305. Bifurkációelmélet, káosz I
és
MDPT3306. Bifurkációelmélet, káosz II

Lokális bifurkációk: központi sokaságok, normál-formák, fixpontok 1-kodimenziós bifurkációi, leképezések és periodikus pályák 1-kodimenziós bifurkációi. Poincaré-leképezések. Átlagolás. Melnyikov módszere: kétdimenziós homoklinikus pályák perturbációi, szubharmonikus pályák és Hamilton-rendszerek perturbációi. A Smale-féle patkó. Szimbolikus dinamika. A Conley–Moser-feltételek. Globális bifurkációk: homoklinikus bifurkációk, 2-kodimenziós lokális bifurkációkból adódó globális bifurkációk. Ljapunov kitevők. Káosz. Globális attraktorok.

Kötelező irodalom:

J. Guckenheimer, P. J. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.

Yu. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag, 1998.

Ajánlott irodalom:

V. I. Arnold, A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei, Műszaki Könyvkiadó, 1988.

S.-N. Chow, J. K. Hale, Methods of Bifurcation Theory, Springer-Verlag, 1982.

J. K. Hale, H. Kocak, Dynamics and Bifurcation, Springer, 1991.

G. Ioss, D. D. Joseph, Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer, 1980.
S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer- Verlag, 1990.
S. Wiggins, Global Bifurcations and Chaos, Springer-Verlag, 1988.

MDPT3307. Bevezetés az irányításelméletbe
Az irányításelmélet alapfeladatának matematikai megfogalmazása. A variációszámítással való összefüggés. Lineáris optimálisirányítás-elmélet. Egzisztencia-tételek konvexségi feltételekkel. A maximum-elv lineáris egyenletekre. Az optimális irányítás létezése nem- konvex esetben. Maximum elv a nem lineáris esetre. Másodrendű rendszerekre való alkalmazás. Optimális szabályozás Kraszovszkij módszerével. Alkalmazások. Szimmetrikus rakéták optimális szabályozásáról. Adaptív rendszerek.
Kötelező irodalom:
E. B. Lee, L. Markus, Foundations of Optimal Control Theory, Wiley, 1966.
L. Sz. Pontrjagin, Optimális folyamatok elmélete, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1968.
Ajánlott irodalom:
L. D. Berkovitz, Optimal Control Theory, Springer-Verlag, 1974.
V. N. Fomin, A. L. Fradkov, B. A. Yakubovich, Adaptive Control of Dynamical Objects, Nauka, 1981.
J. Warga, Optimal Control of Differential and Functional Equations, Academic Press, 1972.

MDPT3308. Differenciálegyenletek alkalmazásai
Mechanikai alkalmazások. Szputnyik, pörgettyű stabilitása. Rezgések ellenálló közegben. Giroszkópok, egyvágányú vasút. Változó fonalhosszúságú inga. Paraméterrezonancia. Elektromos áramkörök dinamikája. Betatron stabilitása. Folyadékot tartalmazó üreges testek mozgása, stabilitása. A szökőár modellje, haladó hullámok. Problémák a kémiai reakciókinetikából. Hőreaktorok, nukleáris reaktorok. Reakció-diffúzió-egyenletek. Kémiai oszcillátorok. Járványterjedés; az AIDS modelljei. Folyók szennyeződése. Közlekedési modellek. Automatikus irányítás, feedback. Regulátorok stabilitása. Pilóta-automata. Közgazdasági alkalmazások. A makrogazdaság Leontief-féle modellje. Hicks és Samuelson elmélete az egyensúly stabilitásáról. Üzleticiklus-modellek.
Ajánlott irodalom:
V. I. Arnold, Az elméleti mechanika matematikai alapjai, Műszaki Könyvkiadó, 1989.
E. Beltrami, Mathematics for Dynamic Modeling, Academic Press, 1987.
M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Springer- Verlag, 1975.

Differential Equation Models, Edited by M. Braun, C.S. Coleman D.A. Drew, Springer- Verlag, 1978.
T. P. Dreyer, Modelling with Ordinary Differential Equations, CRC Press, 1993.
A. Friedman, Mathematics in Industrial Problems, Vol. 10, Springer, 1998.
Modules in Applied Mathematics, Edited by W.F. Lucas, Springer-Verlag, 1976.
W. B. Zhang, Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics (Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences), World Scientific, 2005.

MDPT3309. Differenciálegyenletek numerikus módszerei
Közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték feladata: fokozatos közelítések módszere, egzisztencia tételek, Taylor sor módszer. Egylépéses módszerek: képlethiba, pontossági rend, konzisztencia és konvergencia. A képlethiba becslése. Runge-Kutta módszerek. Lineáris differenciaegyenletek: homogén differenciaegyenlet általános megoldása. A megoldások stabilitása. Inhomogén differenciaegyenlet partikuláris megoldása. Lineáris többlépéses módszerek: képlethiba, pontossági rend, konzisztencia, stabilitás és konvergencia. Adams formulái, Störmer formulái, kvadratúraformulákból levezetett formulák. Prediktor-korrektor módszerek. Mátrixelméleti előismeretek: irreducibilis és gyengén diagonális mátrixok, pozitív és monoton mátrixok. Iterációs módszerek nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldására: JOR és SOR. Közönséges differenciálegyenletek peremérték feladata: visszavezetés kezdetiérték feladatra, a célzás módszere. A véges differenciák módszere, hibaanalízis. Parciális differenciálegyenletek: a matematikai fizika elliptikus, hiperbolikus és parabolikus egyenletei. A véges differenciák módszere, a Ritz–Galerkin variációs módszer. Minimalizálási problémák és ezek numerikus megoldása véges elemek módszerével; parciális differenciálegyenletek gyenge alakja (weak formulation), a Galerkin variációs módszer és alkalmazása fizikai problémákat modellező parciális differenciálegyenletekre; nagy egyenletrendszerek megoldási technikái.
Kötelező irodalom:
Móricz Ferenc: Differenciálegyenletek numerikus módszerei
Ajánlott irodalom:
S.C. Brenner, L.R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, 2008.
J. van Kan, A. Segal, F. Vermolen, Numerical Methods in Scientific Computing, VSSD, 2006.
J.D. Lambert: Computational methods in ordinary differential equations
J.D. Lambert: Numerical methods for ordinary differential systems

K.W. Morton, D.F. Mayer, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.
J. Stoer and R. Bulirsch: Introduction to numerical analysis

MDPT3310. Differenciaegyenletek
Differencia-kalkulus. Egzisztencia- és unicitástételek. Lineáris egyenletrendszerek (generátorfüggvény, Bernoulli-módszer, Poincaré és Perron tételei). Stabilitás. Ljapunov-módszer. Összehasonlítási tételek. Oszcilláció. Riccati-típusú problémák. Differenciaegyenletek a populációdinamikában, közgazdaságtanban.
Kötelező irodalom:
S. N. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer, 1996.
S. Goldberg, Introduction to Difference Equations, Dover Publications, 1958.
Ajánlott irodalom:
R. Agarwal, Differential Equations and Inequalities, Marcel Dekker, 1992.
W. G. Kelley, A. C. Peterson, Difference Equations, Academic Press, 1991.

MDPT3311. Differenciál- és integrálegyenlőtlenségek
Középértékek, nevezetes egyenlőtlenségek (Cauchy, Hölder, Jensen, stb.) és ezek néhány alkalmazása. A Gronwall–Bellman-egyenlőtlenség és általánosításai (Bihari-egyenlőtlenség, többváltozós eset, diszkrét eset, Stieltjes-integrálra vonatkozó egyenlőtlenségek), valamint ezek néhány alkalmazásának bemutatása a közönséges, a funkcionál- és a parciális differenciálegyenletekből, továbbá az integrálegyenletekből vett példákon. Néhány összehasonlítási tétel közönséges, funkcionál- és parciális differenciálegyenletekre.
Kötelező irodalom:
V. Lakshmikantham, S. Leela, Differential and Integral Inequalities I- II, Academic Press, 1969.
Ajánlott irodalom:
R. Agarwal, Differential Equations and Inequalities, Marcel Dekker, 1992.
E. F. Beckenbach, R. Bellman, Inequalities, Springer-Verlag, 1961.
G. H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.
W. Walter, Differential and Integral Inequalities, Springer-Verlag, 1970.

MDPT3312. Klasszikus mechanika
A Hamilton-féle variációs elv. Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenlet. Lagrange-féle mechanika sokaságokon. Rezgések. Merev test. A Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenletek. A Poincaré-Cartan-féle invariáns integrál. Hamilton–Jacobi- elmélet. Az égi mechanika problémái.
Kötelező irodalom:

V. I. Arnold, Az elméleti mechanika matematikai alapjai, Műszaki Könyvkiadó, 1989.
Ajánlott irodalom:
R. Abraham, J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings, 1978.
V. I. Arnold, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, Springer, 1997.
F. Gantmacher, Lectures in Analytical Mechanics, Mir, 1975.
H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Press, Inc., 1975.
L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Mechanics, Nauka, 1973 (in Russian).
D. R. Merkin, Introduction to the Theory of Stability, Springer, 1987.

MDPT3314. Dinamikus modellek a biológiában
Populációdinamika: diszkrét és differenciálegyenletes modellek. Késleltetett visszacsatolás hatása. Együttélő fajok (ragadozó-zsákmány modellek, kooperáció, kompetíció). Strukturált populációk, metapopulációk. Matematikai járványtan: kompartment-modellek, strukturált modellek, betegséget terjesztő fajok, makroparazita rendszerek. Esettanulmányok: influenza, AIDS, veszettség. Populációgenetika: Hardy-Weinberg törvények, szelekció-mutáció-rekombináció. Evolúciós dinamika, Fisher-egyenlet. Térbeli terjedés, Fisher-Kolmogorov modell, diffúzió, haladó hullámok. Reakció-diffúzió egyenletek, mintaképződés. Neurális hálózatok.
Kötelező irodalom:
J. D. Murray, Mathematical Biology I-II 3rd ed. Springer IAM vol 17-18, 2002/03.
M. Farkas, Dynamical Models in Biology, Academic Press 2001.
O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases, Wiley, 2000.
Ajanlott irodalom:
Y. Kuang, Delay differential equations with applications in population dynamics, Academic Press MSE 191, 1993.
F. Brauer, P. van den Driessche, J. Wu (eds), Mathematical epidemiology (Lecture Notes in Mathematics / Mathematical Biosciences Subseries), Springer, 2008.
F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Springer, 2001.
H. Thieme, Mathematics in Population Biology, Princeton University Press, 2003.
J. Wu, Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 6, 2001.

Geometria, kombinatorika és elméleti számítástudomány képzési program

MDPT13. Topológia

Topológikus tér. Kompakt és lokálisan kompakt terek. Egységfelbontás létezése. Topológikus sokaság. Homotópia és szimpliciális komplexusok. A fundamentális csoport. A 2-dimenziós triangulálható sokaságok osztályozása. Topológikus csoport és transzformációcsoport. Részcsoport szerinti faktortér indukált topológiája. Homogén tér. Differenciálható és analitikus sokaság. Lie csoport.

Kötelező irodalom:

Császár Á., Bevezetés az általános topológiába. Akadémiai kiadó, Budapest, 1978.

L. Auslander–R. E. MacKenzie, Introduction to Differentiable Manifolds, Dover, 1977

Ajánlott irodalom:

M. W. Hircsh, Differential Topology, Springer, 1976.

N. Steenrod, The topology of fiber bundles, Princeton, 1951.

MDPT14. Diszkrét matematika

Leszámlálási problémák: Formális hatványsorok, rekurziók. Halmazok és multihalmazok. Részhalmazok, binomiális együtthatók. Permutációk és néhány statisztikájuk. Halmazok osztályozásai, Bell-számok, másodfajú Stirling-számok. Véges halmazon ható csoportok, Pólya–Redfield módszer. Tartalmazás és kizárás elve, parciálisan rendezett halmazok, Möbius függvény. Lineáris rekurzió, példák (Fibonacci-számok). Alapfogalmak. Összefüggőség, fák, feszítő fák száma egy gráfban. Kétszeresen összefüggő gráfok. k-szorosan összefüggő gráfok, folyamok, Menger tétele. Párosítások páros gráfban, Kőnig tétele, Magyar módszer. Párosítások, Tutte és Berge tétele, Edmonds-algoritmus. Színezések, kromatikus szám, Brooks tétele, perfekt gráfok, perfekt gráf tétel. Gráfok felületre rajzolása, Kuratowski tétele. Extremális gráfelmélet, Turán tétele. Ramsey elmélet és alkalmazásai. Az NP problémaosztály. NP-teljesség.

Ajánlott irodalom:

Stanley, Richard P. Enumerative combinatorics Vol. 1., Corrected reprint of the 1986 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 49., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

László Lovász, Combinatorial problems and exercises. Second edition. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993. (Magyar fordítás: Lovász László, Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex Kiadó, Budapest, 1999.)

Hajnal Péter, Összeszámlálási problémák, Polygon Jegyzettár, Szeged, 1997.

Hajnal Péter, Gráfelmélet, Polygon Jegyzettár, Szeged, 1997.

MDPT241. Kombinatorikus módszerek a geometriában
Blokkrendszerek: Blokkrendszerek paraméterei és oszthatósági feltételek. Steiner-rendszerek. Hadamard-mátrixok. Feloldható blokkrendszerek. Baranyai-tétel. Véges projektív geometriák: Latinnégyzetek. Véges projektív geometriák paraméterei. Desargues- és Pappos-síkok. Desargues- és Pappos-síkok koordinátázhatósága. Véges affin síkok. Véges tükrözési csoportok. Coxeter-csoportok és komplexusok. Épületek.
Ajánlott irodalom:
M. Jr. Hall, Combinatorial theory, Waltham, Mass. 1967.
Kiss György, Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon Könyvtár, Szeged, 2001.
Hajnal Péter: Halmazrendszerek, Polygon Jegyzettár, Szeged, 2002.
Brown, Buildings, Springer-Verlag, London, 1989.

MDPT242. Riemann geometria
Riemann metrika, Levi–Civita konnexió. Geodetikusok, konvex környezet, normál koordináta rendszer. Geodetikusok variációja, Jacobi vektormezők, konjugált pontok. Hopf–Rinow tétel, Hadamard tétele. Morse index tétel. Szekcionális görbület, görbületi tenzor, skalár görbület. Konstans görbületű terek.
Kötelező irodalom:
M. P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992.
J. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1963.
Ajánlott irodalom:
W. Klingenberg, D. Gromoll, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.
J. Cheeger, D. Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry, North-Holland, 1975.

MDPT243. Konvex testek és klasszikus integrálgeometria
Konvex halmazok alapvető tulajdonságai, Charatheodory, Radon, Helly tételei. Szeparáció, Euler reláció, dualitás. Konvex halmazok approximációja, Blaschke kiválasztási tétele. Vegyes térfogat, Brünn–Minkowski tétel, Minkowski és Fenchel–Alexandrov egyenlőtlenség. Sűrűségek pontokra, egyenesekre, kinematikus sűrűség, síkbeli integrálformulák. Steiner formula, quermassintegrálok, Blaschke és Poincaré alapformulái. Görbületi integrálok és alkalmazásaik.
Ajánlott irodalom:
L.A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Math., Addison–Wesley, London, 1976.
T. Bonnesen, W.Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin, 1934.

W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeomtrie, Berlin, 1955.
H. Busemann, Convex surfaces, Interscience, London, 1958.

MDPT244. Algoritmikus geometria
Geometriai problémák megoldása során használt speciális adatstruktúrák. Geometriai keresések. Politopok és síkrendszerek kódolása, permutációs táblák. Ponthalmazok particionálása. Síkrendszerek zónái. Cellarendszerek bonyolultsága. Konvex burok algoritmikus meghatározása két és többdimenzióban. Az eljárások átlagos viselkedése. Lineáris programozás geometriája. Pont helyének meghatározása síkbeli egyenesrendszerben. Legnagyobb konvex részhalmaz. Minimális mértékű szimplexek. Vektorösszeg maximalizálása. Hasonlóság megállapítására szolgáló eljárások. Voronoi diagramm meghatározása. Pontrendszerek triangulálása, legközelebbi szomszéd megkeresése, minimális feszítőfa, ponthalmazok alakja. Pontrendszerek szeparálása és metszése. Algoritmusok tervezése.
Ajánlott irodalom:
M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmas, O. Schwarzkopf: Computational Geometry, 2nd. revised edition, Springer 2000.
H. Edelsbrunner, Algorithms in Combinatorial Geometry, Springer, New York, 1987.

MDPT245. Geometriai algebra
Affin és projektiv sikok. Desargues tétele és a koordináta test. Papposz tétele és a kommutativitás. A koordináta test karakterisztikája és a Fano konfiguráció. Kollineációk és a szemilineáris leképezések. Szimplektikus és ortogonális geometria. A szimplektikus és az ortogonális csoport szerkezete. Clifford algebra.
Kötelező irodalom:
E. Artin, Geometric Algebra, Princeton University, 1957.
R. Baer, Linear Algebra and Projective Geometry, Academic Press, 1952.
Ajánlott irodalom:
D. R. Hughes, F. C. Piper: Projective Planes, Springer, 1970.
J. Dieudonné, La Géométrie des Groupes Classiques, Springer, 1955.
Kiss György, Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon Könyvtár, Szeged, 2001.

MDPT246. Algebrai topológia
Homotópia és szimpliciális komplexusok. Baricentrikus felbontás és a szimpliciális approximációs tétel. A fundamentális csoport és kiszámítási módjai. A 2-dimenziós triangulálható sokaságok osztályozása. Szinguláris homológiacsoportok és kiszámítási módjai: szimpliciális homológiák, egzakt sorozatok. Homológiák tetszőleges együtthatócsoporttal, a Lefschetz

féle fixponttétel. Kohomológiacsoportok és kiszámítási módjaik. Alexader–Poincare dualitás. CW-komplexusok homotopiaelmélete. Whitehead tétele és a celluláris approximáció. CW-komplexusok homológia és kohomológia elmélete. Hurewitz tétele. Kohomológia szorzatok.
Ajánlott irodalom:
S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952.
E. Spanier, Algebraic Topology, McGraw–Hill, New York, 1966.
C. R. F.Maunder, Algebraic Topology, Van Nostrand Reinold, London, 1970.
W. S. Massey, Singular Homology Theory, Springer, 1980.

MDPT3400. Gelfand-féle integrál geometria
Radon transzformáció valós affin téren (invertálhatóság, tartó tételek, Plancherel formula, Paley–Wiener tétel, kapcsolat más transzformációkkal), disztribúciók Radon transzformációja, Radon transzformáció komplex tartományon, Radon transzformáció és differenciálás, Radonszerű transzformációk konstans görbületű és Lorentz tereken.
Kötelező irodalom:
I. M. Gel'fand–M.I.Graev–N.Ya.Vilenkin, Generalized functions I
V. S. Helgason, Radon transform
Ajánlott irodalom:
S. Helgason, Groups and geometric analysis
V. G. Romanov, Integral geometry and inverse problems for Hyperbolic equations
F. John, Plane waves and spherical means

MDPT3401. Geometriai analízis
Fourier analízis konstans görbületű tereken, invariáns mérték sokaságokon, invariáns differenciál operátorok sokaságokon, szférikus transzformáció (szférikus függvénysorok, Paley–Wiener tétel, inverz formulák).
Kötelező irodalom:
S. Helgason, Groups and geometric analysis
Ajánlott irodalom:
V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras and their representation,
S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces,
E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract harmonic analysis

MDPT3402. Gráfelmélet
Összefüggőség: irányított gráfok összefüggősége, seholsem 0 folyamok. Párosítások: Gallai-Edmonds struktúra tétel, Edmonds polytop, Véletlen módszerek $\nu(G)$ meghatározására; Párosítások száma egy gráfban, permanens, Van der Waerden sejtés és bizonyítása. Gráfok színezései: Hajós tétele,

Kneser-gráf és kromatikus száma, $\mathbf{R}^d$ kromatikus száma. Független halmazok gráfokban: τ-kritikus gráfok, pontpakolási politop, perfekt gráfok, gráfok Shannon kapacitása. Gráfok sajátértékei, véletlen séták gráfokon, gráfok nagyító paramétere.
Ajánlott irodalom:
L. Lovász and M.D. Plummer, Matching theory, Akadémia Kiadó, Budapest, 1986.
Béla Bollobás, Modern graph theory, Graduate Texts in Mathematics vol. 184., Springer- Verlag, New York, 1998.
Reinhard Diestel, Graph theory, Second edition, Graduate Texts in Mathematics vol. 173., Springer-Verlag, New York, 2000.

MDPT3403. Konvex geometria
Konvex halmazok kombinatorikus tulajdonságai, Charatheodory, Radon, Helly tétel és ezek általánosításai, alkalmazásai. Konvex halmazok szeparálása, dualitás. Konvex halmazok approximációja, a Blaschke féle kiválasztási tétel. Műveletek konvex halmazokkal, vegyes térfogat. Izoperimetrikus tétel. Konstans szélességű konvex testek. Konvex testek értékelései. Zonoidok.
Ajánlott irodalom:
H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge Univ. Press 47 (1958).
L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, Proc. Symp. Pure Math., 7 (Convexity) (1963), 101–180.
B. Grünbaum, Convex Polytopes, John Wiley & Sons, London, 1967.
P. M. Gruber, J. M. Wills, Convexity and its applications, Birkhäuser, 1983.

MDPT3405. Integrálható rendszerek
Hamilton rendszerek. Darboux tétele. Szimplektikus sokaságok. Legendre transzformáció. Szabad részecske pszeudo-Riemann térben. A momentum leképezés. Redukciós módszerek szimmetriával. Liouville tétele. Adler–Kostant–Symes-tétel. Integrálható mechanikai rendszerek, példák.
Kötelező irodalom:
A. M. Perelomov, Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras, Birklhäuser, 1990.
R. Abraham, J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, 1978.
Ajánlott irodalom:
V. I. Arnold, A klasszikus mechanika matematikai módszerei, Müszaki Könyvkiadó, 1988.
J. M. Souriau, Structure des Systemes Dynamiques, Dunod, 1970.

MDPT3407. Politopok kombinatorikája
Charatheodory, Radon, Helly tétel és ezek általánosításai, alkalmazásai. Politopok konstruálása, Gale transzformáltak. Euler reláció, Dehn–Sommerville

egyenletek. Felső korlát a lapok számára. 3-politopok kombinatorikus típusai, a Steinitz tétel. Politopok vázának struktúrája, a van Kampen–Flores tétel. Az f-vektorok karakterizálása. Politopok összeadása és felbontása. Hamilton utak és körök politopokon. Szabályos politopok.
Ajánlott irodalom:
H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, Combinatorial Geometry in the Plane, Holt, Reinhardt and Winston, New York, 1964.
L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, Proc. Symp. Pure Math., 7 (Convexity) (1963), 101 - 180.
B. Grünbaum, Convex Polytopes, John Wiley & Sons, London, 1967.

MDPT3408. Halmazrendszerek
A ν és τ paraméterek. Folytonos relaxációk. Mohó algoritmus. Hipergráfok Kőnig-tulajdonsága. Normális hipergráfok. Erdős–Pósa-tulajdonság. Színezések, diszkrepancia. Extremális kérdések: Metsző halmazrendszerek, Erdős–Ko–Rado-tétel általánosításai, halmazrendszerek metszési korlátozásokkal, Ray–Chauduri–Wilson-tétel, alkalmazások: Borsuk-sejtés cáfolata, a tér kromatikus száma. Tenzor szorzat módszer: Bollobás tétel, Katona–Kruskal tétel, izoperimetrikus problémák.
Ajánlott irodalom:
Claude Berge, Hypergraphs, Combinatorics of finite sets, North-Holland Mathematical Library vol. 45., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
Ian Anderson, Combinatorics of Finite Sets, Clarendon Press, Oxford, 1989.
L. Babai and P. Frankl Linear Algebra methods in Combinatorics with Applications to Geometry and Computer Science, Preliminary Version, Department of Computer Science, The University of Chicago, 1992.

MDPT3409. Konnexió elmélet és holonómia csoportok
Konnexiók principális nyalábokon. Párhuzamosság. Holonómia csoport. Holonómia tétel. Redukciós tétel. Infinitézimális holonómia csoport. Lineáris konnexiók. Riemann terek holonómia csoportja. De Rham dekompoziciós tétele. Invariáns konnexiók reduktív homogén tereken és szimetrikus tereken. Invariáns Riemann metrikák és komplex struktúrák.
Kötelező irodalom:
S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, I, II, Interscience Publ., 1963, 1969.
A. Lichnerowicz, Théorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie, Cremonese, 1955.
Ajánlott irodalom:
K. Nomizu, Lie Groups and Differential Geometry, Publ. Math. Soc. Japan, 1956.

A. Lichnerowicz, Géométrie des Groupes de Transformations, Dunod, Paris, 1958.

MDPT3410. Szimmetrikus terek

Variációs és összevető tételek, pincselt sokaságok, lokálisan szimmetrikus terek, szimmetrikus és kétpont-homogén terek, izometria csoportok, kanonikus konnexió, Jacobi egyenletek, totál geodetikus részsokaságok, Riemann-féle homogén terek, elsőfajú Riemann-féle szimmetrikus terek, geodetikusok sokasága.

Kötelező irodalom:

S. Helgason, Lie groups and symmetric spaces

Ajánlott irodalom:

I. Chavel, Riemannian symmetric spaces

J. A. Wolf, Spaces of constant curvature

S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundation of differential geometry II.

A. L. Besse, Manifolds all of whose geodesics are closed

MDPT3411. Összeszámlálási problémák

Formális hatványsorok gyűrűje. Permutációk őrnagy indexe, véges vektor terek altereinek száma, kombinatorikus azonosságok q-analógjai. Egész számok partíciói, Jacobi formulák, Ramanujan–Rodgers-azonosság. Möbius függvény kiszámítási módszerei, hálók, Euler részben rendezett halmazok. Aszimptotikus formulák. Részben rendezett halmazok kiterjesztéseinek száma, vegyes térfogat, log-konkáv sorozatok, részben rendezett halmazok dimenziója. Jeu-de-taquin, tablók, szimmetrikus függvények, Hopf-algebrák.

Ajánlott irodalom:

Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics Vol. 1., Corrected reprint of the 1986 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 49., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics. Vol. 2., Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 62., Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

MDPT3412. Speciális gráfosztályok

Outerplanar gráfok, soros-párhuzamos gráfok, síkgráfok karakterizációi. Központi problémák és kezelésük ezeken az osztályokon (színezési kérdések, független utak problémája, Frank András tétele). Minor képzésre zárt osztályok. Minor monoton paraméterek (út-, fa-, elágazás-szélesség). Jól quasi-rendezettség. Seymour–Robertson-elmélet alapjai. Feszített részgráfképzésre zárt gráfosztályok. Élgráfok, intervallum gráfok, split gráfok. Perfekt gráfok és speciális részosztályai. Karakterizációk. Szimmetrikus gráfok: erősen reguláris gráfok, barátság tétel, tranzitív gráfok, Cayley-gráfok. Expander gráfok és konstrukcióik.

Irodalom:
Reinhard Diestel, Graph theory, Second edition, Graduate Texts in Mathematics vol. 173., Springer-Verlag, New York, 2000.
P.J. Cameron and J.H. van Lint, Graph theory, Coding theory and block designs, Cambridge University Press, 1980.

MDPT3413. Kombinatorikus optimalizáció
Lineáris programozás: szimplex algoritmus, ellipszoid algoritmus, Karmakar-módszer. Bázis redukció és kapcsolata az ellipszoid módszerhez. Egész értékű programozás. Szemidefinit programozás. Konvex programozás. Mohó algoritmusok. Dinamikus programozás. Javító utas módszer. Poliéder módszer (szemidefinit relaxációk, folytonos relaxációk). Branch and bound módszer. Alkalmazások konkrét példákon keresztül.
Ajánlott irodalom:
Bernhard Korte and Jens Vygen, Combinatorial optimization, Theory and algorithms, Algorithms and Combinatorics, vol. 21., Springer-Verlag, Berlin, 2000.
William J. Cook, William H. Cunningham, William R. Pulleyblank and Alexander Schrijver, Combinatorial optimization, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
Martin Grötschel, László Lovász and Alexander Schrijver, Geometric algorithms and combinatorial optimization, Second edition, Algorithms and Combinatorics vol. 2., Springer- Verlag, Berlin, 1993.

MDPT3414. Speciális halmazrendszerek
Konvex geometriák alapfogalmai. Különböző axiómarendszerek. Geometriai paraméterek és viszonyaik, kapcsolataik. Happy End probléma konvex geometriákban. Geometriai halmazrendszerek. Illeszkedésekből származó halmazrendszerek. Egy síkbeli ponthalmazból félsíkokkal kivágható részhalmazok. Diszkrepancia kérdések geometriai halmazrendszerekre. Szimpliciális komplexusok. f-vektorok. Döntési fák. Számelméleti halmazrendszerek. Roth-tétel. Diszkrepancia számtani sorozatokban. Boole-függvények: kommunikációs bonyolultság, formula bonyolultság.
Ajánlott irodalom:
Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2., Edited by R. L. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, Elsevier Science B.V., Amsterdam; MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
Bernhard Korte and László Lovász, Schrader, Rainer Greedoids, Algorithms and Combinatorics vol. 4., Springer-Verlag, Berlin, 1991.
János Pach and Pankaj K. Agarwal, Combinatorial geometry, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

MDPT3415. Blokkrendszerek és kódok
Steiner-rendszerek konstrukciói, kapcsolatok az univerzális algebrával. Szimmetrikus blokkrendszerek. Feloldható blokkrendszerek. t-blokkrendszerek. Véges projektív síkok, Ryser–Chowla-tétel. Kódolás elmélet alapfogalmai. Kódok mérete, hatékonysága, súlyszámláló polinoma. Gilbert–Varaslimov-becslés. Lineáris kódok. Mac Williams-tétel. Hamming-kódok. Önduális kódok. Projektív kódok.
Ajánlott irodalom:
Welsh, Dominic Codes and cryptography. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1988.
Thomas Beth, Dieter Jungnickel and Hanfried Lenz, Design theory, Vol. I., Second edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 69., Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
Thomas Beth, Dieter Jungnickel and Hanfried Lenz, Design theory, Vol. II., Second edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 78., Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
P. J. Cameron and J. H. vanLint, Designs, graphs, codes and their links, London Mathematical Society Student Texts, vol. 22., Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

MDPT3416. Matroidelmélet
Matroidelméleti alapfogalmak, Matroidok különböző axiómarendszerei, Műveletek matroidokkal: kontrakció, megszorítás, dualizálás, direkt összeg, összeg, metszet, homomorfizmus. Alapvető minimax tételek. Különböző minimax tételek közötti kapcsolatok és alkalmazások. Matroidok koordinátázhatósága. Bináris matroidok karakterizációja. Ternáris matroidok. Grafikus matroidok. Unimoduláris mátrixok és tetszőleges test felett koordinátázható matroidok. Matroidok és a kombinatorikus optimalizáció kapcsolata. Szubmoduláris függvények.
Ajánlott irodalom:
D. J. A. Welsh, Matroid Theory, Academic Press, London, 1976.
James G. Oxley, Matroid theory, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.

MDPT3417. Véletlen módszer a kombinatorikában
Véletlen módszer lényege, Ramsey számok, hipergráfok 2-színezése, diszkrepancia. Második momentum módszer, martingálok, Lovász-lemma, pszeudo véletlen módszerek, valószínűségszámítási becslések. Példák alkalmazásokra. Véletlen gráfok különböző modelljei. Threshold-függvények. Véletlen gráfok evolúciója. Véletlen Turing gépek. Véletlen bonyolultsági osztályok: BPP, RP, PP. Prímtesztelés. Polinom azonosságok ellenőrzése. Véletlen párhuzamos algoritmus teljes párosítás létezésének eldöntésére. Véletlen

párhuzamos algoritmus maximális független halmaz keresésére. Véletlen séták gráfokon. $s-t$ összefüggőség. Térfogatmérés.
Ajánlott irodalom:
Noga Alon and Joel H. Spencer, The probabilistic method, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
Béla Bollobás, Modern graph theory, Graduate Texts in Mathematics vol. 184., Springer- Verlag, New York, 1998.
Lovász László, Algoritmusok bonyolultsága, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

MDPT3418. Kombinatorikus módszerek a bonyolultságelméletben I.
Boole döntési fák: Példák tartózkodó függvényekre. Rivest–Vuillemin tétele. Topológikus módszerek; Kahn, Saks, Sturtevan tétele. Véletlen döntési fák. Nemdeterminisztikus döntési fák. Boole függvények érzékenysége. Kommunikációs bonyolultság: Rang függvény módszer. Möbius függvény. Véletlen kommunikációs bonyolultság. Disztribuciós bonyolultság. Formulák: Formula méret és hálózat mélységének kapcsolata. Szimmetrikus függvényeket kiszámító kis formulák. Neèiprok tétele. Ramsey-elméleti módszerek; Hodes, Specker, Pudlák tétele. Véletlen megszorítások, Subotovskaja módszere; Andreev tétele. Monoton formulák. Véletlen megszorítás módszere; Karchmer, Wigderson tétele. Lineáris algebrai módszer; Razborov tétele. Kommunikációs bonyolultság alkalmazása; Raz, Wigderson tétele.
Ajánlott irodalom:
Handbook of Theoretical Computer Science, Volume A: Algorithms and complexity, (Ed. J. van Leeuwen), R. Boppana, M. Sipser, Chapter 14, MIT Press, 1990.
Paul E. Dunne, The complexity of Boolean networks, Academic Press 1988.
I. Wegener, The complexity of Boolean functions, Wiley-Teubner, 1987.
Lovász László, Bonyolultságelmélet, ELTE jegyzet.
Christos H. Papadimitriou: Számítási bonyolultság, Novodat bt., Budapest, 1999.

MDPT3419. Kombinatorikus módszerek a bonyolultságelméletben II.
Hálózatok: Hálózat méret és Turing-gép bonyolultság kapcsolata. Általános alsó becslések. Konstans mélységű hálózatok. Hastad-lemma. Alsó becslések véletlen megszorítások módszerével. Alsó becslések az approximáció módszerével. Razborov és Smolenski tételei. Monoton hálózatok. Approximációs módszer alkalmazása különböző függvények esetére. Az approximációs módszer határai. Andreev alsó becslései. Elágazó programok: elágazó programok bonyolultsága és Turing gépek; Masek tétele. Korlátos szélességű elágazó programok.

Ajánlott irodalom:
Handbook of Theoretical Computer Science, Volume A: Algorithms and complexity, (Ed. J. van Leeuwen), R. Boppana, M. Sipser, Chapter 14, MIT Press, 1990.
Paul E. Dunne, The complexity of Boolean networks, Academic Press 1988.
I. Wegener, The complexity of Boolean functions, Wiley-Teubner, 1987.
Lovász László, Bonyolultságelmélet, ELTE jegyzet.
Christos H. Papadimitriou, Számítási bonyolultság, Novodat Bt., Budapest, 1999.

MDPT3421. Elemi kombinatorika
Egyenlőségek,
egyenlőtlenségek, oszthatóságok bizonyítása bijektív módszerrel. Nevezetes számsorozatok és kombinatorikus, számelméleti tulajdonságaik. Polinomok, formális hatványsorok. Gráfelméleti alapfogalmak. Színezések, párosítások, független ponthalmazok. Gráfelméleti módszerek az elemi matematikában. Halmazrendszerek elméletének alapfogalmai.
Ajánlott irodalom:
A.M.Jaglom, I.M.Jaglom, Challenging mathematical problems with elementary solutions, Combinatorial analysis and probability, Dover Publ. Inc., New York, 1987
Engel, Problem-solving strategies, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1998

MDPT3422. Elemi bonyolultságelmélet
Összehasonlításon alapuló döntési fák. Rendezési, keresési eljárások. Mérleg problémák. Döntési fák. Gráftulajdonságok eldöntése döntési fákkal. Zárkózott tulajdonságok. Elemi módszerek a zárkózottság bizonyítására. Invariáns módszer. Alapműveletek algebrai bonyolultsága. Mátrixműveletek bonyolultsága. Szerkesztések bonyolultságelméleti vizsgálata.
Ajánlott irodalom:
Gács Péter, Lovász László, Algoritmusok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

MDPT3423. Coxeter-csoportok
Szabályos politópok szimmetriacsoportjai. Gyökrendszerek. Tükrözéscsoportok standard prezentációja. Véges tükrözéscsoportok osztályozása. Coxeter-gráfok. Wythoff-konstrukció, Wythoff-politópok. Affin Weyl-csoportok, bővített Dynkin-diagramok. Coxeter-rendszerek. Parabolikus részcsoportok. Coxeter-komplexus. Coxeter-csoportok geometriai reprezentációja. Bruhat-rendezés. Coxeter-csoportok szerepe az egyszerű Lie-algebrák osztályozásában. Coxeter matroidok. Absztrakt szabályos politópok és C-csoportok.
Ajánlott irodalom:

A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, Graduate Texts in Mathematics, vol. 231, Springer, New York, 2005.
Bourbaki, Lie Groups and Lie Algebras, Springer, Chapters 4-6, Springer, 2002. J. E. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge University Press, 1990.

MDPT3424. Diszkrét geometria
Tematika: Rácsgeometriai alapfogalmak, speciális rácsok, rácsok szimmetriái, Minkowski tételei, Blichfeldt tétele, elhelyezési és fedési problémák konvex testekre, suruség bevezetése és tulajdonságai, d-dimenziós gömbelhelyezések, Blichfeldt módszere, Rogers-féle szimplex módszer, Minkowski-Hlawka-tétel, Rogers-Shepard-tétel, szukcesszív minimumok, véges elhelyezési és fedési problémák, parametrikus sűrűség.
Ajánlott irodalom:
J. Pach, P. Agarwal, Combinatorial Geometry, John Wiley & Sons, Inc., 1995.
P. M. Gruber, Convex and discrete geometry, Springer, 2007.
L. Fejes Tóth, Regular Figures, Pergamon Press, 1964. C. A. Rogers, Packing and Covering, Cambridge University Press, 1964.

MDPT3425. Sztochasztikus geometria
Véletlen zárt halmazok, véletlen mértékek és pontfolyamatok, Poisson pontfolyamatok, Palm eloszlások, véletlen pontok konvex burka, politópok véletlen vetületei, extremális problémák valószínuségre és várható értékre, konvex testek közelítése véletlen politópokkal, sapkafedési tétel és alkalmazásai, centrális határeloszlástételek véletlen politópokra.
Ajánlott irodalom:
R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
Baddeley, A.; Bárány, I.; Schneider, R.; Weil, W. Stochastic geometry. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, September 13–18, 2004. With additional contributions by D. Hug, V. Capasso and E. Villa. Edited by W. Weil. Lecture Notes in Mathematics, 1892. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
Santaló, Luis A. Integral geometry and geometric probability. Second edition. With a foreword by Mark Kac. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

MDPT3426. Csoportok és geometriák
Tematika: A klasszikus testek és automorfizmusaik. Affin és projektív terek. Projektív lineáris csoportok. Poincaré-Birkhoff-Witt tétel. Ortogonális, unitér és szimplektikus belső szorzatok és a megfelelő csoportok. Kvadratikus és Hermite-féle sokaságok. Poláris terek és általánosított négyszögek.

Klasszikus csoportok izomorfiái. Kvaterniók és oktávok. Blokkrendszerek. Többszörösen tranzitív véges permutatációcsoportok. A sporadikus csoportok geometriája. Topológikus csoportok, Lie csoportok, algebrai csoportok. Permutációcsoportok a komputeren.

Irodalom:

J. Dieudonné, La Géométrie des Groupes Classiques, Springer, 1955.

D. E. Taylor, The geometry of classical groups, Heldermann, Berlin, 1992.

The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12; 2008 (http://www.gap-system.org)

MDPT3427. Véges ponthalmazok kombinatorikája

Gallai-egyenesek száma. Gráfok metszési száma, a metszési szám becslései. A metszési lemma alkalmazásai. Szemerédi-Trotter tétel. Egy ponthalmaz által meghatározott irányok száma. Egység távolságok száma. Konvex ponthalmaz Különböző távolságok száma. k-halmazok száma, konstrukciók és felső becslések. Erdős-Szekeres tétel, üres konvex ponthalmazok. Magasabb dimenziós problémák.

Irodalom:

J. Matoušek, Lectures on discrete geometry, Graduate Texts in Mathematics, volume 212, Springer, New York, 2002.

Sztochasztika képzési program

MDPT15. Valószínűségelmélet
A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle felépítése, 0–1 törvények, Borel–Cantelli-lemma. A véletlen változó fogalma, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, momentumok. Nevezetes eloszlások és tulajdonságaik. Karakterisztikus függvények, momentumgeneráló függvények fogalma és tulajdonságai. Nagy számok erős és gyenge törvényei, centrális határeloszlás tétel, iterált logaritmus tétel. Kolmogorov-féle háromsor tétel.
Irodalom:
Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba I, Budapest, 1982
Rényi: Valószínűségszámítás, Budapest, 1968

MDPT251. Valószínűségelmélet I
és
MDPT252. Valószínűségelmélet II
Bernoulli nagy-szám törvénye és a de Moivre–Laplace tétel. A valószínűségelmélet Kolmogorov-féle megalapozása. Véletlen vektorváltozók és eloszlásaik, az eloszlásfüggvény. Sztochasztikus folyamatok: Kolmogorov exisztenciatétele. Függetlenség és szorzatterek. Diszkrét, folytonos és szinguláris eloszlások; Lebesgue dekompozíció. Konvolúciók. Várható érték, momentumok, szórás, kovariancia és korreláció. Nevezetes speciális eloszlások. A konvergencia módjai. A nagy számok törvényei, 0-1 törvények, a három-sor tétel. Gyenge vagy eloszlásbeli konvergencia. Helly kiválasztási tétele, feszesség. Karakterisztikus függvények. Centrális határeloszlástételek. Többváltozós normális eloszlások és vektoriális centrális határeloszlástételek. Lokális centrális határeloszlástételek és aszimptotikus sorfejtések. Feltételes valószínűség és várható érték, feltételes eloszlások. Véletlen bolyongások. Martingálok, Markov láncok és stacionárius sorozatok. Brown mozgás és Gauss folyamatok: létezés és folytonosság. A Wiener folyamat differenciálhatatlansága. Iterált-logaritmus tételek, fluktuáció. Felújítási folyamatok, a Poisson folyamat. Kombinatorikus módszerek véletlen bolyongásokra, az arkusz-szinusz törvény.
Irodalom:
Billingsley: Probability and Measure, New York, 1986
S. Csörgő: Fifty-three Lectures on Probability, Ann Arbor, 1991 [egyetemi jegyzet]
Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba I, Budapest, 1982
Feller: Introduction to Probability Theory and its Application II, New York, 1971

Kallenberg: Foundations of Modern Probability, New York, 1997
Petrov: Független valószínűségi változók összegei [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1972
Rényi: Valószínűségszámítás, Budapest, 1968
Spitzer: Principles of Random Walks, New York, 1964

MDPT253. Matematikai statisztika I
és
MDPT254. Matematikai statisztika II

Empirikus eloszlások, a Glivenko–Cantelli tétel. Exponenciális családok. Fisher információ. Pontbecslések elmélete: elégségesség, a Fisher–Neyman faktorizációs tétel, torzítatlanság, konzisztencia, megengedhetőség, minimaxitás. A Rao–Blackwell tétel. Teljesség. A Cramér–Rao egyenlőtlenség, hatásosság. Becslési módszerek: a momentum módszer, a minimális távolságok módszere, a maximum-likelihood módszer. A maximum-likelihood becslések aszimptotikus tulajdonságai: konzisztencia, aszimptotikus normalitás és hatásosság. Bayes-becslések: megengedhetőség, minimax tulajdonság, torzítatlanság. Konfidencia intervallumok: egzakt és aszimptotikus módszerek. Kontingencia táblák elemzése: a log-lineáris modell. Torzítás-redukció, rövid bevezetés a "jackknife" és "bootstrap" eljárásokba. A hipotézisvizsgálat alapfogalmai: próbák, szignifikancia, erő, a Neyman–Person lemma, egyenletesen legerősebb torzítatlan tesztek, monoton likelihood hányadosok, lokálisan legjobb, invariáns és hasonló tesztek. χ^2-próbák, a normális eloszlás paramétereire vonatkozó klasszikus próbák, tiszta és becsléses illeszkedésvizsgálat. A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése. Regresszió és lineáris regresszió. Lineáris statisztikai módszerek: regresszióanalízis, legkisebb négyzetek módszere, szórásanalízis.
Irodalom:

Bickel, Doksum: Mathematical Statistics, Oakland, 1977
Borovkov: Mathematical Statistics, Amsterdam, 1998
Cramér: Mathematical Methods of Statistics, Princeton, 1946
Efron: Bootstrap methods: Another look at the jackknife, Ann. Statist. 7 (1979), 1-26
Kullback: Information Theory and Statistics, New York, 1959
Lehmann: Theory of Point Estimation, New York, 1983
Lehmann: Testing Statistical Hypotheses, New York, 1986

MDPT255. Bevezetés az ergodelméletbe

Átlagos és pontonkénti ergodikus tételek. A diszkrét spektrumú leképezések elmélete. Példák: az egységkör forgatása, Bernoulli-eltolás, a pék automorfizmus, Arnold macskája. A lánctörtekkel kapcsolatos ergodelméleti problémak.
Irodalom:

Halmos: Lectures on Ergodic Theory, Tokyo, 1956
Kornfeld, Szinaj, Fomin: Ergodelmélet [oroszul, van angol fordítás], Moszkva, 1980
Khinchin: Kettenbrüche, Leipzig, 1956

MDPT256. Bevezetés a Kolmogorov–Arnold–Moser elméletbe
A klasszikus mechanika soktestproblémája, Hamilton rendszerek perturbációja, a kis nevezők problémája. A twist-lemma bizonyitása és alkalmazása a korlátozott 3-test problémára.
Irodalom:
Moser: Lectures on Hamiltonian Systems, New York, 1968
Siegel, Moser: Lectures on Celestial Mechanics, New York, 1965

MDPT3500. Klasszikus határeloszlástételek
A korlátlanul osztható eloszlások kanonikus előállítása. A korlátlanul osztható eloszlásokhoz való konvergencia feltételei. Konvergencia a Poisson eloszláshoz. Egyforma eloszlású összeadandók: stabilis eloszlások vonzástartományai, korlátlanul osztható eloszlások parciális vonzástartományai. Nagy eltérések valószínűségei.
Irodalom:
Gnyegyenko, Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegeinek konvergenciája, Budapest, 1951
S. Csörgő, Haeusler, Mason: A probabilistic approach to the asymptotic distribution of sums of independent, identically distributed random variables, Advances in Appl. Math. 9 (1988), 259-333.
Petrov: Független valószínűségi változók összegei [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1972.

MDPT3501. Valószínűségi mértékek konvergenciája
Valószínűségi mértékek metrikus terek Borel halmazain, metrikus terek véletlen elemei. Gyenge konvergencia: alaptétel. A leképezési tétel. Szekvenciális relatív kompaktság és feszesség: Prohorov tétele. Gyenge konvergencia a $C[0,1]$ térben: Donsker tétele részletösszeg folyamatokra. A $D[0,1]$ tér Szkorohod topológiája. Gyenge konvergencia a $C[0,1]$ térben: Donsker tétele empirikus folyamatokra.
Irodalom:
Billingsley: Convergence of Probability Measures, New York, 1968
Gihman, Szkorohod: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elmélete I [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1977.

MDPT3502. Gauss-approximációk a sztochasztikában

A Wiener folyamat és a Brown híd néhány nevezetes funkcionáljának eloszlása. Eloszlásbeli konvergencia Szkorohod-konstrukciója. Független, azonos eloszlású véletlen változók összegeinek Szkorohod-beágyazása a Wiener folyamatba. A Wiener folyamat Lévy-féle folytonossági modulusa. Strassen és Brillinger approximációi a részletösszeg és az empirikus folyamatokra. A Komlós–Major–Tusnády approximációk.

Irodalom:

M. Csörgő, Révész: Strong Approximations in Probability and Statistics, Budapest, 1981

Szkorohod: Tanulmányok a véletlen folyamatok elméletében [oroszul, angol fordítás], Kiev, 1961

MDPT3503. Empirikus és kvantilis folyamatok

Empirikus eloszlásfüggvények, a Glivenko–Cantelli tétel. Kolmogorov–Szmirnov, Cramér–von Mises, Anderson-Darling statisztikák. Pontos és aszimptotikus eloszlások. A Brillinger- féle és a Komlós–Major–Tusnády approximációk. Az egyenletes kvantilis folyamat approximációi. Az egyenletes és az általános kvantilis folyamat távolsága, öröklött approximációk. A Bahadur–Kiefer tétel. Alkalmazások.

Irodalom:

M. Csörgő, S. Csörgő, Horváth: An Asymptotic Theory for Empirical Reliability and Concentration Processes, Berlin, 1986

M. Csörgő, Révész: Strong Approximations in Probability and Statistics, Budapest, 1981

Shorack, Wellner: Empirical Processes with Applications in Statistics, New York, 1986

MDPT3506. Extrémális eloszlások

Független, egyforma eloszlású véletlen változók maximuma: Gnyegyenko tétele a lehetséges határeloszlásokról. Az extrémális határeloszlások vonzástartományai. Kiterjesztés függő esetekre; korrelált Gauss sorozatok.

Irodalom:

de Haan: Regular Variation and Sample Extremes, Amsterdam, 1975

Galambos: The Asymptotic Distribution of Extreme Order Statistics, Malabar, 1987

MDPT3508. A sztochasztikus folyamatok elemei

Sztochasztikus folyamatok diszkrét időben vagy megszámlálható állapottérben: válogatott fejezetek a Markov láncok, a születési-halálozási, felújítási és elágazó folyamatok, valamint a diszkrét idejű martingálok elméletéből.

Irodalom:

Gihman, Szkorohod: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elmélete I [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1965
Gihman, Szkorohod: A sztochasztikus folyamatok elmélete I [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1971
Takács: Stochastic Processes, London, 1966
Harris: Theory of Branching Processes, New York, 1989
Móri: Diszkrét paraméterű martingálok, Budapest, 1999

MDPT3509. Markov láncok
A Markov tulajdonság ekvivalens alakjai. Többlépéses átmenetvalószínűségek, homogén láncok. Az állapotok osztályozása. Határeloszlások átmenetvalószínűségekre. Tételek határeloszlások és stacionárius eloszlás létezésére. Alkalmazások.
Irodalom:
Gihman, Szkorohod: A sztochasztikus folyamatok elmélete I [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1971
Kemeny, Snell: Finite Markov Chains, New York, 1960
Kemeny, Snell, Knapp: Denumerable Markov Chains, Princeton, 1966

MDPT3510. Elágazó folyamatok
Bevezetés az elágazó folyamatok elméletébe: a Bienaymé–Galton–Watson folyamat. Többtípusú elágazó folyamatok. Kortól függő elágazó folyamatok folytonos időben. Bevándorlás és diffúzió.
Irodalom:
Harris: Theory of Branching Processes, New York, 1989
Szevastyanov: Elágazó folyamatok [oroszul], Moszkva, 1971

MDPT3511. Martingálok
Diszkrét paraméterű martingálok és szemimartingálok. Az opciós mintavétel tétele és a felmetszések száma. A martingál konvergenciatétel. Fordított és reguláris martingálok. Négyzetesen integrálható martingálok és a martingál centrális határeloszlástétel. Optimális stratégiák. A folytonos idejű martingálok elemei.
Irodalom:
S. Csörgő: Fifty-three Lectures on Probability, Ann Arbor, 1991 [egyetemi jegyzet]
Móri: Diszkrét paraméterű martingálok, Budapest, 1999

MDPT3512. Sztochasztikus folyamatok és mezők
Bevezetés a sztochasztikus folyamatok és mezők általános elméletébe. Válogatott fejezetek a független növekményű, másodrendű, Gauss és Markov folyamatok elméletéből, valamint a sztochasztikus mezők spektrálelméletéből.

Irodalom:
Gihman, Szkorohod: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elmélete I [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1965
Gihman, Szkorohod: A sztochasztikus folyamatok elmélete I, II, III [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1971, 1973, 1975

MDPT3513. Sztochasztikus analízis
Folytonos idejű martingálok, filtrációk, megállási idők. Brown mozgás. Sztochasztikus integrálok, az Itô formula. Sztochasztikus differenciálegyenletek és a kapcsolatos martingálproblémák. Gyenge és erős megoldások.
Irodalom:
Gihman, Szkorohod: A sztochasztikus folyamatok elmélete III [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1975
Karatzas, Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, New York, 1991

MDPT3514. Markov és diffúziós folyamatok
A Markov operátorok félcsoportja, Hille–Yosida tétel. Kolmogorov egyenletei. A Feynman–Kac formula. A sztochasztikus integrál. A sztochasztikus differenciálegyenletek általános elmélete. Kapcsolódás a tőzsde matematikájához.
Irodalom:
Feller: Introduction to Probability Theory and its Application II, New York, 1971
Kac: Probability and Related Topics in Physical Sciences, New York, 1957
Kallenberg: Foundations of Modern Probability, New York, 1997
Karatzas, Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, New York, 1991
McKean: Stochastic Integrals, New York, 1969

MDPT3515. Matematikai fizika: konzervatív rendszerek
A d-dimenziós tórusz algebrai automorfizmusai. Szóró és félig szóró biliárdok. A szimbolikus dinamika módszere, Markov felbontás, a termodinamikai formalizmus. A Bowen–Ruelle–Sinai-mérték. Intervallum-leképezések. Sarkovszkij-tétel, abszolút folytonos invariáns mérték létezése.
Irodalom:
Kornfeld, Szinaj, Fomin: Ergodelmélet [oroszul, van angol fordítás], Moszkva, 1980
Bowen: Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 154 (1971), 337-397.
Collet, Eckmann: Iterated Maps on the Interval, Boston, 1980

MDPT3516. A statisztikus fizika matematikai módszerei

A Dobrusin–Lanford–Ruelle mérték, a fázisátmenet létezésének bizonyítása a kontúr módszerrel, a Dobrusin-féle unicitás kritérium, korrelációs egyenlőtlenségek (FKG, Griffiths), a Kirkwood–Salzburg egyenletrendszer, analitikus módszerek (Lee–Yang tétel), az Ising- modell Onsager-féle egzakt megoldása.
Irodalom:
Preston: Gibbs States on Countable Sets, Cambridge, 1974
Ruelle: Statistical Mechanics: Rigorous Results, Amsterdam, 1969
Sinai: Theory of Phase Transitions: Rigorous Results, Budapest, 1982

MDPT3517. Ergodelmélet
A Lebesgue-spektrumú leképezések elmélete. A mértékelmélet Rohlin-féle felépítése: mérhető partíciók elmélete. A dinamikai rendszerek Kolmogorov–Rohlin–Sinai elmélete: az entrópia.
Irodalom:
Rokhlin: Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Amer. Math. Soc. Transl. 49 (1966), 171-209.
Kornfeld, Szinaj, Fomin: Ergodelmélet [oroszul, van angol fordítás], Moszkva, 1980

MDPT3518. Többváltozós statisztikai analízis
Fontosabb statisztikák eloszlása többdimenziós normális eloszlás esetén. Becslés és tesztelés a többdimenziós normális modellben, a modellre vonatkozó tesztek. Lineáris modellek, szórás- és kovariancia-analízis. Parciális és többszörös regresszió, kanonikus korreláció; függetlenségi tesztek. Diszkrimináns- és klaszter-analízis, faktor- és főkomponens-analízis.
Irodalom:
Johnson, Wichern: Applied Multivariate Statistical Analysis, Upper Saddle River, 1992

MDPT3519. Lineáris statisztikai modellek
A Gauss–Markov tétel. Lineáris regresszió, szórás- és kovariancia-analízis, logit, probit és log-lináris modellek. Általánosított lináris modellek és komponenseik, reziduálisok. Folytonos és bináris minták. Likelihood és kvázi-likelihood függvények és becslési egyenletek; optimalitás.
Irodalom:
Neter, Kutner, Nachtsheim, Wasserman: Applied Linear Regression Models, Chicago, 1990
McCullagh, Nelder: Generalized Linear Models, London, 1996

MDPT3520. Idősorok statisztikai analízise
Dekompozíció: trend, regresszió és ciklikus komponensek. Stacionárius sorozatok és spektrális reprezentációjuk. Spektrális sűrűségek és autoregresszív mozgó-átlag folyamatok: predikció és becslés. Integrált autoregresszív

mozgó-átlag folyamatok. Spektrális statisztika: periodogrammok és aszimptotikus viselkedésük.
Irodalom:
Brockwell, Davis: Time Series: Theory and Methods, New York, 1996

MDPT3521. Sztochasztikus folyamatok statisztikája
Gauss folyamatok spektrálelmélete. Az előrejelzés és szűrés problémája. A Kolmogorov–Wiener és a Kalman szűrő. A Gauss-Markov folyamat ekvivalens definíciói és paramétereinek becslése. A sztochasztikus kontroll explicit módon megoldható feladatai: riasztás problémája, a "kétkarú bandita".
Irodalom:
DeGroot: Optimal Statistical Decisions, New York (1970).
Liptser, Shiryaev: A sztochasztikus folyamatok statisztikája [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1974
Rozanov: Stacionárius sztochasztikus folyamatok [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1963
Shiryaev: Szekvenciális statisztikai analizis [oroszul, angol fordítás], Moszkva, 1976

MDPT3522. Nemparametrikus statisztika
Sűrűség- és regressziófüggvények hisztogram és magfüggvény típusú becslései. Konzisztencia, torzítás, aszimptotikus eloszlás és hatásosság. A sávszélesség választásának problémája. Rangstatisztikák és aszimptotikus eloszlásuk. Tiszta és összetett illeszkedésvizsgálatok, függetlenségi próbák.
Irodalom:
Devroye: A Course in Density Estimation, Boston, 1987
Hájek, Šidák: Theory of Rank Tests, Prague, 1967
Rosenblatt: Curve estimates, Ann. Math. Statist. 42 (1971), 1815-1842
Shorack, Wellner: Empirical Processes with Applications in Statistics, New York, 1986

MDPT3525. Aszimptotikus módszerek a matematikai statisztikában
Válogatott fejezetek a parametrikus és nemparametrikus matematikai statisztika aszimptotikus eljárásaiból. Rendstatisztikák lineáris kombinációinak aszimptotikus normalitása, eltolás-skála eloszláscsaládok aszimptotikusan optimális tesztjei.
Irodalom:
Serfling: Approximation Theorems of Mathematical Statistics, New York, 1980

MDPT3526. Alkalmazott valószínűségszámítás

Válogatottt fejezetek az alkalmazott valószínűségszámításból: a tömegkiszolgálás és sorbanállás valószínűségi modelljei, a megbízhatóságelmélet eloszlásosztályai. Aszimptotikus eljárások hosszú időre.

Irodalom:

Gnyegyenko, Kovalenko: Bevezetés a tömegkiszolgálás elméletébe [oroszul], Moszkva, 1966

Takács: Introduction to the Theory of Queues, New York, 1962

MDPT3529. Nagyméretű gráfok limesze.

Sűrű súlyozott gráfok cut-normája, cut-távolsága, az ebben a távolságban történő konvergencia ekvivalens definíciói a gráfon, mint határobjektum. Kapcsolat a statisztikai fizika fogalmaival (alapállapoti energia, szabadenergia, stb.) Szemerédi regularitási lemmájának változatai. Ezek bizonyítása analitikus módszerekkel. Gráffüggvények tesztelhetőségének ekvivalens definíciói.

Irodalom:

Lovász, L.; Szegedy, B.: Szemerédi's lemma for the analyst. (English summary) Geom. Funct. Anal. 17 (2007), no. 1, 252–270.

Borgs, C.; Chayes, J; Lovász, L.; Sós, V.; Vesztergombi, K.: Convergent sequences of dense graphs. I. Subgraph frequencies, metric properties and testing. Adv. Math. 219 (2008), no. 6, 1801–1851.

MDPT3530. A. N. Kolmogorov matematikai munkássága

Új valószínűségszámítási eredmények a "Grundbegriffe"-ben. Analitikus módszerek a valószínűségszámításban: Kolmogorov egyenletei. A stacionárius Gauss-folyamatok elmélete: a Kolmogorov-Wiener szűrő. A Kolmogorov-próba. Dinamikai rendszerek stabilitása: a KAM elmélet. Információelméleti módszerek a dinamikai rendszerek elméleteben. A komplexitás Kolmogorov-féle definiciója.

Irodalom:

Kolmogorov, A. N.: Valószínűségszámítás (orosz nyelvű cikkgyűjtemény, az eredeti dolgozatok egy része nem orosz nyelvű)

Rohlin, V. A.: A Lebesgue-tér egzakt endomorfizmusai; Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 14 (1964) 443–474.

Siegel, Carl Ludwig; Moser, Jürgen K.: Lectures on celestial mechanics. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 187. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

Zvonkin, A. K.; Levin, L. A.: The complexity of finite objects and the basing of the concepts of information and randomness on the theory of algorithms. (oroszul, van angol fordítás) Uspehi Mat. Nauk 25 (1970), no. 6(156), 85–127.

Matematikadidaktikai kurzusok:

MDPT261. Fejezetek az algebra, a számelmélet, a geometria és a kombinatorika közép- és felsőfokú tanításának módszertanából
Betűs kifejezések, formalizálás. A klasszikus algebra elemeinek tanítási lehetőségei. Egyenletek, egyenietrendszerek tanítása. A lineáris algebra alapjainak tanítása induktív módon. Algebrai struktúrák bevezetése példákon keresztül; analógia, általánosítás és absztrakció. Felfedeztetés a számelméletben; konkrét példák, általános sejtés, a sejtés bizonyítása. Az euklideszi geometria tanítása induktív és deduktív módon. A nemeuklideszi geometriák tanítási lehetőségei a középfokú oktatásban. Egyszeru összeszámlálási problémák elemi megoldásától a formális hatványsorok alkalmazásáig. Gráfelméleti fogalmak és tételek tanítása konkrét példákon keresztül.
it Irodalom:
Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába
Fried Ervin: Absztrakt algebra - elemi úton
Dienes Zoltán: Építsükfel a matematikát
Gyapjas Ferenc: A kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának módszertani problémái
Pólya György: A gondolkodás iskolája
Pólya György: Indukció és analógia
Hans Freudenthal: Mathematics as an Educational Task Hans Freudenthal: Weeding and Sowing
Courant-Robbins: Mi a matematika?
Rényi Alfréd: Ars mathematica

MDPT262. Fejezetek az analízis, valamint a valószínűségszámítás és statisztika közép- és felsőfokú tanításának módszertanából
Az analízis (kalkulus) alapvető fogalmainak (határérték, folytonosság, differenciálhányados, integrál) előkészítése a középiskolában; a fogalmak bevezetésének lehetséges útjai: induktív, deduktív és konstruktív út. Az analízis elemeinek alkalmazásai a hétköznapi életben és a matematika más területein. Leíró statisztika és a hétköznapi élet. Statisztikai adatok megjelenítése, kapcsolódó fogalmak tanítása. Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. Statisztikai mérőszámok és tulajdonságaik; adatsokaság várható értéke és szórása. A valószínűség fogalmának kialakítása. A valószínűségi változó fogalmának kialakítása konkrét példákon keresztül. Diszkrét valószínűségi változók; eloszlásuk, várható értékük, szórásuk. A nagy számok törvényének tanítási lehetőségei.
Irodalom:
Pintér Lajos: Analízis I-II.

Robert M. Young: Excursions in Calculus - An Interplay of the Continuous and the Discrete
Nemetz Tibor-Wintsche Gergely: Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek
Gyapjas Ferenc: A kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának módszertani problémái
Pólya György: Indukció és analógia
Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába
Alan H. Schoenfeld: Mathematical Thinking and Problem Solving
Courant-Robbins: Mi a matematika?
Rényi Alfréd: Ars mathematica

MDPT3115. Egyetemi algebraoktatás a 20. században
Az algebra helyzete a 20. század elején. A modern algebra előfutárai és áttörése. Van der Waerden, Bourbaki, Jacobson, Rédei, Birkhoff könyveinek összehasonlítása. A század nagy újításai: hálók, kategóriák, univerzális algebra, homologikus algebra, stb.; szerepük az oktatásban. A hazai oktatás anyaga és tankönyvei Kőnig Gyulától napjainkig.
Irodalom:
Birkhoff–MacLane: Algebra
Birkhoff–Bartee: A modern algebra a számítógéptudományban
Corry: Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures
Van der Waerden: Moderne Algebra
Rédei: Algebra
Jacobson: Lectures on Abstract Algebra; General Algebra
válogatott történeti jegyzetek Bourbaki könyveiből
válogatott cikkek a Mathematical Intelligencer c. folyóiratból
válogatott magyar nyelvű matematikatörténeti publikációk

MDPT3116. Néhány kérdés a matematika kultúrtörténetéből
A deduktív matematika kialakulása, a hellén kor matematikája. Az iszlám kultúrák matematikája. A reneszánsz kor európai matematikája. A magasabbfokú egyenletek megoldása, ill. megoldhatósága Mezopotámiától Galois-ig.
Irodalom:
Boyer: A History of Mathematics
Corry: Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures
Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
Rashed: The Development of Arabic Mathematics
Van der Waerden: Egy tudomány ébredése
válogatott matematikatörténeti cikkek

MDPT3229. Az analízis alapvető fogalmainak különféle bevezetése

A középiskolákban és egyetemeken használatos tankönyvekben szereplő, a klasszikus analízisbe tartozó anyag felépítése. Az analízis formális, a határérték szemléletes fogalmára épülő felépítése középiskolák számára. Az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények. Hatványsorok szerepe. Az analízis fogalmainak történeti fejlődése.
Irodalom: 35, 37, 50, 56, 67

MDPT3230. Az analízis néhány érdekes problémája, és ezek tanítás során történő feldolgozása
Elsősorban olyan kérdéskörök tárgyalására kerül sor, amelyek a differenciálás, integrálás, a sorozatok és a végtelen sorok elméletével vannak szoros kapcsolatban. A fő eszközök: numerikus sorok, hatványsorok, trigonometrikus sorok, általános függvénysorok. A fő problémák közül néhány:

– Az e, π többféle sor-előállítása, irracionalitása, ill. transzcendens volta;
– $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ többféle bizonyítása
– $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ irracionalitása
– Példák és ellenpéldák a függvénysorok témaköréből (integrálhatóság, folytonosság, differenciálhatóság).
– Példák mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható függvényre (Riemann próbálkozásai; Weierstrass példája, stb.).

A tárgyalás módszere kiterjed arra, hogy a fenti problémák hogyan építhetők be az oktatásba (egyetemen, matematika tagozatos középiskolai osztályban, matematika szakkörökön).
Irodalom: 15, 21, 28, 35, 42, 46, 53, 54, 67, 69

MDPT3313. Függvények és dinamikus rendszerek vizsgálatának számítógépes módszerei
Számítógépalgebrai alapismeretek: szimbolikus, numerikus műveletek, listák, adatstruktúrák, értékadás, helyettesítés, minták kezelése. 2D, 3D ábrázolások, a számítógépes dinamikus vizualizáció alapjai. Kalkulus számítógépen, Taylor féle sorfejtések. Lineáris algebra, koordinátageometria, vektoranalízis számítógépen. Fourier sorok, Fourier transzformáció, Laplace transzformáció és alkalmazásaik. Görbeillesztési feladatok. Matematikai algoritmusok programozása, struktúrák kezelése, szabály alapú programozás, leképezések, iterációk, rekurziók: Newton iteráció, fixpontkeresés, differenciaegyenletek vizsgálata, bifurkációs diagramok készítése. Közönséges differenciálegyenletek, rendszerek vizsgálata számítógéppel: vektormezők, megoldások, trajektóriák vizsgálata, ábrázolása. Differenciálegyenletek szim-

bolikus és numerikus megoldása. Kvalitatív módszerek: egyensúlyi helyzetek tulajdonságai, stabilitási vizsgálatok, Ljapunov függvények, linearizáció, a fázisleképezés vizsgálata. A Dirac féle delta függvényt tartalmazó differenciálegyenletek vizsgálata, impulzív rendszerek. Késleltetett rendszerek számítógépes vizsgálata. Parciális differenciálegyenletek megoldása számítógépen Fourier módszerrel, közelítő megoldás véges differenciákkal. Alkalmazások: kísérletek szimulációk egyszerű diszkrét és folytonos populációdinamikai és epidemiológiai modellekkel, mechanikai, biológiai stb. rezgő rendszerekkel, a csillapítás és a külső gerjesztés, késleltetések hatásának vizsgálata.
Szoftverek: Mathematica, ODE Architect
Kötelező irodalom:
T. P. Dreyer, Modelling with Ordinary Differential Equations, CRC Press, 1993.
D. Kaplan, L. Glass, Understanding Nonlinear Dynamics, Springer, 1995.
Karsai J., Mathematical and visualizaton packages: Mathematica applications, CD-ROM, 2008.
Karsai J., Computer-aided study of mathematical models, CD-ROM, 2008.
Ajánlott irodalom:
E. Beltrami, Mathematics for Dynamic Modeling, Academic Press, 1998.
R. H. Enns, G. C. McGuire, Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers, Birkhauser, 2001.
C. S. Bohun, S. McCollum , T. van Roode, R. Illner , Mathematical Modelling, A Case Study Approach, AMS, Student Mathematical Library, Vol. 27, 2005.
V. G. Ghanza, E. V. Vorozhtsov: Numerical Solutions for Partial Differential Equations. Problem Solving Using Mathematica, CRC Press, 1996.
R. J. Gaylord, P. R. Wellin, Computer Simulations with Mathematica, Telos-Springer, 1995.
F. R. Giordano, M. D. Weir, W. P. Fox, A First Course in Mathematical Modeling, Brooks/Cole Publishing Company, 1997.
A. Gray, M. J. Mezzino Jr., M. Pinsky, Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica: An Integrated Multimedia Approach, TELOS/Springer-Verlag, 1997.
M. L. de Jong, Mathematica For Calculus-Based Physics, Addison-Wesley, 1999.
J. Karsai, Models of Impulsive Phenomena, Typotex, Budapest, 2002.
M.M. Meerrschaert, Mathematical Modelling, Academic Press, 1999.
R. Mickens, Oscillation in Planar Dynamic Systems, Word Scientific, 1994.
D. J. Murray, Mathematical Biology, 3rd. ed., Springer, 2001.
A.M. Samolienko, N.A. Perestyuk, Impulsive Differential Equations, Word Scientific, 1994.

MDPT3420. Számítógép programok használata a geometria tanításához és tanulásához

A kurzus fő célja a Maple, a Mathematica és a Cinderella programok oktatási célú lehetőségeinek megismerése.

A programok alapfunkciói. Geometriai objektumok kezelése az euklideszi, a hiperbolikus és az elliptikus síkon. Szerkesztési feladatok interaktív megoldása a Cinderella programmal. Mértani helyek animációs kirajzolása. Interaktív feladatsorok összeállítása, tesztelése, elhelyezése a web-en.

Ajánlott irodalom:

Richter-Gebert, Kortenkamp, The interactive geometry software Cinderella. With 1 CD-ROM, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

MDPT3527. A véletlen története I
és
MDPT3528. A véletlen története II

A véletlen prehistóriája nyelvészeti és régészeti leletekben és középkori szövegekben. Luca Paccioli, Cardano és Galilei. A Pascal–Fermat levelezés 1654-ben. Huygenstől de Montmortig. Jacob Bernoulli: *Ars conjectandi*, 1713; Leibniz és Bernoulli álma. Graunt és a mortalitási táblázatok. Nicolaus és Daniel Bernoulli: morális matematika? A harang alakú görbe: de Moivre. Hajózni muszáj: Eulertől a Gauss–Laplace szintézisig. A XIX. század csendes valószínűségi forradalma. Az angol statisztikai iskola. Az orosz valószínűségi iskola Csebisevtől Kolmogorovig.

Irodalom:

David: Games, Gods and Gambling, London, 1962

Hald: A History of Probability and Statistics before 1750, New York, 1990

Hald: A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930, New York, 1998

Stigler: The History of Statistics before 1990, Cambridge, Massachusetts, 1986

MDPT3600. Problémamegoldás a matematikában és a matematika tanításában

Probléma a matematikában, különféle értelmezések. A problémamegoldási folyamat modelljei: Pólya heurisztikus modellje, Schoenfeld heurisztikus modellje, Mason modellje. A problémamegoldás sémája; általános és speciális heurisztikák, ezek bemutatása konkrét problémákon keresztül. A problémamegoldási képességek fejlesztésének alapfeltételei Wittmann szerint. Problémamegoldási stratégiák, heurisztikus elvek, kontrollmódszerek.

Irodalom:

Pólya György: A gondolkodás iskolája

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II.

Pólya György: A matematikai gondolkodás művészete I-II. (Indukció és analógia; A plauzibilis következtetés)
Alan H. Schoenfeld: Mathematical Problem Solving
Alan H. Schoenfeld (ed.): Mathematical Thinking and Problem Solving
Erich Ch. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts
Arthur Engel: Problem-Solving Strategies
Loren C. Larson: Problem-Solving Through Problems
Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába

MDPT3601. Számítógépes alkalmazások az analízis fogalmainak oktatásához
Számítógép-algebrai alapismeretek: szimbolikus, numerikus müveletek, függvények, egyenletek. Számítógépes vizualizáció alapjai: színezés, animáció, 2D és 3D ábrázolások. A matematikai programozás alapjai: helyettesítések, listák programozása, iteráció, rekurzió. A számítógépes illusztráció eszközei és módszerei: elemi függvénytan (függvényábrázolás, transzformációk), lineáris algebra elemei (alterek, síkok, transzformációk stb.), határérték, deriváltak (linearizáció és magasabb rendű közelítések), integrál, sorfejtések, iterációs algoritmusok (Newton iteráció, fixpontkeresés stb.), görbeillesztés, közönséges differenciálegyenletek. A számítógépes kísérletezés alapeszközei, interaktív alkalmazások.
Szoftverek:
Mathematica, Maple, ODE-Architect
Irodalom:
F. R. Giordano, M. D. Weir, W. P. Fox: A First Course in Mathematical Modeling, Brooks/Cole Publishing Company, 1997.
O. Gloor, B. Amrhein, R. E. Maeder: Illustrated Mathematics, Visualization of Mathematical Objects with Mathematica, Telos-Springer, 1995.
ODE Architect: The ultimate ODE power tool, Wiley, 1999.
R. J. Gaylord, P. R. Wellin: Computer Simulations with Mathematica, Telos-Springer, 1995.
M. M. Neumann, T.L. Miller: Mathematica projects for vector calculus, Kendall/Hunt, 1996.
Karsai J.: Impulzív jelenségek modelljei, Mathematica kísérletek, Typotex kiadó, 2002.

MDPT3602. Számítógéppel támogatott matematikaoktatás eszközei és módszerei
A számítógépes prezentációk, oktató anyagok alkalmazásának didaktikai vonatkozásai: elvek, elvárások, lehetőségek, szabályok, következmények. A tantermi foglalkozások és az egyéni tanulás speciális követelményei. Multimédia alapismeretek, a prezentációkészítés és használat alapjai. Egyszerű prezentációk készítésének módszerei, eszközei. Számítógépalgebrai

alapismeretek: szimbolikus, numerikus műveletek, függvények, egyenletek. Számítógépes vizualizáció alapjai: színezés, animáció, 2D és 3D ábrázolások. Interaktív oktatási anyagok készítése, a számítógépes kísérletezés eszközei, módszerei. Önálló számítógépes tanulói tevékenységek, projektek tervezése. Példák: geometriai objektumok és szerkesztések, függvények és transzformációk, a kalkulus alapfogalmai és eljárásai, sorfejtések, görbeillesztés, differenciálegyenletek.
Szoftverek:
Euklides, Mathematica, Maple, ODE-Architect
Irodalom:
O. Gloor, B. Amrhein, R. E. Maeder: Illustrated Mathematics, Visualization of Mathematical Objects with Mathematica, Telos-Springer, 1995.
ODE Architect: The ultimate ODE power tool, Wiley, 1999.
R. J. Gaylord, P. R. Wellin: Computer Simulations with Mathematica, Telos-Springer, 1995.
M. M. Neumann, T.L. Miller: Mathematica projects for vector calculus, Kendall/Hunt, 1996.
Karsai J.: Impulzív jelenségek modelljei, Mathematica kísérletek, TyPotex kiadó, 2002.
Pétery K.: Bemutató készítése PowerPoint-tal, Reál, 1995.
T. Vaughan: Multimedia: Making it work, McGraw-Hill, 1994.

VI. A komplex vizsga tárgyai és azok tematikái

SZTE, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

2016. augusztus 30.

A 11 komplexvizsga-tárgyat az alábbi "Tartalomjegyzék" tartalmazza. A vizsgázó számára ezek közül kettőt kell kijelölni úgy, hogy az egyik kijelölt tárgyból kettő, a másikból pedig egy részterületet kell előírni a kettős indexeléssel felsorolt területekből. Jelentős (azaz 50 százalékot elérő) átfedést mutató részterületek egyidejűleg nem jelölhetők ki. Például az 1.1. (Klasszikus algebrai struktúrák) részterület jelentős átfedést mutat a 2.1. (Véges csoportok és testek) részterülettel, a 3.l. (Mérték- és integrálelmélet) pedig a 4.1. (Valós függvénytan elemei) részterülettel.

Az elsőnek említett tárgy (ahol két részterület kell) nem lehet a 11. Matematikadidaktika. A másodiknak említett tárgy csak matematikadidaktikai témát választó hallgató esetén lehet Matematikadidaktika, de ilyen hallgató esetén sem szükségképpen az.

Például egy doktorandusz hallgató számára ki lehet jelölni az alábbi két komplexvizsga-tárgyat:

2. Csoport- és félcsoportelmélet (2.2. Csoportelmélet, 2.3. Félcsoportelmélet) és

6. Differenciálegyenletek (6.3. Dinamikus rendszerek).

Ha ez a doktorandusz matematikadidaktikai témában dolgozik, akkor — példánkat folyatva— a 6. Differenciálegyenletek *helyett* lehetséges (de nem kötelező) a 11. Matematikadidaktika tárgy is (amelynek egyetlen részterülete van, önmaga).

Tartalomjegyzék

1. Univerzális algebra és hálóelmélet

1.1. Klasszikus algebrai struktúrák

• Általános algebrai fogalmak és összefüggéseik (részstruktúra, generátorrendszer, izomorfia, homomorfia, faktorstruktúra, direkt szorzat). Izomorfiatételek.

• Az általános algebrai fogalmak és megállapítások csoportok és gyűrűk esetén.

• Egyszerű csoportok és gyűrűk.

• Klasszikus direkt felbontási tételek csoportokra és gyűrűkre.

• Főideálgyűrűk.

• Disztributív és moduláris hálók.

• Előállítási tételek csoportokra, gyűrűkre és Boole-algebrákra.

• A számfogalom felépítése.

1.2. Univerzális algebra

• Univerzális algebrai alapfogalmak és összefüggéseik.

• Direkt szorzat, további szorzatfajták, Birkhoff szubdirekt felbontási tétele.

• Lezárási operátorok, lezárási rendszerek.

• Kongruenciaháló.

• Szabad algebra.

• Varietások.

• Azonosságokkal jellemezhető tulajdonságok varietásokon. Malcev és Pixley tétele.

• Minimális varietások.

• Primál algebra által generált varietások.

1.3. Klónok

• Galois-kapcsolatok.

• Absztrakt klónok, műveletklónok és relációklónok; kapcsolatuk.

• Nevezetes teljességi tételek.

• Véges halmazok klónhálói.

- Maximális klónok.
- Minimális klónok.
- Primitív pozitív klónok.

1.4. Véges algebra

- Rosenberg tétele, alkalmazásai a függvényteljességre.
- A primál algebrák Stone–Hu-féle dualitáselmélete.
- A primál algebrák általánosításai.
- Lokálisan véges varietások.
- Varietás spektruma.
- Relációklónok és szabad algebrák kapcsolata.
- Véges azonosságbázisú algebrák. Post és Lyndon tételei.
- Szelíd kongruenciák.

1.5. Hálóelmélet

- Hálóelméleti alapfogalmak, dualitás, teljes hálók.
- Algebrai hálók, részalgebrahálók.
- Disztributív hálók: Birkhoff és Stone reprezentációs tétele, véges disztributív hálók szerkezete.
- Birkhoff és Dedekind kritériuma, a három elem által generált szabad moduláris és disztributív háló.
- Hálókongruenciák.
- Moduláris hálók: intervallumok, elemfelbontások.
- Geometriai hálók és komplementumos moduláris hálók.
- Projektív geometriák mint moduláris hálók.
- Hálóvarietások.

1.6. Hálók koordinátázás-elmélete

- Geometriai hálók és projektív geometriák.
- A Desargues-féle geometriai hálók (direkt tényezőinek) koordinátázása.
- Neumann-keretekkel történő koordinátázás.
- Huhn-gyémánt és n-disztributív hálók.
- Gyémánt által prezentált szubdirekt irreducibilis hálók.

- Gyémánt által generált Desargues-féle hálók koordinátázása.
- Neumann-féle dimenziófüggvény.
- Lineáris hálók bizonyításelmélete.

2. Csoport- és félcsoportelmélet

2.1. Véges csoportok és testek

- Sylow-tételek, véges p-csoportok.
- Véges nilpotens és feloldható csoportok.
- Testbővítések; felbontási test és normális testbővítés.
- Véges testek.
- Tökéletes testek.
- A Galois-elmélet főtétele.
- Egyenletek megoldása gyökmennyiségekkel.
- A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete.

2.2. Csoportelmélet

- Testek és ferdetestek multiplikatív csoportja.
- Permutációcsoportok (primitív és többszörösen tranzitív csoportok, koszorúszorzat, Frobenius-csoportok).
- Szabad csoportok.
- Feloldható csoportok.
- p-csoportok. Nilpotens csoportok.
- A transzfer.
- A Burnside-probléma.
- Mátrix-csoportok. Véges egyszerű csoportok.
- Részcsoporthálók.

2.3. Félcsoportelmélet

- Félcsoportelméleti alapfogalmak, félcsoportok ábrázolása transzformációkkal.
- Green-relációk.
- Reguláris $\mathcal{D}$-osztályok, Green-relációk reguláris félcsoportokon.

- 0-egyszerű félcsoportok, főfaktorok.
- Teljesen 0-egyszerű félcsoportok.
- Teljesen reguláris félcsoportok.
- Inverz félcsoportok elemi tulajdonságai, a Wagner–Preston-féle ábrázolás, a természetes rendezés.
- Fundamentális inverz félcsoportok, a Munn-féle ábrázolás.

2.4. Reguláris félcsoportok

- Reguláris félcsoportok kongruenciái, a kongruenciaháló.
- A teljesen reguláris félcsoportok finom szerkezete (Lallement tétele).
- E-unitér inverz félcsoportok: fedési tétel, P-tétel.
- Fundamentális ortodox félcsoportok, a Hall-féle ábrázolás.
- E-unitér reguláris félcsoportok.
- Lokálisan inverz félcsoportok.
- Fundamentális reguláris félcsoportok (Grillet és Nambooripad tétele).
- Reguláris félcsoportok általánosításai.

2.5. Félcsoportosztályok univerzális algebrai vizsgálata

- Félcsoportvarietások hálója, fontos részhálói.
- Végesbázis tulajdonság, szóprobléma.
- Szabad teljesen reguláris félcsoportok, a teljesen reguláris félcsoportok varietásainak hálója, a kötegvarietások hálója.
- Szabad inverz félcsoportok, az inverz félcsoportok varietásainak hálója.
- Reguláris félcsoportok egzisztenciavarietásai, biszabad objektumok.
- Azonosságfogalmak az egzisztenciavarietások hálójának néhány fontos részhálójában.
- Véges félcsoportok pszeudovarietásai.

3. Funkcionálanalízis

3.1. Mérték- és integrálelmélet

- Mérhetőségi tér, mérték, mérhető függvény, mérték szerinti integrál, nulla mértékű halmazok.

• Konvergencia tételek: Lebesgue majoráns és monoton konvergencia tételei, Fatou lemmája.

• Pozitív lineáris funkcionál Borel mérték szerinti integrálással való előállítása, Borel mérték regularitása.

• A Lebesgue mérték $\mathbf{R}^n$-en, helyettesítéssel való integrálás, parciális integrálás.

• Luzin és Jegorov tételei, a Hölder és Minkowski egyenlőtlenségek, az L^p függvényterek teljessége.

• Mértékterek szorzata, Fubini tétel, konvolúció.

• Komplex mértékek, a teljes változás mérték, Lebesgue felbontás, Radon–Nikodym derivált, Hahn felbontás.

• $\mathbf{R}^n$ Borel mértékeinek differenciálása, $\mathbf{R}$-beli Borel mérték eloszlásfüggvénye, korlátos változású függvények.

• Az L^p és $C_0(X)$ terek duálisai.

3.2. Topológikus vektorterek

• Lokálisan konvex terek, a Hahn–Banach-féle szétválasztási és kiterjesztési tételek, Banach limesz.

• Gyenge és gyenge -* topológiák, metrizálhatóság, lokális kompaktság, Alaoglu tétele.

• Konvex halmazok, a Krein–Milman és Krein–Smulian tételek.

• Topológikus csoportok, Haar mérték.

• Normált terek reflexivitása, az L^p és $C(X)$ terek duálisai.

• A Nyílt leképezések tétele, Zárt gráf tétel, Banach–Steinhaus tétel.

• Hilbert terek, altér ortogonális komplementere, ortonormált vektorrendszerek, Hilbert tér duálisa.

3.3. Banach algebrák

• Spetrum, a részalgebrától való függés, spektrálsugár.

• Kommutatív Banach algebrák, Gelfand transzformáció, a folytonos függvények $C(X)$ Banach algebrája, Wiener tétele abszolút konvergens Fourier sorokról.

• A Riesz–Dunford-féle függvénykalkulus holomorf függvényekkel.

• Kommutatív C^*-algebrák, függvénykalkulus normális elemre.

• C^*-algebra reprezentációja Hilbert tér operátoraival, a Gelfand–Naimark–Segal konstrukció.

3.4. Operátorelmélet

- Kompakt operátorok, spektrum, invariáns alterek.
- Fredholm operátorok, Fredholm index, lényeges spekrum.
- Normális, önadjungált, unitér operátorok Hilbert tereken, polárfelbontás, a projekcióháló, az erős és gyenge operátortopológia.
- Spektráltétel normális operátorra, s ezek kommutatív rendszereire.
- Függvénykalkulus, függvénymodell normális operátorra, multiplicitáselmélet.
- Neumann algebrák, a Bikommutáns tétel, Kaplansky sűrűségi tétele, kommutatív Neumann algebrák.
- Nemkorlátos operátorok, szimmetrikus és önadjungált operátorok, a Cayley transzformáció.
- Spektráltétel nemkorlátos normális operátorra, Stone tétele egyparaméteres unitér csoportokról.

4. Klasszikus analízis

4.1. Valós függvénytan elemei

- Metrikus terek, normált terek, topologikus terek. Konvergencia és folytonosság
- Függvénysorozatok és sorok, Stone–Weierstrass tétel
- Lebesgue integrál (Beppo Lévi tétele, Lebesgue majoráns tétele, Fatou lemmája)
- Monoton függvények kanonikus felbontása és differenciálása
- Riemann–Stieltjes integrál, Lebesgue–Stieltjes integrál
- A $C[0,1]$ függvénytér és duálisa
- A $L^2(\Omega), \Omega \subseteq \mathbf{R}$, függvénytér (Riesz–Fischer tétel, ortonormált rendszer, Parseval formula)
- Az $L^p(\Omega)$ függvénytér és duálisa

4.2. Komplex függvénytan

- Holomorf függvények (Cauchy integráltétele, Taylor és Laurent sorfejtés, Morera tétele)

• Cauchy integrálformulája és következményei (maximum tétel, Poisson formula, háromkör tétel)

• Holomorf függvények zérushelyei (izoláltság, az algebra alaptétele, Rouché tétele)

• Harmonikus függvények (középérték tétel, harmonikus konjugált, holomorf kiegészítés)

• Egész függvények szorzat előállítása, gamma függvény

• Holomorf függvények konvergens sorozatai (Weierstrass tétele, Vitali-Montel kiválasztási tétel)

• Riemann konformis leképezés tétele (a határon való folytonosság)

• Approximáció racionális függvényekkel és polinomokkal (Runge tétele)

• Mergelyan tétele, Mittag-Leffler tétel

4.3. Fourier sorok

• Fourier sorok pontonkénti konvergenciája (Dini, Dirichlet–Jordan és Dini–Lipschitz kritériumok)

• Fourier sorok pontonkénti szummálhatósága (Fejér és Lebesgue tételei, Lebesgue pont)

• Fourier sorok konvergenciája L^2-normában (legjobb approximációs tulajdonság, teljesség, Parseval formula)

• Függvényosztályok jellemzése Fourier sorok Fejér és Abel–Poisson közepeivel

• A konjugált sor szummálhatósága, a konjugált függvény

• Fourier sorok részletösszegeinek korlátossága L^p-normában

• Fourier sorok divergenciája (Fejér és Kolmogorov példái)

• Fourier sorok abszolut konvergenciája (Bernstein, Wiener és Lévi tételei)

4.4. Fourier integrálok

• L^1-beli függvény Fourier transzformáltja (szummálhatóság, unicitás, inverziós képlet)

• L^2-beli függvény Fourier transzformáltja (Plancherel tétele, szummálhatóság)

• L^p-beli függvény Fourier transzformáltja (Hausdorff–Young egyenlőtlenség, konvolúció-tétel).

- Disztribúció Fourier transzformáltja
- Hardy–Littlewood maximál operátor és tétel
- L^1-beli függvény Calderón–Zygmund felbontása
- Lineáris operátorok interpolációja: M. Riesz–Thorin tétel
- Lineáris operátorok interpolációja: Marcinkiewicz tétele
- L^p-beli függvény Hilbert transzformáltjának egzisztenciája
- Hilbert transzformált tulajdonságai: Kolmogorov és M. Riesz tételei

4.5. Harmonikus analízis

- H^p- és h^p-terek a komplex egységkörlapon, jellemzésük Poisson integrállal
- h^p-beli függvény peremfüggvényének egzisztenciája, Fatou tétele
- Holomorf függvény zérushelyeinek eloszlása, a Jensen képlet
- Blaschke szorzat, F. Riesz és Nevanlinna faktorizációs tételei
- A Riesz-fivérek tétele és ekvivalens átfogalmazásai
- Kanonikus faktorizáció a H^p-térben és az N osztályban
- Hardy-Littlewood maximál operátor és tétel
- Lineáris operátorok interpolációja: az M.Riesz–Thorin tétel és Marcinkiewicz tétele
- L^p-beli függvény Hilbert transzformáltjának egzisztenciája
- A Hilbert transzformált tulajdonságai: Kolmogorov és M. Riesz tételei
- A BMO- és VMO-tér, maximál függvény és Hilbert transzformált viselkedése a BMO-térben
- A valós és komplex H^1-tér ekvivalenciája, atomos felbontás, Fefferman dualitási tétele

4.6. Ortogonális sorok

- Az L^2-tér, ortogonális rendszer, Riesz–Fischer tétel, Parseval képlet
- Ortogonális polinomok és Gauss típusú kvadraturák
- A Haar rendszer, sorfejtés egyenletes és m.m. konvergenciája
- A Rademacher- és Walsh rendszer, sorfejtés m.m. konvergenciája és szummálhatósága
- Ortogonális sorok m.m. konvergenciája: Rademacher–Mensov tétel, Tandori tétele

• A Lebesgue függvények szerepe ortogonális sorok konvergenciájának vizsgálatában

• Ortongonális sorok feltétel nélküli konvergenciája: Orlicz és Tandori tételei

• Ortogonális sor $(C, 1)$-szummálhatósága

• Ortogonális sorok erős- és abszolut szummálhatósága

• Szinguláris integrálok konvergenciája: Lebesgue, Faddejev és Tandori tételei

5. Konstruktív analízis

5.1. Approximáció trigonometrikus és algebrai polinomokkal

• Legjobb approximáció egzisztenciája és unicitása
• Simasági modulusok és módosításaik
• Az approximációelmélet direkt tételei
• Az approximációelmélet inverz tételei
• Interpoláció

5.2. Approximáció lineáris eljárásokkal

• Pozitív operátorok és Korovkin tételei
• Konvolúciós eljárások
• Simasági modulusok és általánosításaik
• Direkt és inverz tételek

5.3. Ortogonális polinomok

• Mértékek, rekurziós együtthatók és ortogonális polinomok
• Klasszikus ortogonális polinomok
• Ortogonális polinomok zérushelyei
• Általános ortogonális polinomok
• Ortogonális polinomok a komplex egységkörön
• Ortogonális polinomok végtelen intervallumon
• Kvadratúra formulák

5.4. Potenciálelmélet és alkalmazásai

- Logaritmikus potenciálok
- Harmonikus függvények
- Szubharmonikus függvények
- Dirichlet probléma, balayage, Green függvény
- Potenciálok külső térben
- Freud-féle ortogonális polinomok elmélete
- Változó súllyal történő approximáció

5.5. Szummációelmélet

- Mátrix-eljárások
- Trigonometrikus sorok szummálhatósága
- Ortogonális sorok szummálhatósága
- Erős szummáció
- Fourier sorok erős approximációja

5.6. Nemlineáris approximáció

- Racionális approximáció
- Spline approximáció
- Fraktálok
- Waveletek
- n-with-ek

6. Differenciálegyenletek

6.1. A közönséges differenciálegyenletek elméletének alapjai

- Kezdetiérték-probléma megoldásának létezése, egyértelműsége, függése a kezdeti feltételektől
- Differenciálegyenlőtlenségek
- Lineáris rendszerek
- Másodrendű lineáris egyenletek

- Stabilitás
- Az első integrálok elmélete; integrálsokaságok
- Poincaré–Bendixson-tétel
- Differenciálegyenletek sokaságokon
- Peremértékproblémák.

6.2. A parciális differenciálegyenletek elméletének alapjai

- Korrekt és nem-korrekt kitűzésű feladatok
- Maximumelvek
- A hullám-, hővezetés-, Laplace-egyenletekre kitűzött problémák megoldásaira vonatkozó reprezentációs tételek
- Harmonikus függvények
- Hiperbolikus és parabolikus egyenletekre kitűzött vegyes feladatok klasszikus és általánosított megoldásai
- A $\partial_1^2 - \partial_2^2, \partial_0 - \sum_{i=1}^n \partial_i^2, \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ operátorok fundamentális megoldásai
- A Fourier-módszer

6.3. Dinamikus rendszerek

- Dinamikus rendszerek lokális tulajdonságai
- Dinamikus rendszerek határtulajdonságai
- Strukturális stabilitás. Grobman–Hartman-tétel
- Invariáns sokaságok létezése, símasága
- Disszipatív dinamikus rendszerek
- A globális attraktor tulajdonságai
- Az átlagolás módszere
- Lokális bifurkációelmélet
- Káosz
- Hamilton-rendszerek

6.4. Stabilitáselmélet

- Lineáris rendszerek stabilitása. Ljapunov első módszere. Dichotómiák
- A Ljapunov-féle direkt módszer
- Első közelítésben történő stabilitásvizsgálat. Kritikus esetek

- Periodikus mozgás stabilitása
- A stabilizálás problémája
- Mechanikai egyensúly stabilitása
- Totális stabilitás
- Strukturális stabilitás
- Rekurzív tulajdonságok. Ergodelmélet

6.5. Funkcionál-differenciálegyenletek

- A megoldások létezése, egyértelműsége, simasága, folytathatósága
- A megoldásoperátor tulajdonságai
- Lineáris, lineáris autonóm és lineáris periodikus rendszerek
- Stabilitás. Ljapunov-módszerek
- Invariáns sokaságok
- A megoldások viselkedése egyensúlyi helyzet és periodikus megoldás közelében
- Periodikus megoldások létezése
- Neutrális egyenletek
- Autonóm egyenletek geometriai elmélete

6.6. Parciális differenciálegyenletek függvényterekben

- A Dirichlet- és Neumann-probléma (klasszikus, erős, gyenge) megoldásainak létezése, egyértelműsége
- Sajátfüggvények szerinti sorfejtés
- A megoldások regularitása belső és határpontokban
- Perturbációs, variációs módszerek nemlineáris elliptikus egyenletekre
- Monoton operátorok módszere nemlineáris elliptikus egyenletekre
- Energiamódszerek parabolikus és hiperbolikus egyenletekre
- Félcsoportmódszerek: Hille–Yosida-tétel, analitikus félcsoportok

7. Konvex és diszkrét geometria

7.1. Konvex testek és klasszikus integrálgeometria

- Vegyes térfogat, Brünn–Minkowski tétel, Minkowski és Fenchel–Alexandrov egyenlőtlenségek

• Sűrűségek pontokra, egyenesekre, kinematikus sűrűség, síkbeli integrálformulák

• Steiner-formula, quermassintegrálok, Blaschke és Poincaré alapformulái

• Görbületi integrálok és alkalmazásaik

7.2. Algoritmikus geometria

• Politopok és síkrendszerek kódolása, permutációs táblák, ponthalmazok particionálása, síkrendszerek zónái, cellarendszerek bonyolultsága

• Adatstruktúrák, geometriai keresések

• Konvex burok algoritmikus meghatározása, algoritmusok legrosszabb eset és átlagos analízise

• Lineáris programozás geometriája

• Pont helyének meghatározása síkbeli egyenesrendszerben, legnagyobb konvex részhalmaz, minimális méretű szimplexek

• Hasonlóság megállapítására szolgáló eljárások

• Voronoi-diagramm meghatározása

• Trianguláció, legközelebbi szomszéd, minimális feszítőfa, ponthalmazok alakja probléma algoritmikus megoldása

• Pontrendszerek szeparálása, metszése

7.3. Geometriai algebra

• Affin és projektív síkok

• Desargues tétele és a koordinátatest, Papposz tétele és a kommutativitás, a koordinátatest karakterisztikája és a Fano-konfiguráció

• Kollineációk és a szemilineáris leképezések

• Szimplektikus és ortogonális geometria, a szimplektikus és az ortogonális csoport szerkezete

• Clifford-algebra

7.4. Konvex geometria

• Konvex halmazok alapvető tulajdonságai

• Charatheodory-, Radon-, Helly-tétel és ezek általánosításai, alkalmazásai

- Szeparáció, Euler reláció, dualitás
- Konvex halmazok aproximációja, Blaschke kiválasztási tétele
- Műveletek konvex halmazokkal
- Izoperimetrikus tétel
- Konstans szélességű konvex testek
- Konvex testek értékelései
- Zonidok

7.5. Politopok kombinatorikája

- Politopok konstruálása, Gale-transzformáltak
- Euler-reláció, Dehn–Sommerville-egyenletek
- Felső korlát a lapok számára
- 3-politopok kombinatorikus típusai, Steinitz-tétel
- Politopok vázának struktúrája, vanKampen–Flores tétel
- Az f-vektorok karakterizálása
- Politopok összeadása és felbontása
- Hamilton-utak és körök politopokon
- Szabályos politopok

7.6. Kombinatorikus módszerek a geometriában

- Blokkrendszerek: Blokkrendszerek paraméterei és oszthatósági feltételek. Steiner-rendszerek. Feloldható blokkrendszerek. Baranyai tétel.
- Matroidok: Műveletek matroidokkal. Matroidok koordinátázhatósága. Bináris matroidok karakterizációja. Grafikus matroidok.
- Véges projektív geometriák: Latinnégyzetek. Véges projektív geometriák paraméterei. Desargues és Pappos síkok. Desargues és Pappos síkok koordinátázhatósága. Véges affin síkok. Hadamard matrixok.
- Véges tükrözési csoportok. Coxeter csoportok és komplexusok. Épületek.

7.7. Kombinatorikus és algebrai topológia

- Homotópia és szimpliciális komplexusok
- Baricentrikus felbontás és a szimpliciális approximációs tétel

- A fundamentális csoport és kiszámítási módjai
- A 2-dimenziós triangulálható sokaságok osztályozása
- Szinguláris homológiacsoportok és kiszámítási módjai: szimpliciális homológiák, egzakt sorozatok
- Homológiák tetszőleges együtthatócsoporttal, a Lefschetz-féle fixponttétel
- Kohomológiacsoportok és kiszámítási módjaik
- Alexander–Poincaré-dualitás
- CW-komplexusok homotópiaelmélete
- Whitehead tétele és a celluláris approximáció
- CW-komplexusok homológia és kohomológia elmélete
- Hurewitz-tétel
- Kohomológia szorzatok

8. Differenciálgeometria

8.1. Topológia

- Topologikus tér
- Kompakt és lokálisan kompakt terek, egységfelbontás létezése
- Topologikus sokaságok
- Homotópia és szimpliciális komplexusok, fundamentális csoport
- A 2-dimenziós triangulálható sokaságok osztályozása
- Topolgikus csoport és transzformációcsoport, részcsoport szerinti faktortér indukált topológiája
- Homogén tér, differenciálható és analitikus sokaság
- Lie-csoport

8.2. Lie-csoportok és Lie-algebrák, szimmetrikus terek

- Analitikus sokaságok, Frobenius tétele
- Lie-csoportok és zárt részcsoportok
- Az exponenciális leképezés, a szorzás Taylor-sorfejtése, Campbell–Hausdorff-formulák
- Lie-csoportok és Lie-algebrák adjungált reprezentációja

- Lie alaptételei
- Nilpotens és feloldható Lie-algebrák
- Féligegyszerű Lie-algebrák
- Cartan-részcsoportok és részalgebrák
- Struktúraelmélet
- Klasszikus Lie-algebrák és Lie-csoportok
- Variációs és összetevő tételek
- Pincselt sokaságok, lokálisan szimmetrikus terek, szimmetrikus és kétpont-homogén terek
- Izometria csoportok
- Kanonikus konnexió, Jacobi-egyenletek
- Totál geodetikus részsokaságok
- Riemann-féle homogén terek, elsőfajú Riemann-féle szimmetrikus terek geodetikus sokasága

8.3. Riemann-geometria, konnexió elmélet és holonomia csoportok

- Riemann-metrika
- Levi–Civita konnexió
- Geodetikusok, konvex környezet, normál koordinátarendszer
- Geodetikusok variációja, Jacobi-vektormezők, konjugált pontok
- Hopf–Rinow-tétel, Hadamard tétele
- Morse indextétel
- Szekcionális görbület, görbületi tenzor, skalár görbület
- Konstans görbületű terek
- Konnexiók principális nyalábokon
- Párhuzamosság
- Holonómiacsoport, holonómia tétel
- Redukciós tétel
- Infitézimális holonómiacsoport
- DeRham dekompoziciós tétele
- Invariáns konnexiók reduktív homogén tereken és szimmetrikus tereken
- Invariáns Riemann metrikák és komplex struktúrák

8.4. Gelfand-féle integrálgeometria, geometriai analízis

• Radon-transzformáció valós affin téren, invertálhatóság, tartó tételek Plancherel-formula, Paley–Wiener-tétel, kapcsolat más transzformációkkal

• Disztribuciók Radon-transzformációja

• Radon-transzformáció komplex tartományon

• Radon-transzformáció és differenciálás

• Radon-szerű transzformációk konstans görbületű és Lorentz-tereken

• Fourier-analízis konstans görbületű tereken

• Invariáns mérték sokaságokon

• Invariáns differenciáloperátorok sokaságokon

• Szférikus transzformáció, szférikus függvénysorok, Paley–Wiener tétel, inverz formulák

8.5. Szövetgeometria

• Kvázicsoportok, loopok és hálózatok

• Koordinátázás és záródási tételek

• Projektivitások és kollineációk

• Moufang- és Bol-loopok és hálózatok

• Differenciálható szövetek és hálózatok

• Loopok érintőalgebrája

• Chern-konnexió

• Záródási feltételek jellemzése görbülettel és torzióval

• Differenciálható Moufang-loopok és Malcev-algebrák

8.6. Integrálható rendszerek

• Hamilton-rendszerek

• Darboux-tétel

• Szimplektikus sokaságok

• Legendre-transzformáció

• Szabad részecske pszeudo-Riemann térben

• Lie–Poisson-zárójel

• Lie-csoportok koadjungált pályái

- Momentum leképezés
- Szimmetria redukciós módszerek
- Liouville-tétel
- Hatás és szögváltozók
- Adler–Kostant–Symes-tétel
- Integrálható mechanikai rendszerek, példák

9. Kombinatorika és gráfelmélet

9.1. Gráfelmélet

- Összefüggőség: irányított gráfok összefüggősége, seholsem 0 folyamok.
- Párosítások: Gallai–Edmonds struktúra tétel, Edmonds polytop, Véletlen módszerek $\nu(G)$ meghatározására.
- Gráfok színezései: Hajós tétele, Kneser gráf és kromatikus száma, R^d kromatikus száma.
- Független halmazok gráfokban: τ-kritikus gráfok, pontpakolási politop, perfekt gráfok, gráfok Shannon kapacitása.
- Gráfok sajátértékei, véletlen séták gráfokon, gráfok nagyító paramétere, expander gráfok és konstrukcióik.
- Szimmetrikus gráfok: erősen reguláris gráfok, barátság tétel, tranzitív gráfok, Cayley gráfok.
- Véletlen gráfok.

9.2. Halmazrendszerek

- Metsző halmazrendszerek, Erdős–Ko–Rado tétel általánosításai.
- Katona–Kruskal tétel, izoperimetrikus problémák.
- FKG egyenlőtlenség és alkalmazásai.
- Halmazrendszerek metszési korlátozásokkal. Ray–Chaudhuri–Wilson tétel. Alkalmazások; Borsuk sejtés cáfolata.
- Tenzor szorzat módszer: Bollobás tétel, Lovász László élesítési.
- Halmazrendszerek alkalmazásai a bonyolultságelméletben: kommunikációs bonyolultság, formula bonyolultság, Razborov tétel.

9.3. Blokkrendszerek és kódok

• Steiner-rendszerek konstrukciói, kapcsolatok az univerzális algebrával,

• Szimmetrikus blokkrendszerek. Feloldható blokkrendszerek.

• t-blokkrendszerek.

• Véges projektív síkok, Ryser–Chowla tétel.

• Kódolás elmélet alapfogalmai. Kódok mérete, hatékonysága, súlyszámláló polinoma. Gilbert–Varshamov becslés.

• Hadamard kódok.

• Lineáris kódok. Mac Williams tétel.

• Hamming kódok. Reed–Muller kódok. Projektív kódok. Önduális kódok.

9.4. Összeszámlálási problémák

• Részbenrendezett halmazok kiterjesztéseinek száma. Vegyes térfogat, logkonkáv sorozatok, részbenrendezett halmazok dimenziója

• Jeu-de-taquin, tablók, szimmetrikus függvények, Hopf algebrák

• Permutációk őrnagy indexe, véges vektorterek altereinek száma, kombinatorikus azonosságok q-analógjai

• Részbenrendezett halmazok Sperner tulajdonsága, részbenrendezett halmazok f-vektora

9.5. Bonyolultságelmélet

• Hálózatok: Hálózat méret és Turing gép bonyolultság kapcsolata. Általános alsó becslések. Konstans mélységű hálózatok. Hastad lemma. Alsó becslések véletlen megszorítások módszerével. Alsó becslések az approximáció módszerével. Razborov és Smolenski tételei. Monoton hálózatok. Approximációs módszer alkalmazása különböző függvények esetére. Az approximációs módszer határai. Andreev alsó becslései.

• Elágazó programok: Elágazó programok bonyolultsága és Turing gépek; Masek tétele. Korlátos szélességű elágazó programok.

• Formulák: Formula méret és hálózat mélység kapcsolata. Szimmetrikus függvényeket kiszámító kis formulák. Nečiporuk tétele. Ramsey elméleti módszerek; Hodes, Specker, Pudlák tétele. Véletlen megszorítások, Subotovskaja módszere; Andreev tétele. Monoton formulák. Véletlen megszorítás módszere; Karchmer, Wigderson tétele. Lineáris algebrai módszer;

Razborov tétele. Kommunikációs bonyolultság alkalmazása; Raz, Wigderson tétele.

• Kommunikációs bonyolultság: Rang függvény módszer. Möbius függvény. Véletlen kommunikációs bonyolultság. Disztribuciós bonyolultság.

• Boole döntési fák: Példák tartózkodó függvényekre. Rivest-Vuillemin tétele. Topológikus módszerek; Kahn, Saks, Sturtevan tétele. Véletlen döntési fák. Nemdeterminisztikus döntési fák. Boole függvények érzékenysége.

9.6. Kombinatorikus módszerek a geometriában

• Matroidok: Műveletek matroidokkal. Matroidok koordinátázhatósága. Bináris matroidok karakterizációja. Grafikus matroidok.

• Véges projektív geometriák: Latinnégyzetek. Véges projektív geometriák paraméterei. Desargues és Pappos síkok. Desargues és Pappos síkok koordinátázhatósága. Véges affin síkok. Hadamard matrixok.

• Véges tükrözési csoportok. Coxeter csoportok és komplexusok. Épületek.

10. Sztochasztika

10.1. A valószínűségszámítás alapjai és erős törvényei

• A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle felépítése

• A feltételes várható érték Kolmogorov-féle definíciója

• Nevezetes eloszlások, a normális eloszlásból származtatott eloszlások

• Borel–Cantelli lemmák, a "0 vagy 1" törvény, Kolmogorov egyenlőtlensége

• A háromsor tétel

• A nagy számok erős törvényei

• Az átlagos és egy valószínűségű ergodikus tétel

• Az iterált logaritmus tétel

10.2. Határeloszlás tételek

• A karakterisztikus függvény, inverziós formula és folytonossági tétel

• A centrális határeloszlás tétel Lindeberg-féle alakja

- A centrális határeloszlás tétel lokális alakja
- A Poisson-eloszláshoz való konvergencia
- Az empirikus eloszlásra vonatkozó határeloszlás tételek: Kolmogorov és Szmirnov tételei
- A Berry–Esséen tétel
- Cramér tétele a nagy eltérések valószínűségeiről

10.3. Fejezetek a matematikai statisztikából

- A statisztikai próbák elmélete: Neyman–Pearson lemma, szekvenciális döntési eljárások
- Wald azonosságai a várható értékre és a momentum generáló függvényre, a Stein-féle kétfokozatú t-próba
- Becslés elmélet: Blackwell–Kolmogorov–Rao és Cramér–Rao egyenlőtlenségek, konfidencia intervallumok szerkesztése
- Cramér tétele a maximum likelihood becslés aszimptotikus normalitásáról
- Szórásanalízis, diszkriminancia analízis, a Fislher–Cochran tétel
- Nemparaméteres statisztikai módszerek: illeszkedés vizsgálat, a Kaplan–Meier becslés cenzorált mintákra

10.4. Sztochasztikus folyamatok diszkrét állapottérrel

- Véges állapotterű Markov-láncok
- Megszámlálható állapotterű Markov-láncok: a rekurrens eseményekre vonatkozó határeloszlás tétel
- Pólya tétele a bolyongások rekurrenciájáról
- Diszkrét állapotterű, folytonos idejű Markov folyamat, Kolmogorov egyenletei
- Alkalmazások: születési és halálozási folyamat, tömegkiszolgálási problémák
- Diszkrét állapotterű Markov-mezők a d-dimenziós rácson: a ferromágneses jelenségek Ising-modellje

10.5. Sztochasztikus folyamatok folytonos állapottérrel

- Martingálok: martingál konvergencia tétel, centrális határeloszlás tétel
- A Wiener folyamat trajektóriáinak tulajdonságai: folytonosság, nemrektifikálhatóság, nemdifferenciálhatóság
- Az Itô integrál definíciója, sztochasztikus differenciál, Itô-formula
- Sztochasztikus differenciálegyenletek, explicit módon megoldható esetek: az Ornstein–Uhlenbeck folyamat
- Diffúziós folyamatok, Kolmogorov egyenletei
- A folytonos függvények terén értelmezett mértékek gyenge konvergenciája, a konvergencia feltételeinek ellenőrzése a bolyongásra
- A Feynman–Kac formula

11. Matematikadidaktika

11.1. Matematikadidaktika

- A matematikatanítás céljai: kognitív, affektív és pszichomotorikus célok. Tanuláselméletek (Gagné, Bruner, Piaget); az értelmi műveletek szakaszonkénti kialakításának elmélete. A matematikatanítás didaktikai alapelvei. A fogalmak tanítása. Tételek, bizonyítások tanítása; a bizonyítások tanítási fázisai. A problémamegoldási képességek fejlesztésének alapfeltételei. A problémamegoldási folyamat modelljei (Pólya György, Alan H. Schoenfeld, John Mason); problémamegoldási stratégiák, heurisztikus elvek, kontrollmódszerek. Oktatási koncepciók (realisztikus, projektorientált, tudományorientált, empirikus, mechanisztikus). Teljesítménymérés, értékelés a matematikaoktatásban.
- A klasszikus algebra elemeinek tanítási lehetőségei. Egyenletek, egyenletrendszerek tanítása. A lineáris algebra alapjainak tanítása induktív módon. Algebrai struktúrák bevezetése példákon keresztül; analógia, általánosítás és absztrakció.
- Felfedeztetés a számelméletben; konkrét példák, általános sejtés, a sejtés bizonyítása.
- Az euklideszi geometria tanítása induktív és deduktív módon. A nemeuklideszi geometriák tanítási lehetőségei a középfokú oktatásban.
- Egyszerű összeszámlálási problémák elemi megoldásától a formális hatványsorok alkalmazásáig. Gráfelméleti fogalmak és tételek tanítása konkrét példákon keresztül.

• Az analízis (kalkulus) alapvető fogalmainak (határérték, folytonosság, differenciálhányados, integrál) előkészítése a középiskolában; a fogalmak bevezetésének lehetséges útjai: induktív, deduktív és konstruktív út. Az analízis elemeinek alkalmazásai a hétköznapi életben és a matematika más területein.

• Leíró statisztika és a hétköznapi élet. Statisztikai adatok megjelenítése, kapcsolódó fogalmak tanítása. Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. Statisztikai mérőszámok és tulajdonságaik; adatsokaság várható értéke és szórása. A valószínűség fogalmának kialakítása. A valószínűségi változó fogalmának kialakítása konkrét példákon keresztül. Diszkrét valószínűségi változók; eloszlásuk, várható értékük, szórásuk. A nagy számok törvényének tanítási lehetőségei.

Irodalom:

Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába

Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy?

Pólya György: A gondolkodás iskolája

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II.

Pólya György: A matematikai gondolkodás művészete I-II. (Indukció és analógia; A plauzibilis következtetés)

Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát

Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája

Gács Péter-Lovász László: Algoritmusok

Lovász László-Pelikán József-Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika

Gyapjas Ferenc: A kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának módszertani problémái

Fried Ervin: Absztrakt algebra — elemi úton

Pintér Lajos: Analízis I-II.

Nemetz Tibor-Wintsche Gergely: Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek

Alan H. Schoenfeld: Mathematical Problem Solving

N. J. Vilenkin: Kombinatorika

Kosztolányi–Makay–Pintér–Pintér: Matematikai problémakalauz I.