

Doktori kurzusok tematikái / Topics of doctoral courses

Table of Contents

1. Magyarul	1
1.1. Algebra	1
1.2. Dinamikus rendszerek	4
1.3. Geometria	7
1.4. Diszkrét matematika	10
1.5. Analízis	13
1.6. Sztochasztika	15
1.7. Matematikadidaktika	18
2. In English	21
2.1. Algebra	21
2.2. Dynamical Systems	23
2.3. Geometry	27
2.4. Discrete Mathematics	30
2.5. Analysis	33
2.6. Stochastics	35
2.7. Didactics of Mathematics	37

1. Magyarul

1.1. Algebra

1.1.1. Csoportelmélet (MATD1xx)

Testek multiplikatív csoportja. Permutációcsoportok (primitív és többszörösen tranzitív csoportok, koszorúszorzat, Frobenius csoportok). Szabad csoportok (részcsoportok, rang, definiáló relációk, Reidemeister-Schreier elmélet). Feloldható csoportok. p -csoportok. Nilpotens csoportok. A transzfer. A Burnside-probléma. Mátrix-csoportok. Véges egyszerű csoportok. Részcsoportthálók.

Aschbacher: Finite Group Theory.

Hall, M. Jr.: The Theory of Groups.

Huppert: Endliche Gruppen.

Lyndon-Schupp: Combinatorial Group Theory.

1.1.2. Hálóelmélet (MATD1xx)

Hálóelméleti alapfogalmak, dualitás, teljes hálók. Algebrai hálók, részalgebra hálók. Disztributív hálók: Birkhoff és Stone reprezentációs tétele, véges disztributív hálók szerkezete. Birkhoff és Dedekind kritériuma, a három elem által generált szabad moduláris és disztributív háló. Hálókongruenciák. Moduláris hálók: intervallumok, elemfelbontások. Geometriai hálók és komplementumos moduláris hálók. Projektív geometriák mint moduláris hálók. Hálóvarietások.

Czédli G.: Hálóelmélet

G. Grätzer: General Lattice Theory

1.1.3. Félcsoportelmélet (MATD1xx)

Transzformációfélcsoport, szabad félcsoport. Ideál és Rees-kongruencia, félháló- és csoportkongruencia. Green-relációk, a D-osztályok szerkezete. Reguláris elem, inverzelem, reguláris D-osztályok. Egyszerű félcsoportok, főfaktorok, Rees tétele teljesen 0-egyszerű félcsoportokra. Teljesen reguláris félcsoportok, csoportok félhálói. Inverz félcsoportok, Wagner-Preston-féle reprezentáció, természetes rendezés. Fundamentális inverz félcsoportok, Munn-tétel. Kommutatív félcsoportok.

Grillet, P. A.: Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, 1995.

Howie, J. M.: Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, 1995.

1.1.4. Univerzális algebra (MATD1xx)

Algebra, kifejezésfüggvény, polinomfüggvény. Részalgebra. Izomorfizmus, homomorfizmus, általános izomorfiatételek. Direkt szorzat, további szorzatfajták. Szubdirekt felbontás, Birkhoff tétele. Lezárási operátorok, lezárási rendszerek. Kongruenciaháló. Szabad algebra. Varietások. Birkhoff varietás-tétele, Birkhoff-féle teljességi tétel. Varietások ekvivalenciája. Azonosságokkal jellemezhető tulajdonságok varietásokon. Malcev és Pixley tétele. Magari tétele. Minimális varietások. Ultraszorzat, kongruenciadisztributív varietások. Primál algebra által generált varietások. Kváziprimál algebrák, diszkriminátorvarietások. Véges azonosságbasis létezésére vonatkozó tételek.

Burris–Sankappanavar: Bevezetés az univerzális algebrába.

McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, Lattices, Varieties.

1.1.5. Rendezett halmazok (MATD1xx)

G. Birkhoff: Generalized arithmetic, Duke Math. J. 9 (1942) 283-302. K. Bogart, R. Freese, J. Kung (szerk.): The Dilworth's theorems, Birkhauser, 1990. D. Duffus, I. Rival: A structure theory for ordered sets, Discr. Math. 35 (1981), 53-118. W. T. Trotter: Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory, Johns Hopkins University Press, 1992. J. Valdes, R. E. Tarjan, E. L. Lawler: The recognition of series parallel digraphs, SIAM J. Comp. 11 (1982), 298-313.

továbbá válogatott cikkek az Order c. folyóiratból

1.1.6. Klónelmélet (MATD1xx)

Absztrakt klónok és műveletklónok. Galois-kapcsolatok. Relációklónok és műveletklónok kapcsolata, Baker–Pixley-tétel. Nevezetes teljességi tételek: általános Lagrange-interpoláció véges testekben, Werner–Wille-tétel, Sheffer–Webb-tétel, Slupecki-tétel, Salomaa-tétel. Véges halmazok klónhálói; Janov–Mucnik-tétel. Maximális klónok; Post-tétel. Rosenberg-tétel és néhány alkalmazása: McKenzie-tétel, a minta-függvények teljessége. Sheffer-függvények; Rousseau-tétel. Minimális klónok. Swierczkowski lemmája. Rosenberg típus-tétele. Primitív pozitív klónok; Kuznyecov-tétel.

Csákány B.: Klónok (Függelék Burris–Sankappanavar Bevezetés az univerzális algebra c. könyvéhez)

Pöschel–Kaluzsnyin: Funktionen- und Relationenalgebren

Szendrei Ágnes: Clones in Universal Algebra

1.1.7. Véges algebrák (MATD1xx)

Primál algebrák és általánosításai. A primál algebrák Stone–Hu-féle dualitás-elmélete. A term-feltétel, kommutátorok, Abel-féle algebrák. McKenzie tétele kongruencia-fölcserélhető varietás szigorúan egyszerű algebráiról. Lokálisan véges varietások. Varietás spektruma. Relációklónok és szabad algebrák kapcsolata. Véges azonosság-bázisú algebrák. Post és Lyndon tételei, a Lyndon-féle grupoid, a Murszkij-féle grupoid, örökletesen nem-végesbázisú algebrák. Pálffy–Pudlák-tétel, Pálffy tétele. Minimális algebrák, a szelíd kongruenciák elméletének elemei. elméletének elemei.

Burris–Sankappanavar: Bevezetés az univerzális algebra

McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, Lattices, Varieties

Szendrei Ágnes: Clones in Universal Algebra

Hobby–McKenzie: The Structure of Finite Algebras

továbbá Baker–McNulty–Werner, Berman, McKenzie, Pálffy, Pudlák és mások válogatott cikkei

1.1.8. Gráfhomomorfizmus problémák (MATD1xx)

Algoritmus bonyolultsági osztályok (P, NP, NP-teljes). A CSP-problémaosztály, a dichotómiasejtés. A homomorfizmus-probléma különböző megadásai (relációs struktúrákra, algebrákra, egyenletrendszerekre, varietásokra). Feder–Vardi féle redukciók. Schaefer dichotómiatétele. Speciális esetek (félháló, többségi függvény, és Maltsev művelet esetén). Gyöngye többségi függvények. A Bang–Jensen és Hell sejtés bizonyítása. Korlátos szélességű problémák jellemzése. CSP és MMSNP kapcsolata.

Hell–Nesetril: Graphs and homomorphisms

továbbá Feder, Vardi, Bulatov, Jaevons, Dalmau, Kozik, Barto válogatott cikkei

1.2. Dinamikus rendszerek

1.2.1. Parciális differenciálegyenletek (MMNV23E)

Disztribúciók. Szoboljev terek. Disztribúciók Fourier-transzformációja. Parciális differenciálegyenletek fundamentális megoldásai. Parciális differenciáloperátorok. Klasszikus és általánosított megoldások. Hipoelliptikus differenciáloperátorok. Korrekt kitűzésű feladatok féltérben lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszerre. Elliptikus, hiperbolikus, parabolikus parciális differenciálegyenletekre kitűzött peremérték- ill. vegyes feladatok egzisztencia-, unicitás-, stabilitásvizsgálata Szoboljev-terekben. 1. Absztrakt variációs problémák: bilineáris formák, kvadratikus funkcionálok minimalizálása, a Lax-Milgram tétel, Galjorkin approximáció 2. Disztribúciók és függvények 3. Szoboljev terek 4. Elliptikus problémák variációs formában 4.1. Elliptikus egyenletek 4.2. A Poisson egyenlet 4.3. Diffúzió 4.4. A Laplace operátor sajátértékei 4.5. Egyenletek divergencia alakban 5. Evolúciós egyenletek gyenge megoldásai 5.1. Parabolikus egyenletek 5.2. A hővezetés egyenlete: a Cauchy-Dirichlet probléma, Galjorkin approximáció, energia becslések, létezés és stabilitás

L.C. Evans, Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc., 1998. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino, A Primer on PDEs, Models, Methods, Simulations, Springer Verlag, 2013.

1.2.2. Dinamikus rendszerek (MMNV24E)

Invariáns sokaságok létezése, simasága. Viselkedés fixpont és periodikus pálya környezetében. Linearizálás. Orbitális stabilitás. Poincaré-leképezések. Átlagolás. Limeszhalmazok. Aszimptotikusan sima leképezések és félcsoporthok. α -kontraktív félcsoporthok. Invariáns halmazok stabilitása. Disszipativitás. Globális attraktorok. Fixpont tételek. Morse-Smale leképezések. A globális attraktor dimenziója. Periodikus folyamatok. Gradiens rendszerek. Példák: retardált differenciálegyenletek, neutrális differenciálegyenletek, parabolikus és hiperbolikus parciális differenciálegyenletek.

M. Hirsch and S. Smale, Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

J. Palis, W. DeMelo, Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction, Springer-Verlag, 1982.

S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 1990.

J. Guckenheimer and P.J. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.

J. Hale, L. Magalhaes, W. Oliva, An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems — Geometric Theory, Springer-Verlag, 1984.

J. Hale, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, AMS, 1986.

D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, 1981.

M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, Invariant Manifolds, Springer-Verlag, 1977.

V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Dover Publications, 1954.

H. L. Smith, Monotone Dynamical Systems, AMS, 1995.

R. Temam, Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, 1997.

1.2.3. Közönséges differenciálegyenletek (MATD2xx)

Differenciálegyenletek sokaságokon. Egzisztencia- és unicitástételek. Differenciálegyenletek végtelen dimenziós terekben. Lineáris rendszerek. Infinitézimális generátor. Integrálsokaságok. Linearizálás, Hartman–Grobman-tétel. Perturbációelmélet. Nem-autonóm rendszerek. Periodikus és majdnem periodikus egyenletek. A közepelés módszere. Peremértékproblémák. Sturm–Liouville-elmélet. Másodrendű egyenletek, oszcilláció. Határhalmazok, határciklusok. Poincaré–Bendixson-tétel. Stabilitás, Ljapunov-módszer. Invariancia-elv. Elsőrendű parciális differenciálegyenletek. Hamilton-Jacobi-elmélet.

H. Amann, Ordinary Differential Equations, DeGruyter, 1990.

V. I. Arnold, Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1992.

J. K. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, 1969.

D. V. Anosov, V. I. Arnold, Dynamical Systems I, Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.

C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer, 1999.

Ph. Hartman, Ordinary Differential Equations, Birkhäuser, 1982.

M. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

M. A. Naimark, Linear Differential operators, Nauka, 1969 (in Russian).

V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Dover Publications, 1954.

J. Palis, W. DeMelo, Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1982.

V. A. Pliss, Integral Manifolds of Periodic Systems of Differential Equations, Nauka, 1977 (in Russian).

1.2.4. Funkcionál-differenciálegyenletek (MATD2xx)

A fázistér, trajektóriák és a megoldások absztrakt elmélete. Egzisztencia- és unicitás-tételek. A kezdeti adatoktól való folytonos függés. A közönséges egyenletek körében szokatlan jelenségek. A megoldások folytathatósága, kompaktsága. Lineáris funkcionál-differenciálegyenletek. Oszcillációs kérdések első és másodrendű egyenletekre. Stabilitás. Integro-differenciálegyenletek. Neutrális egyenletek. Autonóm egyenletek geometriai elmélete. Periodikus megoldások létezése. Biológiai, mechanikai és egyéb alkalmazások.

O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walter, Delay Equations, Springer, 1995.

J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1977.

T. A. Burton, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, 1985.

G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Staffans, Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge University Press, 1990.

I. Györi, G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations, Carendon Press, 1991.

Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, Functional Differential Equations with Infinite Delay, Springer-Verlag, 1991.

V. B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic Press, 1986.

T. Krisztin, H.-O. Walter, J. Wu, Shape, Smoothness and Invariant Stratification of an Attracting Set for Delayed Monotone Positive Feedback, AMS, 1999.

S. H. Saperstone, Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces, Springer-Verlag, 1981.

1.2.5. Differenciálegyenletek numerikus módszerei (MATD2xx)

1. Közöséges differenciálegyenletek numerikus megoldásai: 1.1. Numerikus módszerek elsőrendű kezdetiérték-problémákra: Euler, Runge-Kutta módszerek 1.2. Másodrendű peremérték-problémák numerikus megoldásai: véges differenciák, bevezetés a véges elemek módszerébe
2. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásai: 2.1. Elsőrendű egyenletek, megmaradási törvények, gyenge megoldások: transzport egyenlet, hullámok, a Burger egyenlet, a Riemann-probléma, lökés hullámok 2.2. Numerikus módszerek elsőrendű egyenletekre: véges differenciák, a CFL-feltétel, véges elemes megoldás 2.3. Diffúzió, hővezetés numerikus módszerei: Dirichlet és Neumann preremfeltételek, egy explicit, egy implicit és a Crank-Nicolson módszerek, véges elemek módszere. 2.4. A Laplace egyenlet: numerikus megoldása a véges differenciák módszerével 2.5. Reakció-diffúzió egyenletek: a Fisher egyenlet véges elemes megoldása 2.6. A hullámegyenlet: az egydimenziós eset véges differencia megoldása, a CFL-feltétel, véges elemes megoldás.

E. B. Becker, G. F. Carey and J. T. Oden, Finite Elements: An Introduction. Vol. I. , Prentice-Hall, 1981
Jeffery Cooper, Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB. Birkhauser, 1998. Peter J. Olver, Introduction to Partial Differential Equations, Springer, New York, 2014

1.2.6. Dinamikus modellek (MATD2xx)

A modellezési folyamat elemei. Matematikai modellek építése, vizsgálata, adatok és modellek illesztése. Diszkrét-folytonos, determinisztikus-sztochasztikus modellek. A matematikai és számítógépes eszközök áttekintése példákon keresztül: differenciál- és differenciaegyenletek, sejtautomaták vizsgálata; görbeillesztés; modellek diszkretizálása, linearizálása; minimumkeresés gradiens módszerrel. Rezgések: biológiai, mechanikai és elektromos oszcillátorok: lineáris, nem-lineáris rezgések, csillapítás. Kényszerrezgések, relaxációs oszcillátorok. Vezérlések: Impulzív

rendszerek alkalmazásai, állapotfüggő és időkapcsolók. Alkalmazások, modellek az élettudományokból. Populációdinamikai fogalmak, egy fajra vonatkozó modellek. Folytonos és diszkrét modellek, korlátlan-korlátozott élettér, késleltetések megjelenése, térbeliség. Exponenciális, logisztikus növekedés, a Fibonacci sorozat szerepe a populációdinamikában. Több fajra vonatkozó modellek, kölcsönhatások: együttműködés, versengés, ragadozó-zsákmány modellek. Tér-idő modellek. Foltos élettér: áramlási modellek, rekeszrendszerek. Diffúzió: metapopulációk modellezése sejtautomatákkal, parciális differenciálegyenletekkel, mintázatok kialakulása. Járványok terjedése: fertőzés érintkezés útján, lappangási idő, nem fertőző időszakok, többfázisú megbetegedések (SIR, SEIR, stb. modellek), oltási (megelőzési, védelmi) stratégiák. Kémiai reakciók, gyógyszerek hatásának, kölcsönhatásának egyszerűbb modelljei.

Dreyer, T. P.: *Modelling with Ordinary Differential Equations*, CRC Press, 1993, ISBN 9780849386367
 Leah Edelstein-Keshet: *Mathematical Models in Biology*, SIAM, ISBN: 978-0-89871-554-5
 Meerschaert, M.M., *Mathematical Modelling*, Academic Press, 1999, ISBN: 9780123869128
 Murray, D.J.: *Mathematical Biology*, Springer, 1997. ISBN 978-3-662-08542-4

1.2.7. Nemlineáris dinamika (MATD2xx)

Kétdimeziós autonóm rendszerek, a Poincaré-Bendixson tétel. Nyeregpont tulajdonság, invariáns sokaságok: stabil, instabil és centrális sokaság. Hartman-Grobman tétel. Stabilitáselmélet, Ljapunov-függvények. Periodikus megoldások stabilitása, Poincaré-leképezések, orbitális stabilitás. Strukturális stabilitás, generikus tulajdonságok. Elemi bifurkációk, bifurkációs görbék meghatározása biológiai és fizikai modellekben. Fázisképek osztályozása, Poincaré-normálforma. Attraktorok és típusai, medencék. Lagrange egyenletek, Hamilton vektormezők. Diszkrét dinamikai rendszerek. A körvonal leképezései, kvadratikus leképezések, periodikus pontok bifurkációi. Smale-féle patkó, szimbolikus dinamika és káosz. A Lorenz-féle meteorológiai modell.

M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2004. L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 1998. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino, *A Primer on PDEs, Models, Methods, Simulations*, Springer Verlag, 2013.

1.3. Geometria

1.3.1. Algebrai topológia (MMNM42E)

Homotópia és szimpliciális komplexusok. Baricentrikus felbontás és a szimpliciális approximációs tétel. A fundamentális csoport és kiszámítási módjai. A 2-dimenziós triangulálható sokaságok osztályozása. Szinguláris homológiacsoporthoz és kiszámítási módjai: szimpliciális homológiák, egzakt sorozatok. Homológiák tetszőleges együtthatócsoporthoz, a Lefschetz féle fixponttétel. Kohomológiacsoporthoz és kiszámítási módjaik. Alexander–Poincaré dualitás. CW-komplexusok homotopiaelmélete. Whitehead tétele és a celluláris approximáció. CW-komplexusok homológia és kohomológia elmélete. Hurewicz tétele. Kohomológia szorzatok.

S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton, 1952.

E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw–Hill, New York, 1966.

C. R. F. Maugnder, Algebraic Topology, Van Nostrand Reinold, London, 1970.

W. S. Massey, Singular Homology Theory, Springer, 1980.

1.3.2. Konvex politópok kombinatorikája (MMNM43E)

Charatheodory, Radon, Helly tétel és ezek általánosításai, alkalmazásai. Politópok konstruálása, Gale transzformáltak. Euler reláció, Dehn–Sommerville egyenletek. Felső korlát a lapok számára. 3-politópok kombinatorikus típusai, a Steinitz tétel. Politópok vázának struktúrája, a van Kampen–Flores tétel. Az f -vektorok karakterizálása. Politópok összeadása és felbontása. Hamilton utak és körök politópokon. Szabályos politópok.

H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, Combinatorial Geometry in the Plane, Holt, Reinhardt and Winston, New York, 1964.

L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, Proc. Symp. Pure Math., 7 (Convexity) (1963), 101 - 180.

B. Grünbaum, Convex Polytopes, John Wiley & Sons, London, 1967.

1.3.3. Integrálgeometria és geometriai valószínűség (MATD3xx)

Konvex halmazok alapvető tulajdonságai, Charatheodory, Radon, Helly tételei. Szeparáció, Euler reláció, dualitás. Konvex halmazok approximációja, Blaschke kiválasztási tétele. Vegyes térfogat, Brunn–Minkowski tétel, Minkowski és Fenchel–Alexandrov egyenlőtlenség. Sűrűségek pontokra, egyenesekre, kinematikus sűrűség, síkbeli integrálformulák. Steiner formula, quermassintegrálok, Blaschke és Poincaré alapformulái. Görbületi integrálok és alkalmazásaik.

L.A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Math., Addison–Wesley, London, 1976.

T. Bonnesen, W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin, 1934.

W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Berlin, 1955.

H. Busemann, Convex surfaces, Interscience, London, 1958.

1.3.4. Magas dimenziós konvex geometria (MATD3xx)

Konvex halmazok kombinatorikus tulajdonságai, Charatheodory, Radon, Helly tétel és ezek általánosításai, alkalmazásai. Konvex halmazok szeparálása, dualitás. Konvex halmazok approximációja, a Blaschke féle kiválasztási tétel. Műveletek konvex halmazokkal, vegyes térfogat. Izoperimetrikus tétel. Konstans szélességű konvex testek. Konvex testek értékelései. Zonoidok.

H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge Univ. Press 47 (1958).

L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, Proc. Symp. Pure Math., 7 (Convexity) (1963), 101–180.

B. Grünbaum, Convex Polytopes, John Wiley & Sons, London, 1967.

P. M. Gruber, J. M. Wills, Convexity and its applications, Birkhäuser, 1983.

1.3.5. Konvex testek Brunn-Minkowski elmélete (MATD3xx)

Konvex testek és határuk. Dualitás. Minkowski-összeg, zonoidok. Külső és belső paralel halmazok, görbületi mértékek, quermassintegrálok. Vegyes térfogat, értékelések. Egyenlőtlenségek, Brunn-Minkowski tétel, Minkowski-egyenlőtlenség, izoperimetrikus tétel, Aleksadrov-Fenchel egyenlőtlenség, Minkowski-tétel. Kovariogram, különbség test, Steiner-szimmetrizáció.

P.M. Gruber: Convex and discrete geometry, Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-71132-2 R. Schneider: Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, Cambridge University Press, 2013 (2nd ed.). ISBN: 978-1-139-00385-8 Szabó L.: Bevezetés a konvex geometriába, ELTE jegyzet (2018).

1.3.6. Diszkrét és kombinatorikus geometria (MATD3xx)

Blokkrendszerek: Blokkrendszerek paraméterei és oszthatósági feltételek. Steiner-rendszerek. Hadamard-mátrixok. Feloldható blokkrendszerek. Baranyai-tétel. Véges projektív geometriák: Latinnégyzetek. Véges projektív geometriák paraméterei. Desargues- és Pappos-síkok. Desargues- és Pappos-síkok koordinátázhatósága. Véges affin síkok. Véges tükrözési csoportok. Coxeter-csoportok és komplexusok. Épületek.

M. Jr. Hall, Combinatorial theory, Waltham, Mass. 1967.

Kiss György, Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon Könyvtár, Szeged, 2001.

Hajnal Péter: Halmazrendszerek, Polygon Jegyzettár, Szeged, 2002.

Brown, Buildings, Springer-Verlag, London, 1989.

1.3.7. Sztochasztikus geometria (MATD3xx)

Véletlen zárt halmazok, véletlen mértékek és pontfolyamatok, Poisson pontfolyamatok, Palm eloszlások, véletlen pontok konvex burka, politópok véletlen vetületei, extrémális problémák valószínűsége és várható értékre, konvex testek közelítése véletlen politópokkal, sapkafedési tétel és alkalmazásai, centrális határeloszlástételek véletlen politópokra.

Ajánlott irodalom:

R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

Baddeley, A.; Bárány, I.; Schneider, R.; Weil, W. Stochastic geometry. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, September 13–18, 2004. With additional contributions by D. Hug, V. Capasso and E. Villa. Edited by W. Weil. Lecture Notes in Mathematics, 1892. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

Santaló, Luis A. Integral geometry and geometric probability. Second edition. With a foreword by Mark Kac. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

1.3.8. Vektorrendszerek geometriája (MATD3xx)

- Bázisok, általános vázrendszerek, Parseval ill. éles vázrendszerek
- Energiaminimalizáló vektorrendszerek, éles vázrendszerek egzisztenciátétele
- Vektorok tenzorszorzata, F. John ellipszoid tétele
- Vektorrendszerek sorbaállítási kérdései, Steinitz problémája, a Steinitz-Bergström sejtés
- Vektorösszegzési problémák, előjelezett összeg-problémák, ill. a polarizációs probléma
- Online vektorösszegzési problémák, Chobanyan transzferencia-elve
- Plank problémák, Bang lemmája, általánosítások

1.3.9. Válogatott fejezetek a geometriából (MATD3xx)

A kurzus elsődleges célja, hogy bemutassa a geometria legújabb eredményeit, valamint az ezek megértéséhez szükséges speciális háttérismereteket. A tárgy során a modern geometria olyan témaköreit tárgyaljuk, amelyek napjainkban a terület fejlődésének középpontjában állnak, vagy egy-egy aktuális kutatási irányhoz kapcsolódnak. Ilyenek lehetnek például a magas dimenziós jelenségek, a konvex geometria és a funkcionálanalízis határterületeinek egyes kérdései, a sztochasztikus geometria és a valószínűségelmélet metszéspontjában megjelenő problémák, illetve a diszkrét geometriában előtérbe kerülő kutatási témák.

1.4. Diszkrét matematika

1.4.1. Diszkrét matematika 2 (MMNK51E)

Fokszám-sorozatok és realizálhatóság, Havel-Hakimi tétele. Fák és összeszámlálásuk, rekurziók, kombinatorikus módszerek, Kirchoff-formula. Gráfok színezése, Hajós nem-színezhetőségi bizonyítási sémája. Gráfok nagy derékbőséggel és nagy kromatikus számmal. Élszínezések, Viking-tétel. Párosítások gráfokban, algoritmusok és minimax tételek, Tutle tétele, Erdős-Simonovits-tétel, C_4 kizárása, nyílt problémák. Ramsey tétele gráfokra, általánosítások, alkalmazások, sűrűségi tételek. Gráfok sajátértékei és alkalmazásai.

B. Bollobas, Modern graph theory, Graduate Text sin Mathematics, Springer, Berlin, 1998, ISBN 0-387-98488-7 R. Diestel, Graph theory, 4th edition, Graduate Text sin Mathematics, Springer, Berlin, 2010, ISBN 978-3-662-53621-6

1.4.2. Extremális gráfelmélet (MMNM55E)

Mantel tétel, Turán tétel, Erdős-Stone-Simonovits tétel, Zarankiewicz probléma, maximális élszámú gráfok, amik nem tartalmaznak adott méretű teljes részgráfot/teljes páros részgráfot. Általánosabb Turán típusú kérdések egyéb kizárt gráfok (pl.: fák, körök) esetén, illetve hipergráfokon. Pánciklikus gráfok, Bondy tétel, Moon-Moser egyenlőtlenségek. Szaturálási kérdések, Kászonyi-Tuza tétel. Ramsey tétel, Ramsey típusú kérdések gráfokon. Szemerédi regularitási lemma változatai, elhagyási lemma, számlálási lemma, beágyazási lemma és ezek alkalmazásai, Roth tétele. Pszeudo-véletlen gráfok, Chung-Graham-Wilson tétel. További nevezetes módszerek extremális kérdésekkel kapcsolatban: Véletlen módszer néhány alkalmazása, Lovász lokál lemma. Kombinatorikus nullhelytétel és néhány alkalmazása. A Kneser sejtés bizonyítása topologikus eszközökkel (Borsuk-

Ulam tétel).

Béla Bollobás: Modern Graph Theory. Springer Graduate Texts in Mathematics. Springer; 1998. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0619-4> Stasys Jukna: Extremal Combinatorics with applications in computer science, Springer; 2011. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-17364-6> Tibor Szabó: Extremal Graph Theory with emphasis on constructions, <https://page.mi.fu-berlin.de/szabo/PDF/notes.pdf> Noga Alon, Joel H. Spencer: The probabilistic method, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley; 1991. <https://www.amazon.com/Probabilistic-Method-Noga-Alon/dp/0470170204>

1.4.3. Matematikai kriptográfia (MMNM56E)

A kriptográfia alapfogalmai. Támadások. Az AES-128 szimmetrikus kulcsú titkosítás, visszafejtése és kulcskifejtése. Lineáris S-doboz kriptanalízise. Boole-függvények nemlinearitása és Walsh-Hadamard transzformáltja. Hajlított függvények jellemzése. Differenciális egyenletesség, APN függvények. Lineáris rekurziók. Visszacsatolós léptetőszámlálók. Maximális periódusú LFSR-ek. Az RSA nyilvános kulcsú titkosítás: algoritmus, kulcsgenerálás, kódolás, dekódolás, a dekódolás bizonyítása. Prímgenerálás. Támadások az RSA ellen. Kulcs menedzsment a Diffie-Hellman elven. Véges test feletti elliptikus görbék. Elliptikus görbét használó kriptográfiai eljárások. Diszkrét logaritmus probléma. Gráf izomorfizmus problémán alapuló zéró-ismeret bizonyítás. A Fiat-Shamir zéró-ismeret bizonyítás. A hibajavító kódolás alapfogalmai. A Reed-Solomon-kód és dekódolása. Bináris Goppa-kódok, paraméterek, dekódolás. Kvantumrezisztens kód-alapú kriptográfia: a McEliece-séma.

Alko R. Meijer: Algebra for Cryptologists. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer Cham; 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-30396-3> Claude Carlet: Boolean Functions for Cryptography and Coding Theory. Cambridge: Cambridge University Press; 2021. <https://doi.org/10.1017/978110860680>

1.4.4. Kombinatorikus számítási modellek (MMNM53E)

Döntési fák, zárkózott függvények, alsó becslések. Kommunikációs bonyolultság, mátrixok parkettázása és a rang alsó becslés. Elágazó programok, korlátos szélesség és Barrington tétele. Formulák Khrapchenko és Subbotovszkaja tételei, monotonitás és alsó becslések. Hálózatok, monotonitás és Razborov tétele. Switching lemma. Smolensky tétele.

S. Jukna, Boolean function complexity, Advances and frontiers, Algorithms and Combinatorics, 27. Springer, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-24507-7. I. Wegener, The complexity of Boolean functions, Wiley-Teubner Series in Computer Science, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester; B.G. Teubner, Stuttgart, 1987. ISBN 0-471-91555-6.

1.4.5. Leszámlálási problémák (MATD4xx)

Formális hatványsorok gyűrűje. Permutációk őrnagy indexe, véges vektor terek altereinek száma, kombinatorikus azonosságok q -analógjai. Egész számok partíciói, Jacobi formulák, Ramanujan-Rodgers-azonosság. Möbius függvény kiszámítási módszerei, hálók, Euler részben rendezett halmazok. Aszimptotikus formulák. Részben rendezett halmazok kiterjesztéseinek száma, vegyes térfogat, log-konkáv sorozatok, részben rendezett halmazok dimenziója. Jeu-de-taquin, tablók, szimmetrikus függvények, Hopf-algebrák.

Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics Vol. 1., Corrected reprint of the 1986 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 49., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics. Vol. 2., Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 62., Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

1.4.6. Algebrai és véletlen módszerek a kombinatorikában (MATD4xx)

Véletlen módszer lényege, Ramsey számok, hipergráfok 2-színezése, diszkrepancia. Második momentum módszer, martingálok, Lovász-lemma, pszeudo véletlen módszerek, valószínűségi számítási becslések. Példák alkalmazásokra. Véletlen gráfok különböző modelljei. Threshold-függvények. Véletlen gráfok evolúciója. Véletlen Turing gépek. Véletlen bonyolultsági osztályok: BPP, RP, PP. Prímtesztelés. Polinom azonosságok ellenőrzése. Véletlen párhuzamos algoritmus teljes párosítás létezésének eldöntésére. Véletlen párhuzamos algoritmus maximális független halmaz keresésére. Véletlen séták gráfokon. $s - t$ összefüggőség. Térfogatmérés.

Noga Alon and Joel H. Spencer, The probabilistic method, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

Béla Bollobás, Modern graph theory, Graduate Texts in Mathematics vol. 184., Springer-Verlag, New York, 1998.

Lovász László, Algoritmusok bonyolultsága, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

1.4.7. Véges geometriák, kódok, kriptográfia (MATD4xx)

Véges testek konstrukciója, additív és multiplikatív csoportjaik. Véges test feletti affin és projektív síkok. Véges síkok, blokkrendszerek, illeszkedési struktúrák, incidenciamátrix. Véges síkok rendje, kombinatorikus tulajdonságaik. Automorfizmusok, izomorfizmusok, kollineációk. Projektív lineáris transzformációk. Kúpszeletek osztályozása a véges projektív síkon. Ívek, Bose és Segre tételei. A hibajavító kódok működési sémája. Lineáris kódok, Hamming-távolság, hossz, dimenzió, minimum távolság. Gömbpakolási és Singleton-korlát. Perfekt kódok, MDS kódok. Hamming-kód, Reed-Solomon kód. Dekódolási eljárások. MDS kódok és ívek kapcsolata, Segre-sejtés. Elliptikus görbét használó kriptográfiai eljárások. APN függvények és alkalmazásuk a kriptográfiában.

Kiss Gy., Szőnyi T.: Véges geometriák, Polygon 2001.

J. H. van Lint: Introduction to coding theory. Springer 1998.

J.W.P. Hirshfeld: Projective Geometries Over Finite Fields. Oxford University Press, 1997.

C. Carlet: Boolean Functions for Cryptography and Coding Theory. Cambridge University Press, 2021.

1.4.8. Válogatott fejezetek a gráfelméletből (MATD4xx)

A modern gráfelméletnek mély és gyümölcsöző kapcsolatai vannak a matematika más területeivel, mint például a számelmélettel, algebrával, geometriával, valószínűségi számítással, számítógéptudománnyal és analízissel. Sőt, még más természettudományos területeken, mint

például a biológia és a kémia is előfordulhatnak olyan problémák, amelyeket gráfelméleti módszerekkel lehet megoldani. Ennek a kurzusnak a célja, hogy bemutassa a hallgatóknak az alapvető tételeket és módszereket, megismertesse őket a legújabb kutatási témákkal és néhány fontos alkalmazással. Például a gráf és hipergráf regularitás különböző formái és alkalmazásuk, véletlen gráfok, expanderek, extrémális problémák megoldásai. Egy másik példa a szubmoduláris függvények alkalmazása több kombinatorikus optimalizációs problémában és azok kapcsolata a matroidokkal.

1.5. Analízis

1.5.1. Mérték- és integrálelmélet (MATD5xx)

Mértéktér, mérhető függvények. Az integrál definíciója, konvergencia-tételek. Mérték kiterjesztése félalgebráról a generált σ -algebrára. Mértékek megadása $\mathbb{R}^n$ -en, a Lebesgue-mérték. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata. Mértékterek szorzata, a Fubini tétel. Borel mértékek regularitása. Luzin és Jegorov tételei. A Hölder- és a Minkowski-egyenlőtlenségek. Az $L_p(\mu)$ függvényterek, a Banach-tér és a Hilbert-tér fogalma. Altér ortogonális komplementere, Hilbert-tér duálisa. Komplex mértékek, teljes változás. Mértékek Lebesgue-féle felbontása, a Radon–Nikodym-tétel. Polárfelbontás, Hahn-felbontás. Komplex Borel-mértékek megadása az egyenesen, korlátos változású függvények.

Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.

W. Rudin: Real and complex analysis

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

1.5.2. Komplex függvénytan (MATD5xx)

Mittag-Leffler tétele meromorf függvények parciális törtekre bontásáról, a $\cot \pi z$ felbontása. Weierstrass tétele egész függvények szorzat-előállításáról, a $\sin \pi z$ felbontása. A gamma-függvény. Racionális törtfüggvényekkel való approximáció, Runge tétele. A nyílt egységsíklapon analitikus függvények Hardy-féle H_p terei. Határértékek a körvonalon, Fatou tétele. Riesz Frigyes és Marcell tétele, Szegő tétele. Blaschke-szorzatok, belső és külső függvények, faktorizáció. A zárt egységsíklapon folytonos és a nyílt egységsíklapon analitikus függvények Banach algebrája. Az eltolás-operátor invariáns alterei a H^2 Hilbert térben.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

K. Hoffmann: Banach spaces of analytic functions

W. Rudin: Real and complex analysis

1.5.3. Funkcionálanalízis (MATD5xx)

Ortonormált rendszerek Hilbert terekben, Hilbert tér dimenziója. Fourier sorok konvergenciája, Cesaro és Abel összegzés. A Hahn-Banach tétel és alkalmazásai, Banach limesz, Banach integrál és mérték. A Banach-Steinhaus tétel, a nyílt leképezések tétele és a zárt gráf tétel; alkalmazásai Fourier sorokra. Az L_p terek duálisai, reflexivitás. A folytonos függvények terének duálisa, Riesz

reprezentáció tétele. A Weierstrass-Stone approximáció tétel.

Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.

F. Riesz–B. Szőkefalvi-Nagy: Functional analysis

W. Rudin: Real and complex analysis

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

1.5.4. Banach-algebrák és operátorelmélet (MATD5xx)

Ortonormált bázis Hilbert terekben, az altérháló. Eltolás-, szorzás- és integrál-operátorok. Adjungálás, normális operátorok, ortogonális projekciók. A kompakt operátorok ideálja. Banach algebra elemének spektruma, spektrálsugár, a Riesz-Dunford kalkulus. Térbeli spektrum-fogalmak, kompakt operátor spektruma. Kommutatív Banach algebrák, Gelfand transzformáció, a Gelfand-Naimark tétel. Operátor-topológiák, önadjungált operátorok monoton sorozatai. Spektrálmérték, spektráltétel. Függvény-kalkulus és függvénymodell normális operátorokra. Neumann bikommutáns tétele, kommutatív Neumann algebrák. Kompakt operátor invariáns alterei, Lomonoszov tétele.

Kérchy László: Hilbert terek operátorai, Polygon, Szeged, 2003

1.5.5. Válogatott fejezetek a funkcionálanalízisből (MATD5xx)

A kurzus célja, hogy a funkcionálanalízis kiterjedt és szerteágazó tudományterületébe komolyabb és mélyebb bepillantást nyújtson az előadó és a hallgatói igények szerinti témaválasztással. Javasolt témák:

- a lineáris funkcionálanalízis alaptételeinek alkalmazásai;
- a Banach terek geometriájának egyes kérdései;
- a konvexitás következményei;
- a topologikus vektorterek elméletének elemei és alkalmazásai;
- bevezetés a Banach algebrák elméletébe.

1.5.6. Approximációelmélet (MATD5xx)

Approximáció pozitív operátorokkal, Korovkin tétele. Weierstrass és Weierstrass–Stone tétel. Folytonossági és simasági modulusok, Jackson tétel, direkt tételek. Deriváltak becslése, Bernstein tétel és az approximációelmélet inverz tételei. Legjobban közelítő polinomok jellemzése, extrémális szignatúrák. L_p -approximáció. Bernstein polinomok naturációja, parabola módszer.

G. G. Lorentz: Approximation of functions

G. G. Lorentz–R. DeVore: Approximation theory

1.5.7. Potenciálelmélet (MATD5xx)

Logaritmikus potenciálok; szuperharmonikus függvények; Riesz reprezentációs tétel; elvek; egyensúlyi mértékek és potenciálok; potenciálok külső térben; Riesz potenciálok; alkalmazások.

T. Ransford: Potentials Theory on the Complex Plane

E. B. Saff-V. Totik: Logarithmic Potentials with External Fields

1.5.8. Fourier-sorok, Fourier-integrálok I (MATD5xx)

A trigonometrikus rendszer teljessége. Bessel egyenlőtlenség, Parseval formula. Fourier sorok konvergenciája: Riemann-Lebesgue lemma, Dini tétele, lokalizációs elv, Dirichlet-Jordan tétel, Lebesgue állandók. Fourier sorok szummálhatósága: Fejér tétele és következményei, Lebesgue tétele, integrálható függvény Lebesgue pontjai. Fourier sorok divergenciája: Fejér és Kolmogorov példái. Speciális trigonometrikus sorok, amelyeknek együtthatói monoton konvergálnak zérushoz.

A. Zygmund: Trigonometric series

1.5.9. Fourier-sorok, Fourier-integrálok II (MATD5xx)

Fourier sorok abszolút konvergenciája: Bernstein és Zygmund tételei, Wiener és Lévy tételei. A konjugált függvény egzisztenciája, Abel-Poisson közepek. A konjugált sor Fourier karaktere, Fourier sor és konjugált sor konvergenciája L_1 -normában. Riesz-Thorin interpolációs tétel, Hausdorff-Young és Riesz Frigyes tételei. Marcinkiewicz interpolációs tétele, Paley tétele Fourier együtthatókról. Többszörös Fourier sorok szummálhatósága.

A. Zygmund: Trigonometric series

1.6. Sztochasztika

1.6.1. Valószínűségelmélet (MMNK61E)

Véletlen változók és vektorváltozók, eloszlásfüggvény. Véletlen változók függetlensége, Kolmogorov 0-1 törvény, Borel-Cantelli-lemmák. Várható érték. Karakterisztikus függvény. Eloszlásbeli konvergencia, folytonossági tétel, portmanteau tétel. Többdimenziós normális eloszlás. Konvergenciatípusok. Kolmogorov-egyenlőtlenség. Nagy számok törvényei. Centrális határeloszlás-tétel. Feltételes várható érték. Martingálok diszkrét időben, martingál konvergenciatétel.

K. B. Athreya, S. N. Lahiri: Measure Theory and Probability Theory, 2006, Springer. ISBN-13: 9780387329031 P. Billingsley: Probability and Measure, 3rd edition, 1995, John Wiley & Sons, New York. ISBN-13: 978-8126517718 R. B. Ash: Probability and Measure Theory, 2nd edition, 2000, Academic Press. ISBN-13: 9780120652020 W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1, 3rd edition, 1968, Wiley. ISBN-13: 9780471257080 A. Klenke: Probability Theory, 3rd edition, 2020, Springer. ISBN-13: 978-3030564018 A. N. Shiryaev: Probability-1, 3rd edition, 2016, Springer. ISBN-13: 978-1493979059 A. N. Shiryaev: Probability-2, 3rd edition, 2019, Springer. ISBN-13: 978-1071618295

1.6.2. Sztochasztikus folyamatok (MMNV63E)

Kolmogorov konzisztencia tétele. Martingálok diszkrét és folytonos időben, Doob-Meyer-felbontás, opcionális megállási tétel, Doob-féle maximál-egyenlőtlenség, martingál konvergenciatétel. Gauss-folyamatok, Wiener-folyamat. Ito-féle sztochasztikus integrál, sztochasztikus differenciálegyenletek, diffúziós folyamatok. Markov-folyamatok általános definíciója és átmenetvalószínűségei, Chapman-Kolmogorov-egyenletek. Kolmogorov előre- és visszafelé haladó egyenletei. R. Durrett. Probability: theory and examples, volume 31 of Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010. ISBN 0521765390 I. Karatzas and S.E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0387976558 L. Breiman. Probability. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1968. ISBN 0898712963 J.L. Doob. Stochastic processes. Reprint of the 1953 original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. ISBN 9780471523697

1.6.3. Pénzügyi és kockázati folyamatok (MMNV64E)

Tőzsdei termékek. Portfólió, stratégia, önfinanszírozás, fedezet. Ekvivalens martingálmérték, arbitrázsmertesség és teljesség diszkrét idejű piacokon. Exponenciális Brown-mozgás és Girsanov tétele. Black-Scholes-modell és Black-Scholes-formula. Kamatlábmodellek. Felújítási folyamatok és Poisson-folyamat, elemi felújítási tétel. Kockázati folyamatok és klasszikus rizikófolyamat. Lundberg-kitevő és Cramér-Lundberg-tétel.

R.J. Elliott and P.E. Kopp. Mathematics of financial markets. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, second edition, 2005. ISBN 0387212922 S. Asmussen and M. Steffensen. Risk and insurance - a graduate text, volume 96 of Probability Theory and Stochastic Modelling. Springer, Cham, 2020. ISBN 3030351750 I. Karatzas and S. E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0387976558 A.N. Shiryaev. Essentials of stochastic finance, volume 3 of Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999. ISBN 9810236050

1.6.4. Idősorok statisztikai elemzése (MMNV61E)

Idősorok trendelemzése. ARMA és ARIMA folyamat. Autokorrelációs és parciális autokorrelációs függvény. Durbin-Levinson-algoritmus. Paraméterbecslés Yule-Walker- és maximum likelihood módszerrel. Idősorok előrejelzése. Állapottérmodellek és Kálmán-szűrő. Pénzügyi idősorok modellezése ARCH és GARCH folyamatokkal. Gyengén stacionárius folyamatok (speciálisan ARMA folyamatok) spektrális reprezentációja és előrejelzése a frekvenciatartományban. Spektrálanalízis.

Brockwell, Davis: Time Series: Theory and Methods, Springer, 2006, ISBN 1441903194. Brockwell, Davis: Introduction to Time Series and Forecasting, Springer, 2010, ISBN 0387953515. Cryer, Chan: Time Series Analysis with Applications in R, Springer, 2010, ISBN 0387759581. Tsay: An Introduction to Analysis of Financial Data with R, Wiley, 2012, ISBN 0470890819.

1.6.5. Matematikai statisztika (MMNV62E)

Rendezett minták elmélete. Elégségesség, teljesség, exponenciális eloszláscsalád. Fisher-információ, Cramér-Rao-egyenlőtlenség, Rao-Blackwell-Kolmogorov-tétel. Neyman-Pearson-alaplemma. Wald-

féle valószínűséghányados próba. Wishart-sűrűség. Paraméterbecslés és hipotézisvizsgálat többdimenziós normális modellben. Lineáris módszerek. Kontingenciatáblák elemzése, osztályozási módszerek. Algoritmikus modellek.

Borovkov: Mathematical statistics. Gordon and Breach, Amsterdam, 1998, ISBN 0471979139. Rao: Linear statistical inference and its applications, New York, Wiley, 1973, ISBN 0471708232.

1.6.6. Markov-láncok (MATD6xx)

A diszkrét idejű Markov-láncok fogalma és átmenetvalószínűségei, a Markov-tulajdonság ekvivalens definíciói. Többlépéses átmenetvalószínűségek, Chapman–Kolmogorov-egyenletek. Időhomogén Markov-láncok kommunikációs osztályai, az állapotok periódusa. Az erős Markov-tulajdonság, visszatérési idők, az állapotok típusa. Stacionárius eloszlás és ergodicitás. Folytonos idejű időhomogén Markov-láncok: definíció, átmenetvalószínűségek, Chapman–Kolmogorov-egyenletek. Az infinitezimális generátor és Kolmogorov egyenletei. Az állapotváltozások dinamikája. A születési-halálozási folyamat és tömegkiszolgálási modellek.

Norris: Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Karlin, Taylor: A first course in stochastic processes. Academic Press, New York, 1975.

Feller: An introduction to probability theory and its applications. Vol. I. John Wiley & Sons, New York, 1968.

1.6.7. Elágazó folyamatok (MATD6xx)

Generátorfüggvények, a Galton–Watson-folyamat és a kihalási tétel. Többtípusos elágazó folyamatok várható érték mátrixa, a folyamat aszimptotikus viselkedése szubkritikus, kritikus és szuperkritikus esetben. Folytonos idejű és kortól függő folyamatok. Biológiai alkalmazások.

Athreya, Ney: Branching processes. Springer-Verlag, New York, 1972.

Kimmel, Axelrod: Branching processes in biology. Springer-Verlag, New York, 2002.

1.6.8. Válogatott fejezetek a sztochasztikából (MATD6xx)

A kurzus a valószínűségszámítás, a sztochasztikus folyamatok vagy a statisztika egy kiválasztott, haladó témáját dolgozza fel részletesen. A lehetséges témák – a teljesség igénye nélkül – a következők: Valószínűségi mértékek konvergenciája (C- és D-terek, feszesség, Prohorov-tétel); Folytonos idejű elágazó folyamatok (konstrukció határértékként, többtípusú elágazó folyamatok, kapcsolat sztochasztikus differenciálegyenletekkel); Lévy-folyamatok (Lévy–Hincsin-formula, Lévy–Itô-felbontás, szubordinátorok); Nehéz farkú jelenségek (reguláris változású függvények, nehéz farkú véletlen változók és határeloszlás-tételek, nehéz farkú idősorok, paraméterbecslés); Véletlen mértékek és ambit folyamatok (Lévy-bázis, Lévy-bázis szerinti integrálás, ambit folyamatok); Sztochasztikus kalkulus és sztochasztikus differenciálegyenletek (Itô-kalkulus, martingálreprezentáció, sztochasztikus integrálás szemimartingál szerint, SDE-k gyenge és erős megoldásai); Markov-folyamatok (generátorok és félcsoportok, lokális idők, kiránduláselmélet).

1.7. Matematikadidaktika

1.7.1. Problémamegoldás a matematikában és a matematika tanításában (MATD7xx)

Probléma a matematikában, különféle értelmezések. A problémamegoldási folyamat modelljei: Pólya heurisztikus modellje, Schoenfeld heurisztikus modellje, Mason modellje. A problémamegoldás sémája; általános és speciális heurisztikák, ezek bemutatása konkrét problémákon keresztül. A problémamegoldási képességek fejlesztésének alapfeltételei Wittmann szerint. Problémamegoldási stratégiák, heurisztikus elvek, kontrollmódszerek.

Pólya György: A gondolkodás iskolája

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II.

Pólya György: A matematikai gondolkodás művészete I-II. (Indukció és analógia; A plauzibilis következtetés)

Alan H. Schoenfeld: Mathematical Problem Solving

Alan H. Schoenfeld (ed.): Mathematical Thinking and Problem Solving

Erich Ch. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts

Arthur Engel: Problem-Solving Strategies

Loren C. Larson: Problem-Solving Through Problems

Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába

1.7.2. Kutatásmódszertan és alkalmazott statisztika (MATD7xx)

A kurzus elsődleges célja a matematikai didaktika alprogram hallgatóinak bemutatni a didaktikai kutatásokhoz szükséges módszertani és statisztikai alapjokat. Kutatásmódszertani alapok (kvalitatív és kvantitatív kutatás típusai, módszerei, kutatás tervezése, kérdőív készítése). Az adatgyűjtés módszerei. Statisztikai alapfogalmak, becslések (pontbecslések, konfidencia intervallumok), paraméteres és nemparaméteres próbák. Többváltozós módszerek (lineáris regresszió, egy- és kétszemponthoz varianciaanalízis, főkomponensanalízis, faktoranalízis, diszkriminanciaanalízis, logisztikus regresszió, klaszteranalízis). Újramintavételezés, hiányzó adatok kezelése (EM algoritmus). Statisztikai szoftverek használata.

Baran és mtsai (szerk): Bevezetés a matematikai statisztikába, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2009

Bolla Marianna, Krámlí András: Statisztikai következtetések elmélete, Typotex, Budapest, 2012

Csíkos Csaba: Pedagógiai kísérletek kutatómódszertana, Kutató-módszertani Kiskönyvtár, Gondolat Kiadó, 2012

Falus Iván (szerk): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe, Műszaki Könyvkiadó, Bp, 2014

Kontra József: A pedagógiai kutatások módszertana, egyetemi jegyzet, Kaposvári egyetem, 2011

1.7.3. Fejezetek a matematika kultúrtörténetéből (MATD7xx)

A deduktív matematika kialakulása, a hellén kor matematikája. Az iszlám kultúrák matematikája. A reneszánsz kor európai matematikája. A magasabbfokú egyenletek megoldása, ill. megoldhatósága Mezopotámiától Galois-ig.

Boyer: A History of Mathematics

Corry: Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures

Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times <https://www.wolframalpha.com/>

Rashed: The Development of Arabic Mathematics

Van der Waerden: Egy tudomány ébredése

válogatott matematikatörténeti cikkek

1.7.4. Elemi kombinatorika (MATD7xx)

Gyakorló matematikatanárok számára az kurzus tematikája lefedi a kombinatorika módszertani alapjait, ugyanakkor konkrét matematikai problémákra és megoldási stratégiákra fókuszál, és fejleszti a tanítási kompetenciákat.

- Kombinatorikai alapfogalmak: Permutációk, variációk, kombinációk, ismétléses és ismétlés nélküli esetek, Binomiális tétel alkalmazásai.
- Gráfelméleti nézőpontok: egyszerű gráfmodellek, Euler-út, Hamilton-kör, síkba rajzolható gráfok, gyakori iskolai problémák.
- Halmazelméleti alapok: rendezési elvek, szitaformula, skatulya-elv, Ramsey-típusú problémák.
- Részhalmazok, partíciók: Stirling-számok, Bell-számok, partíciók szemléltetése tanórai példákban.
- Számlálási módszerek: rekurzió, rekurzív egyenletek, generátorfüggvények alkalmazása gyakorlati példákban.
- Kombinatorikus valószínűségszámítás: klasszikus, geometriai és sztochasztikus problémák, események függetlensége.
- Algoritmikus gondolkodás: kombinatorikus problémák megoldása algoritmusokkal, tipikus iskolai olimpia-feladatok elemzése.
- Matematikai modellezés: szöveges feladatok kombinatorikai háttere, modellek létrehozása, tanórai gyakorlatok.
- Pedagógiai aspektusok: kompetenciafejlesztés, kreatív és problémamegoldó gondolkodás támogatása, tanítási módszerek.

Módszertani elemek:

- Kombinatorikai problémák megoldása és magyarázata tanulók számára.

- Modellezés mindennapi alkalmazásokban (pl. játékok, sorsolások, hétköznapi szituációk).
- Az elemi kombinatorika tanítása: módszertani ötletek, feladattervezés, tipikus hibaelemzés.

1.7.5. Digitális erőforrások a geometriaoktatásban (MATD7xx)

A kurzus fő célja a GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>), a SageMath (<https://www.sagemath.org/>) és a Mathematica (<https://www.wolframalpha.com/>) programok oktatási célú lehetőségeinek megismerése.

A programok alapfunkciói. Geometriai objektumok kezelése az euklideszi, a hiperbolikus és az elliptikus síkon. Szerkesztési feladatok interaktív megoldása a GeoGebra programmal. Mértani helyek animációs kirajzolása. Interaktív feladatsorok összeállítása, tesztelése, elhelyezése a web-en.

1.7.6. Fejezetek a felsőbb matematika közép- és felsőfokú tanításának módszertanából (MATD7xx)

Betűs kifejezések, formalizálás. A klasszikus algebra elemeinek tanítási lehetőségei. Egyenletek, egyenletrendszerek tanítása. A lineáris algebra alapjainak tanítása induktív módon. Algebrai struktúrák bevezetése példákon keresztül; analógia, általánosítás és absztrakció. Felfedeztetés a számelméletben; konkrét példák, általános sejtés, a sejtés bizonyítása. Az euklideszi geometria tanítása induktív és deduktív módon. A nemeuklideszi geometriák tanítási lehetőségei a közép- és felsőfokú oktatásban. Egyszerű összeszámlálási problémák elemi megoldásától a formális hatványsorok alkalmazásáig. Gráfelméleti fogalmak és tételek tanítása konkrét példákon keresztül.

Az analízis (kalkulus) alapvető fogalmainak (határérték, folytonosság, differenciálhányados, integrál) előkészítése a középiskolában; a fogalmak bevezetésének lehetséges útjai: induktív, deduktív és konstruktív út. Az analízis elemeinek alkalmazásai a hétköznapi életben és a matematika más területein. Leíró statisztika és a hétköznapi élet. Statisztikai adatok megjelenítése, kapcsolódó fogalmak tanítása. Valószínűségi kísérletek, gyakoriság, relatív gyakoriság. Statisztikai mérőszámok és tulajdonságaik; adatsokaság várható értéke és szórása. A valószínűség fogalmának kialakítása. A valószínűségi változó fogalmának kialakítása konkrét példákon keresztül. Diszkrét valószínűségi változók; eloszlásuk, várható értékük, szórásuk. A nagy számok törvényének tanítási lehetőségei.

Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába

Fried Ervin: Absztrakt algebra - elemi úton

Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát

Gyapjas Ferenc: A kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának módszertani problémái

Pólya György: A gondolkodás iskolája

Pólya György: Indukció és analógia

Hans Freudenthal: Mathematics as an Educational Task Hans Freudenthal: Weeding and Sowing

Courant-Robbins: Mi a matematika?

Rényi Alfréd: Ars mathematica

Pintér Lajos: Analízis I-II.

Robert M. Young: Excursions in Calculus - An Interplay of the Continuous and the Discrete

Nemetz Tibor-Wintsche Gergely: Valószínűségyszámítás és statisztika mindenkinek

Alan H. Schoenfeld: Mathematical Thinking and Problem Solving

2. In English

2.1. Algebra

2.1.1. Group Theory (MATD1xx)

Multiplicative groups of fields. Permutation groups (primitive and multiply transitive groups, wreath product, Frobenius groups). Free groups (subgroups, rank, defining relations, Reidemeister-Schreier theory). Solvable groups. p-groups. Nilpotent groups. The transfer. The Burnside problem. Matrix groups. Finite simple groups. Subgroup lattices.

Aschbacher: Finite Group Theory.

M. Jr. Hall: The Theory of Groups.

Huppert: Endliche Gruppen.

Lyndon-Schupp: Combinatorial Group Theory.

2.1.2. Lattice Theory (MATD1xx)

Basic concepts in lattice theory, duality, complete lattices. Algebraic lattices, subalgebra lattices. Distributive lattices: Birkhoff and Stone's theorems, the structure of finite distributive lattices. Birkhoff's criterion, Dedekind's criterion. Free modular and distributive lattices on three generators. Congruences of lattices. Modular lattices: decomposition of intervals and elements. Geometric lattices and complemented modular lattices. Projective geometries as modular lattices. Varieties of lattices.

Czédli G.: Lattice Theory (in Hungarian)

G. Grätzer: General Lattice Theory

2.1.3. Semigroup Theory (MATD1xx)

Transformation semigroup, free semigroup. Ideal and Rees congruence, semilattice and group congruences. Green relations, the structure of D-classes. Regular element, inverse of an element, regular D-classes. Simple semigroups, principal factors, the Rees theorem on completely 0-simple semigroups. Completely regular semigroups, semilattices of groups. Inverse semigroups, the Wagner-Preston representation, natural partial order. Fundamental inverse semigroups, the Munn

representation. Commutative semigroups.

Grillet, P. A.: Semigroups: An Introduction to the Structure Theory, Marcel Dekker, 1995.

Howie, J. M.: Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, 1995.

2.1.4. Universal Algebra (MATD1xx)

Algebras, terms, polynomials. Subalgebra. Isomorphism, homomorphism, general isomorphism theorems. Direct product and other types of product. Subdirect decomposition, Birkhoff's theorem. Closure operators, closure systems. Congruence lattice. Free algebra. Varieties. Birkhoff's theorem for varieties, Birkhoff's completeness theorem. Equivalence of varieties. Properties characterized by identities for varieties. The theorems of Malcev and Pixley. Magari's theorem. Minimal varieties. Ultraproduct, congruence distributive varieties. Varieties generated by primal algebras. Quasi-primal algebras, discriminator varieties. Finite basis theorems.

Burris–Sankappanavar: A Course in Universal Algebra.

McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, Lattices, Varieties.

2.1.5. Ordered Sets (MATD1xx)

Series-parallel posets. Dilworth's chain decomposition theorem. Dimension of posets. Schnyder's theorem. The relationship between finite distributive lattices and finite posets. Sperner type theorems. Dismantlable posets and the fixed point property. Roddy's theorem. Obstructions for posets. Monotone operations, Tardos's theorem. Irreducible posets. Order varieties. Arithmetics of posets. Hashimoto's theorem.

Bogart–Freese–Kung (editors): The Dilworth Theorems. Selected papers of Robert P. Dilworth

Schröder: Ordered sets

Trotter: Combinatorics and Partially Ordered Sets. Dimension Theory

Selected papers from the mathematical journal Order

2.1.6. Clone Theory (MATD1xx)

Abstract clones and clones of operations. Galois connection. Connection of relational clones and clones of operations, the Baker–Pixley theorem. Completeness theorems for clones: Lagrange-interpolation in finite fields, the theorem of Werner and Wille, the theorem of Sheffer and Webb, Slupecki's theorem, Salomaa's theorem. Clone lattices over finite sets; the Janov–Mucnik theorem. Maximal clones; the Post theorem. Rosenberg's theorem and its applications: McKenzie's theorem, completeness of pattern functions. Sheffer functions; Rousseau's theorem. Minimal clones. Swierczkowski's lemma. Rosenberg's type-theorem. Primitive positive clones; Kuznecov's theorem.

Pöschel–Kaluzsnyin: Funktionen- und Relationenalgebren (in German)

Szendrei Ágnes: Clones in Universal Algebra

Selected papers of various authors

2.1.7. Finite Algebras (MATD1xx)

Primal algebras and their generalizations. The Stone-Hu duality for primal algebras. The term condition, commutators, Abelian algebras. McKenzie's theorem on strictly simple algebras of congruence permutable varieties. Locally finite varieties. The spectrum of a variety. The relationship between relational clones and free algebras. Finitely based algebras. Theorems of Post and Lyndon, the Lyndon groupoid, the Murskii groupoid, inherently non-finitely based algebras. The Pálffy-Pudlák theorem, Pálffy's theorem. Minimal algebras, elements of Tame Congruence Theory.

Burris–Sankappanavar: A Course in Universal Algebra

McKenzie–McNulty–Taylor: Algebras, Lattices, Varieties

Szendrei Ágnes: Clones in Universal Algebra

Hobby–McKenzie: The Structure of Finite Algebras

Selected papers of authors Baker–McNulty–Werner, Berman, McKenzie, Pálffy, Pudlák and others

2.1.8. Graph Homomorphism Problems (MATD1xx)

Algorithmic complexity classes (P, NP, NP-complete). The problem class CSP and the dichotomy conjecture. Different presentations of the homomorphism problem (for relational structures, algebras, systems of equations and varieties). The Feder-Vardi reductions. Schaefer's dichotomy theorem. Special cases (of a semilattice, a near-unanimity or a Maltsev operation). Weak near-unanimity operations. The proof of a conjecture of Bang-Jensen and Hell. Characterization of bounded width problems. The relationship between CSP and MMSNP.

Hell-Nesetril: Graphs and homomorphisms

Selected papers of Feder, Vardi, Bulatov, Jeavons, Dalmau, Kozik and Barto.

2.2. Dynamical Systems

2.2.1. Partial Differential Equations (MMNV23E)

1. Abstract variational problems: bilinear forms, minimization of quadratic functionals, the Lax-Milgram theorem, Galerkin approximation
2. Distributions and functions
3. Sobolev spaces
4. Variational formulation of elliptic problems 4.1. Elliptic equations 4.2. The Poisson equation 4.3. Diffusion 4.4. Eigenvalues of the Laplace operator 4.5. Equations in divergence form
5. Weak formulation of evolution problems 5.1. Parabolic equations 5.2. The heat equation: the Cauchy-Dirichlet problem, Galerkin approximation, energy estimations, existence and stability

L.C. Evans, Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc., 1998. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino, A Primer on PDEs, Models, Methods, Simulations, Springer Verlag, 2013.

2.2.2. Dynamical Systems (MMNV24E)

Existence and smoothness of invariant manifolds. Behaviour of solutions near fixed points and periodic orbits. Linearization. Orbital stability. Poincaré maps. Averaging. Limit sets. Asymptotically smooth maps and semi-groups. α -contracting semi-groups. Stability of invariant sets. Dissipative systems. Global attractors. Fix point theorems. Morse-Smale maps. Dimension of a global attractor. Periodic flows. Gradient systems. Examples: retarded FDE's, neutral FDE's, parabolic and hyperbolic PDE's.

M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

J. Palis, W. DeMelo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction*, Springer-Verlag, 1982.

S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

J. Guckenheimer and P.J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.

J. Hale, L. Magalhaes, W. Oliva, *An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems — Geometric Theory*, Springer-Verlag, 1984.

J. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, AMS, 1986.

D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, 1981.

M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, 1977.

V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Dover Publications, 1954.

H. L. Smith, *Monotone Dynamical Systems*, AMS, 1995.

R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, 1997.

2.2.3. Ordinary Differential Equations (MATD2xx)

Differential equations on manifolds. Existence and uniqueness theorems. Differential equations in spaces of infinite dimension. Linear systems. Infinitesimal generator. Integral manifolds. Linearization, the Hartman–Grobman theorem. Perturbation theory. Non-autonomous systems. Periodic and almost periodic equations. The method of averaging. Boundary value problems. Sturm-Liouville theory. Second order equations, oscillation. Limit sets and limit cycles. Poincaré-Bendixson theorem. Stability. The second method of Lyapunov. Invariance principles. First order partial differential equations. The Hamilton–Jacobi theory.

H. Amann, *Ordinary Differential Equations*, DeGruyter, 1990.

V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992.

J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, 1969.

D. V. Anosov, V. I. Arnold, Dynamical Systems I, Ordinary Differential Equations and Smooth Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.

C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer, 1999.

Ph. Hartman, Ordinary Differential Equations, Birkhäuser, 1982.

M. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

M. A. Naimark, Linear Differential operators, Nauka, 1969 (in Russian).

V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Dover Publications, 1954.

J. Palis, W. DeMelo, Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1982.

V. A. Pliss, Integral Manifolds of Periodic Systems of Differential Equations, Nauka, 1977 (in Russian).

2.2.4. Functional Differential Equations (MATD2xx)

The abstract theory of phase spaces, trajectories, solutions. Existence and uniqueness theorems. Continuous dependence on the initial data. New phenomena in comparison with the ordinary differential equations. Continuability and compactness of solutions. Linear functional differential equations. Oscillation for first and second order equations. Stability. Integro-differential equations. Neutral equations. Geometric theory of autonomous equations. The existence of periodic solutions. Applications from biology, mechanics, and other sciences.

O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walter, Delay Equations, Springer, 1995.

J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1977.

T. A. Burton, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, 1985.

G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Staffans, Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge University Press, 1990.

I. Györi, G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations, Clarendon Press, 1991.

Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, Functional Differential Equations with Infinite Delay, Springer-Verlag, 1991.

V. B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of Functional Differential Equations, Academic Press, 1986.

T. Krisztin, H.-O. Walter, J. Wu, Shape, Smoothness and Invariant Stratification of an Attracting Set for Delayed Monotone Positive Feedback, AMS, 1999.

S. H. Saperstone, Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces, Springer-Verlag, 1981.

2.2.5. Numerical Methods for Differential Equations (MATD2xx)

1. Numerical methods for ordinary differential equations: 1.1. Numerical solution of first order initial value problems: Euler and Runge-Kutta methods 1.2. Second order boundary value problems: finite differences, introduction to finite element methods
2. Numerical methods for partial differential equations: 2.1. First order equations, conservation laws, weak solutions: transport equation, waves, Burgers' equation, the Riemann-problem, shock waves 2.2. Numerical methods for first order equations: finite difference methods, the CFL-condition, finite element solutions 2.3. Diffusion, numerical algorithms for the heat equation: Dirichlet and Neumann boundary conditions, an explicit, an implicit and the Crank-Nicolson method, finite elements 2.4. The Laplace equation: numerical solution with the finite difference method 2.5. Reaction-diffusion equations: finite element solution of the Fisher equation 2.6. The wave equation: Dirichlet and Neumann boundary conditions, finite difference methods, the CFL condition, finite element solution

E. B. Becker, G. F. Carey and J. T. Oden, *Finite Elements: An Introduction*. Vol. I. , Prentice-Hall, 1981
Jeffery Cooper, *Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB*. Birkhauser, 1998. Peter J. Olver, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2014

2.2.6. Dynamical Models (MATD2xx)

Basic steps of mathematical modeling and their computer implementations: investigation and visualization of data sets, building and studying models, fitting. Discrete, continuous, deterministic and stochastic models Overview of mathematical and computing tools via examples: data sets, differential and difference equations, cellular automata; fitting; discretization and linearization of models; optimization. Impulsive systems and applications; time- and state dependent switches. Special features of mathematical programming languages: data structures, operations for expressions and functions; rule-based programming Oscillations: biologic, mechanical and electric oscillators; linear and nonlinear oscillations; damping; Applications of impulsive systems; state and time dependent control. Some models in life sciences: concepts of population dynamics; continuous and discrete models; appearance of delays Models for one species: unbounded and bounded growth, harvesting strategies. Interaction of several species: competition, cooperation, predator-prey models. Spatio-temporal models: patches, flows, compartmental models; reaction-diffusion: cellular automata and partial differential equation models. Models in epidemiology: SIS, SIR, SEIR,... models; vaccination strategies Models of chemical reactions, drug dosing and drug interactions

Dreyer, T. P.: *Modelling with Ordinary Differential Equations*, CRC Press, 1993, ISBN 9780849386367
Leah Edelstein-Keshet: *Mathematical Models in Biology*, SIAM, ISBN: 978-0-89871-554-5
Meerrschart, M.M., *Mathematical Modelling*, Academic Press, 1999, ISBN: 9780123869128 Murray, D.J.: *Mathematical Biology*, Springer, 1997. ISBN 978-3-662-08542-4

2.2.7. Nonlinear Dynamics (MATD2xx)

Two-dimensional autonomous systems, Poincaré-Bendixson theorem. Saddle property, invariant manifolds: stable, unstable and center manifold. Hartman-Grobman theorem. Stability theory, Lyapunov functions. Stability of periodic solutions, Poincaré maps, orbital stability. Structural stability, generic properties. Elementary bifurcations, bifurcation branches in biological and

physical models. Classification of phase diagram, Poincaré normal form. Attractors and their basins. Lagrange equations, Hamiltonian vector fields. Discrete Dynamical Systems. Circle maps, quadratic maps, bifurcations of periodic points. Smale horseshoe, symbolic dynamics and chaos. The Lorenz system.

M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2004. L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 1998. S. Salsa, F.M.G. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino, *A Primer on PDEs, Models, Methods, Simulations*, Springer Verlag, 2013.

2.3. Geometry

2.3.1. Algebraic Topology (MMNM42E)

Homotopy and simplicial complexes. Subdivision and the simplicial approximation theorem. The fundamental group and methods of calculation. Classification of triangulable 2-manifolds. Singular homology groups and methods of calculation: simplicial homology, exact sequences. Homology groups with arbitrary coefficients, and the Lefschetz Fixed-Point Theorem. Cohomology groups and calculation theorems. The Alexander-Poincaré duality theorem. Homotopy groups and CW-complexes. The theorem of J. H. C. Whitehead and the cellular approximation theorem. Homology and Cohomology of CW-Complexes. The Hurewicz theorem. Cohomology products

S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton, 1952.

E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Van Nostrand Reinold, London, 1970.

W. S. Massey, *Singular Homology Theory*, Springer, 1980.

2.3.2. Combinatorics of Convex Polytopes (MMNM43E)

Theorems of Carathéodory, Radon, Helly and its applications. The inductive construction of polytopes, Gale-transforms and Gale-diagrams. Euler's relation, the Dehn-Sommerville equations. Upper bounds for the number of k -faces. Combinatorial types of 3-polytopes, Steinitz's theorem. Properties of boundary complexes, the van Kampen-Flores theorem. Characterization of the f -vector. Addition and decomposition of polytopes. Hamiltonian paths and circuits on polytopes. Regular polytopes.

H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee: *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Reinhardt and Winston, New York, 1964.

L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee: Helly's theorem and its relatives, *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (Convexity) (1963), 101 - 180.

B. Grünbaum: *Convex Polytopes*, John Wiley & Sons, London, 1967.

2.3.3. Integral Geometry and Geometric Probability (MATD3xx)

Random closed sets, random measures and point processes, Poisson point processes, Palm distributions, convex hull of random points, random projections of polytopes, extremal problems for probability and expectation, approximation of convex bodies by random polytopes, economic cap covering and its applications, central limit theorems for random polytopes.

R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry, Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

Baddeley, A.; Bárány, I.; Schneider, R.; Weil, W.: *Stochastic geometry. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, September 13–18, 2004. With additional contributions by D. Hug, V. Capasso and E. Villa. Edited by W. Weil. Lecture Notes in Mathematics, 1892.* Springer-Verlag, Berlin, 2007.

Santaló, Luis A.: *Integral geometry and geometric probability. Second edition. With a foreword by Mark Kac.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

2.3.4. High-Dimensional Convex Geometry (MATD3xx)

Combinatorial properties of convex sets, Carathéodory, Radon, Helly theorems and their generalizations and applications. Separation of convex sets, duality. Approximations of convex sets, Blaschke's selection theorem. Operations on convex sets, mixed volumes. The isoperimetric theorem. Bodies of constant width. Valuations on convex bodies. Zonoids.

H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Univ. Press 47 (1958).

L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (Convexity) (1963), 101–180.

B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, John Wiley & Sons, London, 1967.

P. M. Gruber, J. M. Wills, *Convexity and its applications*, Birkhäuser, 1983.

2.3.5. Brunn-Minkowski Theory of Convex Bodies (MATD3xx)

Convex bodies and their boundaries. Duality. Minkowski sum, zonoids. Outer and inner parallel sets, curvature measures, quermassintegrals. Mixed volume, estimates. Inequalities, Brunn-Minkowski theorem, Minkowski inequality, isoperimetric theorem, Aleksandrov-Fenchel inequality. Minkowski theorem. Covariogram, difference body, Steiner symmetrization.

P.M. Gruber: *Convex and discrete geometry*, Springer, 2007. ISBN: 978–3-540-71132-2 R. Schneider: *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, 2013 (2nd ed.). ISBN: 978-1-139-00385-8 Szabó L.: *Bevezetés a konvex geometriába*, ELTE jegyzet (2018).

2.3.6. Discrete and Combinatorial Geometry (MATD3xx)

Designs: definition of block designs, their parameters, and divisibility constraints. Steiner triples and their various constructions. Hadamard matrices. Resolvable designs, Baranyai's theorem. Finite projective and affine geometries: latin squares, parameters of finite geometries. Desargues and

Pappos planes, coordinatization of geometries Finite reflection groups, Coxeter groups and complexes. Buildings.

M.Jr. Hall, Combinatorial theory, Waltham, Mass. 1967.

P.J. Cameron, Combinatorics: topics, techniques, algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

S. Jukna, Extremal combinatorics, with applications in computer science, Second edition, Texts in Theoretical Computer Science, An EATCS Series, Springer, Heidelberg, 2011.

K. Brown, Buildings, Springer-Verlag, London, 1989.

2.3.7. Stochastic Geometry (MATD3xx)

Random closed sets, random measures and point processes, Poisson point processes, Palm distributions, convex hull of random points, random projections of polytopes, extremal problems for probability and expectation, approximation of convex bodies by random polytopes, economic cap covering and its applications, central limit theorems for random polytopes.

R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.

Baddeley, A.; Bárány, I.; Schneider, R.; Weil, W.: Stochastic geometry. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, September 13–18, 2004. With additional contributions by D. Hug, V. Capasso and E. Villa. Edited by W. Weil. Lecture Notes in Mathematics, 1892. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

Santaló, Luis A.: Integral geometry and geometric probability. Second edition. With a foreword by Mark Kac. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

2.3.8. Geometry of Vector Systems (MATD3xx)

- Bases, definition of general frames, Parseval and tight frames
- Energy minimizing vector systems, the existence of tight frames
- Tensor products of vectors, F. John's ellipsoid theorem
- Ordering problems of vector systems, the problem of Steinitz, the Steinitz-Bergström Conjecture
- Summing problems of vector systems, sign sequence questions, polarization problems
- Online versions of vector summation problems, Chobanyan's transference principle
- Plank problems, Bang's lemma, generalizations

2.3.9. Selected Topics in Geometry (MATD3xx)

The primary aim of this course is to present the latest developments in geometry, along with the specialized background knowledge necessary to understand them. Throughout the course, we explore topics in modern geometry that are currently at the forefront of the field's evolution or are closely related to specific research directions. Examples include high-dimensional phenomena,

problems at the intersection of convex geometry and functional analysis, topics emerging at the boundary between stochastic geometry and probability theory, as well as current research questions in discrete geometry.

2.4. Discrete Mathematics

2.4.1. Discrete Mathematics 2 (MMNK51E)

Degree sequences, realizable sequences, Havel-Hakimi theorem. Trees, enumeration of trees: recursions, bijective methods, Kirschoff-formula. Coloring graphs, Hajos proof method for non-colorability. Graphs with high girth and large chromatic number. Edge coloring, Vizing theorem. Matchings in graphs, algorithms and mini-max theorems. Tutte's theorem, Berge's formula. Higher order connectivity. Extremal graph theory, Turan's theorem, Erdos-Stone theorem, excluding, open problems, Ramsey theorem for graphs, extensions, applications. Density theorems. Eigenvalues of graphs and their applications.

B. Bollobas, Modern graph theory, Graduate Text in Mathematics, Springer, Berlin, 1998, ISBN 0-387-98488-7 R. Diestel, Graph theory, 4th edition, Graduate Text in Mathematics, Springer, Berlin, 2010, ISBN 978-3-662-53621-6

2.4.2. Extremal Graph Theory (MMNM55E)

Mantel's theorem, Turán's theorem, Erdős-Stone-Simonovits's theorem, Zarankiewicz's problem, graphs with maximum number of edges such that they do not contain complete/complete bipartite graphs of a given size. Generalised Turán type of questions with other forbidden subgraphs (e.g.: trees, cycles), and on hypergraphs. Pancyclic graphs, Bondy's theorem, Moon-Moser inequalities. Saturation problems, Kászonyi-Tuza's theorem. Ramsey's theorem, Ramsey type questions for graphs. Szemerédi's regularity lemma and its variants, triangle removal lemma, counting lemma, embedding lemma and their applications, Roth's theorem. Pseudo-random graphs, Chung-Graham-Wilson's theorem. Further well-known tools and methods in extremal combinatorics: the probabilistic method and its applications, Lovász local lemma. Combinatorial Nullstellensatz and its applications. The proof of the Kneser conjecture using topological methods (Borsuk-Ulam theorem).

Béla Bollobás: Modern Graph Theory. Springer Graduate Texts in Mathematics. Springer; 1998. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0619-4> Stasys Jukna: Extremal Combinatorics with applications in computer science, Springer; 2011. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-17364-6> Tibor Szabó: Extremal Graph Theory with emphasis on constructions, <https://page.mi.fu-berlin.de/szabo/PDF/notes.pdf> Noga Alon, Joel H. Spencer: The probabilistic method, Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley; 1991. <https://www.amazon.com/Probabilistic-Method-Noga-Alon/dp/0470170204>

2.4.3. Mathematical Cryptography (MMNM56E)

Basic concepts of cryptography. Attacks. AES-128 symmetric key encryption, decryption and key scheduling. Cryptanalysis of linear S-boxes. Nonlinearity of Boolean functions and Walsh-Hadamard transform. Characterization of bent functions. Differential uniformity, APN functions. Linear recursions. Feedback step counters. Maximum period LFSRs. RSA public key encryption: algorithm, key generation, encoding, decoding, proof of decoding. Prime generation. Attacks on

RSA. Key management based on the Diffie-Hellman principle. Elliptic curves over finite fields. Cryptographic methods using elliptic curves. Discrete logarithm problem. Zero-knowledge proof based on graph isomorphism problem. Fiat-Shamir zero-knowledge proof. Basic concepts of error-correcting coding. The Reed–Solomon code and its decoding. Binary Goppa codes, parameters, decoding. Quantum-resistant code-based cryptography: the McEliece scheme.

Alko R. Meijer: Algebra for Cryptologists. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer Cham; 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-30396-3> Claude Carlet: Boolean Functions for Cryptography and Coding Theory. Cambridge: Cambridge University Press; 2021. <https://doi.org/10.1017/978110860680>

2.4.4. Combinatorial Computational Models (MMNM53E)

Decision trees, evasive functions, lower bounds. Communication complexity, tiling of matrices and the rank lower bound. Branching programs, bounded width and Barrington's theorem. Formulas, Khrapchenko's and Subbotovskaya's theorem, monotonicity and lower bounds. Circuits, monotonicity and Razborov's theorem, bounded depth, Switching lemma, Smolensky's theorem.

S. Jukna, Boolean function complexity, Advances and frontiers, Algorithms and Combinatorics, 27. Springer, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-24507-7. I. Wegener, The complexity of Boolean functions, Wiley-Teubner Series in Computer Science, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester; B.G. Teubner, Stuttgart, 1987. ISBN 0-471-91555-6.

2.4.5. Counting Problems (MATD4xx)

Formal power series. Major index of permutations. Enumerating subspaces of finite geometries, q -analogues of classical combinatorial objects. Partitions of integers, Jacobi formulas, Ramanujan–Rodgers identities. Möbius function of partially ordered sets and methods for its computation. Asymptotical formulas. Linear extension of partially ordered sets, dimension of partially ordered sets. Enumerating linear extensions of a partially ordered sets, complexity of enumeration problems. Log-concave sequences. Jeu-de-taquin, tableaux, symmetric functions.

Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics Vol. 1., Corrected reprint of the 1986 original, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 49., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Richard P. Stanley, Enumerative combinatorics. Vol. 2., Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 62., Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

W.T. Trotter, Combinatorics and partially ordered sets, Dimension theory, Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1992.

2.4.6. Algebraic and Random Methods in Combinatorics (MATD4xx)

Probabilistic method. Basic applications: bounding Ramsey numbers, 2-coloring of hypergraphs, discrepancy. The first moment method, the second moment method and the exponential moment method. Bounds from probability theory: Chernoff's bound. Lovász' local lemma, its combinatorial and algorithmic proof. Applications. Martingales, and their applications in combinatorics. The semirandom method, and its applications. Different models of random graphs. Erdős–Rényi model.

Threshold function for different monotone properties. Evolution of random graphs. Randomized algorithms, randomized complexity classes: BPP, RP, PP. Examples: primality testing, checking polynomial identities, testing the existence of perfect matching on a parallel machine, s-t connectivity, computing the volume.

N. Alon, J. Spencer, The probabilistic method, Third edition, With an appendix on the life and work of Paul Erdős. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2008.

Béla Bollobás, Modern graph theory, Graduate Texts in Mathematics vol. 184., Springer-Verlag, New York, 1998.

R. Motwani, P. Raghavan, Randomized algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

2.4.7. Finite Geometries, Codes, Cryptography (MATD4xx)

Construction of finite fields, their additive and multiplicative groups. Affine and projective planes over a finite field. Finite planes, block designs, incidence structures, incidence matrix. Order of finite planes, their combinatorial properties. Automorphisms, isomorphisms, collineations. Projective linear transformations. Classification of conics on the finite projective plane. Arcs, theorems of Bose and Segre. Operation scheme of error correction codes. Linear codes, Hamming distance, length, dimension, minimum distance. Sphere packing and Singleton bounds. Perfect codes, MDS codes. Hamming code, Reed-Solomon code. Decoding procedures. Relationship between MDS codes and arcs, Segre conjecture. Elliptic curve cryptography. APN functions and their applications in cryptography.

Kiss Gy., Szőnyi T.: Finite Geometries. Chapman and Hall/CRC, 2023.

J. H. van Lint: Introduction to coding theory. Springer 1998.

J.W.P. Hirshfeld: Projective Geometries Over Finite Fields. Oxford University Press, 1997.

C. Carlet: Boolean Functions for Cryptography and Coding Theory. Cambridge University Press, 2021.

2.4.8. Selected Topics in Graph Theory (MATD4xx)

Modern graph theory has some deep and fruitful connections with other parts of mathematics such as number theory, algebra, geometry, probability theory, computer science and also analysis. Even some problems from other natural science fields like biology and chemistry can be attacked using graph theoretical methods. The aim of this course is to show the fundamental theorems and methods to the students, introduce the newest research topics and some important applications. For example, the regularity properties of graphs and hypergraphs and their various applications for infinite graphs, expanders and for solving extremal problems. Another example is the use of submodular functions in several combinatorial optimization problems and their importance for matroids.

2.5. Analysis

2.5.1. Measure and Integration Theory (MATD5xx)

Measure space, measurable functions. Definition of the integral, convergence theorems. Extension of a measure from a semialgebra to the generated σ -algebra. Constructions of measures on $\mathbb{R}^n$, the Lebesgue measure. Connections between the Riemann integral and the Lebesgue integral. Product of measure spaces, Fubini's theorem. Regularity of Borel measures. Theorems of Luzin and Jęgorov. Hölder and Minkowski inequalities. The function spaces $L_p(\mu)$, the notions of Banach spaces and Hilbert spaces. Orthogonal complement of a subspace, the dual of a Hilbert space. Complex measures, total variation. Lebesgue decomposition of measures, Radon–Nikodym theorem. Polar decomposition, Hahn decomposition. Constructions of complex Borel measures on the real line, functions of bounded variation.

Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.

W. Rudin: Real and complex analysis

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

2.5.2. Complex Analysis (MATD5xx)

Mittag-Leffler's theorem on the decomposition of meromorphic functions into the sum of partial fractions, the decomposition of $\cot \pi z$. Weierstrass' theorem on the factorization of entire functions, the factorization of $\sin \pi z$. The gamma function. Approximation by rational functions, Runge's theorem. The Hardy spaces H_p of analytic functions on the open unit disk. Limit on the circle, Fatou's theorem. The F. and M. Riesz theorem, Szegő's theorem. Blaschke products, inner and outer functions, the canonical factorization. The Banach algebra of functions analytic on the open unit disk and continuous on the closed unit disk. The shift-invariant subspaces of the Hilbert space H^2

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

K. Hoffmann: Banach spaces of analytic functions

W. Rudin: Real and complex analysis

2.5.3. Functional Analysis (MATD5xx)

Orthonormal systems in Hilbert spaces, the dimension of a Hilbert space. Convergence of Fourier series, summation in the senses of Cesaro and Abel. The Hahn-Banach theorem and its applications, Banach limit, Banach integral and measure. Banach-Steinhaus theorems, the open mapping theorem and the closed graph theorem; their applications to Fourier series. The duals of L_p spaces, reflexivity. The dual of the space of continuous functions, Riesz representation theorem. The Weierstrass-Stone approximation theorem.

Kérchy László: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.

F. Riesz–B. Szőkefalvi-Nagy: Functional analysis

2.5.4. Banach Algebras and Operator Theory (MATD5xx)

Orthonormal basis in Hilbert space, the subspace lattice. Shift-, multiplication- and integral-operators. Adjoint of an operator, normal operators, orthogonal projections. The ideal of compact operators. The spectrum of an element of a Banach algebra, spectral radius, the Riesz–Dunford functional calculus. Spatial spectra, spectrum of a compact operator. Abelian Banach algebras, the Gelfand transformation, the Gelfand–Naimark theorem. Operator-topologies, monotone sequences of selfadjoint operators. Spectral measure, the spectral theorem. Functional calculus and functional model for normal operators. Neumann’s double commutant theorem, abelian von Neumann algebras. Invariant subspaces of compact operators, Lomonosov’s theorem.

Kérchy László: Hilbert terek operátorai, Polygon, Szeged, 2003

2.5.5. Selected Topics in Functional Analysis (MATD5xx)

The aim of the course is to provide a more serious and deeper insight into the vast and diverse field of functional analysis, with the choice of topics tailored according to the lecturer’s and students’ interests. Suggested topics include:

- Applications of the fundamental theorems of linear functional analysis;
- Certain questions in the geometry of Banach spaces;
- Consequences of convexity;
- Elements of the theory of topological vector spaces and applications;
- Introduction to the theory of Banach algebras.

2.5.6. Approximation Theory (MATD5xx)

Approximation by positive operators, the theorems of Korovkin. The Weierstrass and the Weierstrass-Stone theorem. Moduli of continuity and smoothness, Jackson’s theorem, direct theorems. Estimates of derivatives, Bernstein’s inequality and inverse theorems. Characterization of best approximating polynomials, extremal signatures. Lp-approximation. Saturation of the Bernstein polynomials, the parabola method.

2.5.7. Potential Theory (MATD5xx)

Logarithmic potentials; superharmonic functions; Riesz representation; principles; equilibrium measures and potentials; potentials with external fields; Riesz potentials; applications.

T. Ransford: Potentials Theory on the Complex Plane

E. B. Saff-V. Totik: Logarithmic Potentials with External Fields

2.5.8. Fourier Series, Fourier Integrals I (MATD5xx)

Completeness of the trigonometric system. Bessel inequality, Parseval's formula. The convergence of Fourier series: Riemann-Lebesgue lemma, Dini's theorem, the localization principle, Dirichlet-Jordan theorem, Lebesgue constants. Summability of Fourier series: Fejér's theorem and its consequences, Lebesgue's theorem, Lebesgue points of integrable functions. The divergence of Fourier series: the examples of Fejér and Kolmogorov. Special trigonometric series, coefficients of which are monotonically tending to zero.

A. Zygmund: Trigonometric series

2.5.9. Fourier Series, Fourier Integrals II (MATD5xx)

Absolute convergence of Fourier series: theorems of Bernstein, Zygmund, Wiener and Lévy. The existence of conjugate functions and Abel-Poisson means. The Fourier character of a conjugate series and the convergence of a Fourier series and conjugate series in L_1 -norm. The Riesz-Thorin interpolation theorem. The Hausdorff-Young theorem and theorems of F. Riesz. Interpolation theorem of Marcinkiewicz, and Paley's theorem on the Fourier coefficients. Summability of multiple Fourier series

A. Zygmund: Trigonometric series

2.6. Stochastics

2.6.1. Probability Theory (MMNK61E)

Random variables and vector variables, distribution function. Independence of random variables, Kolmogorov's zero-one law, Borel-Cantelli lemmas. Expected value. Characteristic function. Convergence in distribution, continuity theorem, portmanteau theorem. Multidimensional normal distribution. Types of convergence. Kolmogorov's inequality. Laws of large numbers. Central limit theorem. Conditional expectation. Martingales in discrete time, martingale convergence theorem.

K. B. Athreya, S. N. Lahiri: Measure Theory and Probability Theory, 2006, Springer. ISBN-13: 9780387329031 P. Billingsley: Probability and Measure, 3rd edition, 1995, John Wiley & Sons, New York. ISBN-13: 978-8126517718 R. B. Ash: Probability and Measure Theory, 2nd edition, 2000, Academic Press. ISBN-13: 9780120652020 W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1, 3rd edition, 1968, Wiley. ISBN-13: 9780471257080 A. Klenke: Probability Theory, 3rd edition, 2020, Springer. ISBN-13: 978-3030564018 A. N. Shiryaev: Probability-1, 3rd edition, 2016, Springer. ISBN-13: 978-1493979059 A. N. Shiryaev: Probability-2, 3rd edition, 2019, Springer. ISBN-13: 978-1071618295

2.6.2. Stochastic Processes (MMNV63E)

Kolmogorov's consistency theorem. Martingales in discrete and continuous time, Doob-Meyer decomposition, optional stopping theorem, Doob's maximal inequality, martingale convergence theorem. Gaussian processes, Wiener process. Ito's stochastic integral. Stochastic differential equations, diffusion processes. General definition of Markov processes and their transition probabilities. Chapman-Kolmogorov equations. Kolmogorov's forward and backward equations.

R. Durrett. Probability: theory and examples, volume 31 of Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010. ISBN 0521765390 I. Karatzas and S.E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0387976558 L. Breiman. Probability. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1968. ISBN 0898712963 J.L. Doob. Stochastic processes. Reprint of the 1953 original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. ISBN 9780471523697

2.6.3. Financial and Risk Processes (MMNV64E)

Stock market products. Portfolio, strategy, self-financing, and hedging. Equivalent martingale measure, arbitrage-free markets, and market completeness in discrete-time markets. Exponential Brownian motion and Girsanov's theorem. Black-Scholes model and Black-Scholes formula. Interest rate models. Renewal processes and Poisson process, elementary renewal theorem. Risk processes and the classical risk process. Lundberg exponent and the Cramér-Lundberg theorem.

R.J. Elliott and P.E. Kopp. Mathematics of financial markets. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, second edition, 2005. ISBN 0387212922 S. Asmussen and M. Steffensen. Risk and insurance - a graduate text, volume 96 of Probability Theory and Stochastic Modelling. Springer, Cham, 2020. ISBN 3030351750 I. Karatzas and S. E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0387976558 A.N. Shiryaev. Essentials of stochastic finance, volume 3 of Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999. ISBN 9810236050

2.6.4. Statistical Analysis of Time Series (MMNV61E)

Trend analysis of time series. ARMA and ARIMA processes. Autocorrelation and partial autocorrelation functions. Durbin-Levinson algorithm. Parameter estimation, Yule-Walker and maximum likelihood methods. Time series forecasting. State-space models and the Kalman filter. Modeling financial time series with ARCH and GARCH processes. Spectral representation and forecasting of weakly stationary processes (especially ARMA processes) in the frequency domain. Spectral analysis.

Brockwell, Davis: Time Series: Theory and Methods, Springer, 2006, ISBN 1441903194. Brockwell, Davis: Introduction to Time Series and Forecasting, Springer, 2010, ISBN 0387953515. Cryer, Chan: Time Series Analysis with Applications in R, Springer, 2010, ISBN 0387759581. Tsay: An Introduction to Analysis of Financial Data with R, Wiley, 2012, ISBN 0470890819.

2.6.5. Mathematical Statistics (MMNV62E)

Theory of order statistics. Sufficiency, completeness, exponential family of distributions. Fisher information, Cramér-Rao inequality, Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem. Neyman-Pearson lemma. Wald's likelihood ratio test. Wishart distribution. Parameter estimation and hypothesis testing in the multivariate normal model. Linear methods. Analysis of contingency tables, classification methods. Algorithmic models.

Borovkov: Mathematical statistics. Gordon and Breach, Amsterdam, 1998, ISBN 0471979139. Rao: Linear statistical inference and its applications, New York, Wiley, 1973, ISBN 0471708232.

2.6.6. Markov Chains (MATD6xx)

Discrete-time Markov chains, transition probabilities, equivalent definitions. Multi-step transition probabilities, Chapman–Kolmogorov equations. Communication classes, periodic states. Strong Markov property, recurrence times, types of states. Stationary distribution and ergodicity. Continuous-time Markov chains: definition, transition probabilities, Chapman–Kolmogorov equations. Infinitesimal generator and Kolmogorov equations. Jump chain and holding times. Birth-death processes and queueing systems.

Norris: Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Karlin, Taylor: A first course in stochastic processes. Academic Press, New York, 1975.

Feller: An introduction to probability theory and its applications. Vol. I. John Wiley & Sons, New York, 1968.

2.6.7. Branching Processes (MATD6xx)

Generating functions, the Galton–Watson process and the extinction criterion. Multitype branching processes, mean matrix, asymptotic behavior in the critical, the subcritical and the supercritical case. Continuous-time and age-dependent processes. Applications in biology.

Athreya, Ney: Branching processes. Springer-Verlag, New York, 1972.

Kimmel, Axelrod: Branching processes in biology. Springer-Verlag, New York, 2002.

2.6.8. Selected Topics in Stochastics (MATD6xx)

The course covers one of the advanced topics in probability theory, stochastic processes, and statistics. The topics include, but are not limited to, the following: Convergence of Probability Measures (C and D spaces, tightness, Prohorov’s theorem); Continuous-Time Branching Processes (construction as scaling limits, multitype branching processes, connections to SDEs); Lévy Processes (Lévy–Khintchine formula, Lévy–Itô decomposition, subordinators); Heavy-Tailed Phenomena (regularly varying functions, heavy-tailed random variables and limit theorems, heavy-tailed time series, parameter estimation); Random Measures and Ambit Processes (independently scattered random measures, integration with respect to Lévy bases, ambit processes); Stochastic Calculus and Stochastic Differential Equations (Itô calculus, martingale representation, integration with respect to semimartingales, weak and strong solutions of SDEs); Markov Processes (generators and semigroups, local times, excursion theory).

2.7. Didactics of Mathematics

Didactics of Mathematics is offered only in Hungarian.

2.7.1. Problem Solving in Mathematics and Mathematics Teaching (MATD7xx)

Problem in mathematics, various interpretations. Models of the problem-solving process: Pólya's heuristic model, Schoenfeld's heuristic model, Mason's model. The scheme of problem solving; general and specific heuristics, illustrated through concrete problems. The basic conditions for developing problem-solving skills according to Wittmann. Problem-solving strategies, heuristic principles, control methods.

György Pólya: How to Solve It

György Pólya: School of Problem Solving I-II.

György Pólya: The Art of Mathematical Thinking I-II. (Induction and Analogy; Plausible Reasoning)

Alan H. Schoenfeld: Mathematical Problem Solving

Alan H. Schoenfeld (ed.): Mathematical Thinking and Problem Solving

Erich Ch. Wittmann: Fundamental Questions of Mathematics Education

Arthur Engel: Problem-Solving Strategies

Loren C. Larson: Problem-Solving Through Problems

András Ambrus: Introduction to Mathematics Didactics

2.7.2. Research Methodology and Applied Statistics (MATD7xx)

The primary goal of the course is to present the methodological and statistical foundations necessary for didactic research to students in the mathematics didactics subprogram. Basics of research methodology (types and methods of qualitative and quantitative research, research design, questionnaire creation). Methods of data collection. Basic statistical concepts, estimations (point estimations, confidence intervals), parametric and non-parametric tests. Multivariate methods (linear regression, one- and two-factor analysis of variance, principal component analysis, factor analysis, discriminant analysis, logistic regression, cluster analysis). Resampling, handling missing data (EM algorithm). Use of statistical software.

Baran et al. (eds): Introduction to Mathematical Statistics, University of Debrecen Press, 2009

Marianna Bolla, András Krámlí: Theory of Statistical Inference, Typotex, Budapest, 2012

Csaba Csíkos: Research Methodology of Pedagogical Experiments, Research Methodology Mini-library, Gondolat Publishing, 2012

Iván Falus (ed): Introduction to Methods of Pedagogical Research, Műszaki Publishing, Budapest, 2014

József Kontra: Methodology of Pedagogical Research, University notes, Kaposvár University, 2011

Tamás Rudas: Public Opinion Research: Interpretation and Critique, Corvina, 2006

2.7.3. Chapters from the Cultural History of Mathematics (MATD7xx)

The rise of deductive mathematics, mathematics in the Hellenistic period. Mathematics in Islamic cultures. Renaissance European mathematics. The solution and solvability of higher-degree equations, from Mesopotamia to Galois.

Boyer: A History of Mathematics

Corry: Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures

Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times

<https://www.wolframalpha.com/>

Rashed: The Development of Arabic Mathematics

Van der Waerden: The Awakening of a Science

selected articles on the history of mathematics

2.7.4. Elementary Combinatorics (MATD7xx)

For practicing mathematics teachers, the course covers the methodological basics of combinatorics, yet focuses on concrete mathematical problems and solution strategies, and develops teaching competencies.

- Basic concepts of combinatorics: Permutations, variations, combinations, cases with and without repetition, applications of the Binomial theorem.
- Graph theory perspectives: basic graph models, Euler path, Hamilton cycle, planar graphs, frequent school problems.
- Fundamentals of set theory: ordering principles, sieve formula, pigeonhole principle, Ramsey-type problems.
- Subsets, partitions: Stirling numbers, Bell numbers, illustrating partitions through classroom examples.
- Counting methods: recursion, recursive equations, application of generating functions in practical examples.
- Combinatorial probability: classical, geometric and stochastic problems, independence of events.
- Algorithmic thinking: solving combinatorial problems with algorithms, analysis of typical school olympiad problems.
- Mathematical modeling: combinatorial background of word problems, model creation, classroom exercises.
- Pedagogical aspects: competency development, supporting creative and problem-solving thinking, teaching methods.

Methodological elements:

- Solving and explaining combinatorial problems for students.
- Modeling in everyday applications (e.g., games, draws, everyday situations).
- Teaching elementary combinatorics: methodological ideas, task design, typical error analysis.

2.7.5. Digital Resources in Geometry Education (MATD7xx)

The main goal of the course is to become familiar with the educational possibilities of GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>), SageMath (<https://www.sagemath.org/>) and Mathematica (<https://www.wolframalpha.com/>).

Basic functions of the programs. Handling geometric objects in the Euclidean, hyperbolic, and elliptic planes. Solving construction problems interactively with GeoGebra. Drawing loci with animations. Compiling, testing, and publishing interactive problem sets on the web.

2.7.6. Chapters from the Methodology of Teaching Advanced Mathematics in Secondary and Higher Education (MATD7xx)

Lettered expressions, formalization. Possibilities for teaching classical elements of algebra. Teaching equations and systems of equations. Teaching the basics of linear algebra using an inductive approach. Introduction of algebraic structures through examples; analogy, generalization, and abstraction. Discovery-based teaching in number theory; concrete examples, general conjectures, proof of conjectures. Teaching Euclidean geometry using inductive and deductive methods. Possibilities for teaching non-Euclidean geometries at the secondary level. From the elementary solution of simple counting problems to the application of formal power series. Teaching graph theory concepts and theorems through concrete examples.

Preparation for the fundamental concepts of analysis (calculus) (limit, continuity, derivative, integral) in secondary school; possible approaches to introducing concepts: inductive, deductive, and constructive. Applications of elements of analysis in everyday life and other fields of mathematics. Descriptive statistics and everyday life. Displaying statistical data, teaching related concepts. Probability experiments, frequency, relative frequency. Statistical measures and their properties; expected value and variance of data sets. Formation of the concept of probability. Formation of the concept of random variable through concrete examples. Discrete random variables; their distribution, expected value, variance. Possibilities for teaching the law of large numbers.

András Ambrus: Introduction to Mathematics Didactics

Ervin Fried: Abstract Algebra – In an Elementary Way

Zoltán Dienes: Let's Build Up Mathematics

Ferenc Gyapjas: Methodological Problems of Teaching Combinatorics and Probability

György Pólya: How to Solve It

György Pólya: Induction and Analogy

Hans Freudenthal: Mathematics as an Educational Task Hans Freudenthal: Weeding and Sowing

Courant-Robbins: What is Mathematics?

Alfréd Rényi: Ars mathematica

Lajos Pintér: Analysis I-II.

Robert M. Young: Excursions in Calculus – An Interplay of the Continuous and the Discrete

Tibor Nemetz–Gergely Wintsche: Probability and Statistics for Everyone

Alan H. Schoenfeld: Mathematical Thinking and Problem Solving