

Hányféleképpen válthatom föl a pénzemet?

Szittyai István

Németh László Gimnázium, Hódmezővásárhely

2012. december 8. SZTE Bolyai Intézet

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

- ha kettőt, akkor *egy lehetőség* van: $20 = 10 + 10$

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

- ha kettőt, akkor *egy lehetőség* van: $20 = 10 + 10$
- ha egyet, akkor a maradék 10 eurót kell előállítani 1,2,5 eurósokból

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

- ha kettőt, akkor *egy lehetőség* van: $20 = 10 + 10$
- ha egyet, akkor a maradék 10 eurót kell előállítani 1,2,5 eurósokból
 - ▶ két 5-ös: *1 lehetőség*: $20 = 10 + 5 + 5$

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

- ha kettőt, akkor *egy lehetőség* van: $20 = 10 + 10$
- ha egyet, akkor a maradék 10 eurót kell előállítani 1,2,5 eurósokból
 - ▶ két 5-ös: *1 lehetőség*: $20 = 10 + 5 + 5$
 - ▶ egy 5-ös: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség*:
 $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; $5 = 2 + 1 + 1 + 1$; $5 = 2 + 2 + 1$

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

- ha kettőt, akkor *egy lehetőség* van: $20 = 10 + 10$
- ha egyet, akkor a maradék 10 eurót kell előállítani 1,2,5 eurósokból
 - ▶ két 5-ös: *1 lehetőség*: $20 = 10 + 5 + 5$
 - ▶ egy 5-ös: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség*:
 $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; $5 = 2 + 1 + 1 + 1$; $5 = 2 + 2 + 1$
 - ▶ egy sem: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*

1. probléma: pénzváltás

Hányféleképpen válthatok föl egy 20 euróst 1,2,5 és 10 eurósokra?

Megoldás: esetszétválasztás aszerint, hogy hány 10-est használok föl:

- ha kettőt, akkor *egy lehetőség* van: $20 = 10 + 10$
- ha egyet, akkor a maradék 10 eurót kell előállítani 1,2,5 eurósokból
 - ▶ két 5-ös: *1 lehetőség*: $20 = 10 + 5 + 5$
 - ▶ egy 5-ös: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség*:
 $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; $5 = 2 + 1 + 1 + 1$; $5 = 2 + 2 + 1$
 - ▶ egy sem: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*
- ha egyet sem: 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra.

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; 1 lehetőség

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; *1 lehetőség*
- ha hármat: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség* (ld. fent)

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; *1 lehetőség*
- ha hármat: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség* (ld. fent)
- ha kettőt: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; *1 lehetőség*
- ha hármat: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség* (ld. fent)
- ha kettőt: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*
- ha egyet: 15 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *8 lehetőség*

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; *1 lehetőség*
- ha hármat: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség* (ld. fent)
- ha kettőt: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*
- ha egyet: 15 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *8 lehetőség*
- ha nullát: 20 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *11 lehetőség*

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; *1 lehetőség*
- ha hármat: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség* (ld. fent)
- ha kettőt: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*
- ha egyet: 15 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *8 lehetőség*
- ha nullát: 20 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *11 lehetőség*

folyt.

A 20-ast hányféleképpen válthatom föl 1,2,5 eurósokra: hány 5-öst használok

- ha négyet: $20=5+5+5+5$; *1 lehetőség*
- ha hármat: 5 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *3 lehetőség* (ld. fent)
- ha kettőt: 10 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *6 lehetőség*
- ha egyet: 15 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *8 lehetőség*
- ha nullát: 20 eurót kell fölváltani 1,2-esekre, *11 lehetőség*

Ez összesen 40 lehetőség. (HF: felsorolni az összeset! :)

A partíció fogalma

- Ha létezne 1-től 20-ig mindenféle címlet, akkor 626 lehetőség van.

A partíció fogalma

- Ha létezne 1-től 20-ig mindenféle címlet, akkor 626 lehetőség van.
- Egy n pozitív egész szám *partícióján* egy

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

előállítást értünk, ahol az összeadandók pozitívak, sorrendjük lényegtelen és egy szám többször is szerepelhet.

A partíció fogalma

- Ha létezne 1-től 20-ig mindenféle címlet, akkor 626 lehetőség van.
- Egy n pozitív egész szám *partícióján* egy

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

előállítást értünk, ahol az összeadandók pozitívak, sorrendjük lényegtelen és egy szám többször is szerepelhet.

- Általában nemnövekvő sorrend, pl. $12 = 4 + 3 + 3 + 2$

A partíció fogalma

- Ha létezne 1-től 20-ig mindenféle címlet, akkor 626 lehetőség van.
- Egy n pozitív egész szám *partícióján* egy

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

előállítást értünk, ahol az összeadandók pozitívak, sorrendjük lényegtelen és egy szám többször is szerepelhet.

- Általában nemnövekvő sorrend, pl. $12 = 4 + 3 + 3 + 2$
- Sok helyen előfordulhatnak ! (számítástudomány, fizika, genetika, stb.)

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.
- pl.
 $4 = 1+1+1+1$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.
- pl.
 $4 = 1+1+1+1$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

- pl.

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

- pl.

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

- pl.

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

- pl.

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

- pl.

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.

- pl.

$$4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.
- pl.
 $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2$
- Ezek száma könnyen meghatározható:

$$c(n) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.
- pl.
 $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2$
- Ezek száma könnyen meghatározható:

$$c(n) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.
- pl.
 $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2$
- Ezek száma könnyen meghatározható:

$$c(n) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$$

Egy kis kitérő

- Ha sorrend lényeges, akkor *fölbontás*nak (ang: *composition*) szokás nevezni.
- pl.
 $4 = 1+1+1+1 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1 = 1+3 = 3+1 = 2+2$
- Ezek száma könnyen meghatározható:

$$c(n) = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$$

- miért lehet lényeges a sorrend egy összegben??
pl. ha egyforma dolgokat kapunk, nem mindegy, ki kap, ki nem és ki mennyit kap!

A partíció-függvény

Definition

Az $n \in \mathbb{N}$ szám partícióinak száma: $p(n)$

- Philippe Naude levele Euler-hez (1740): $p(n) = ?$

A partíció-függvény

Definition

Az $n \in \mathbb{N}$ szám partícióinak száma: $p(n)$

- Philippe Naude levele Euler-hez (1740): $p(n) = ?$
- Képlet?? Mekkora? (növekszik, de milyen gyorsan?)

A partíció-függvény

Definition

Az $n \in \mathbb{N}$ szám partícióinak száma: $p(n)$

- Philippe Naude levele Euler-hez (1740): $p(n) = ?$
- Képlet?? Mekkora? (növekszik, de milyen gyorsan?)
- Nem nehéz megmutatni, hogy $p(n) \leq F(n)$, az n . Fibonacci szám

A partíció-függvény

Definition

Az $n \in \mathbb{N}$ szám partícióinak száma: $p(n)$

- Philippe Naude levele Euler-hez (1740): $p(n) = ?$
- Képlet?? Mekkora? (növekszik, de milyen gyorsan?)
- Nem nehéz megmutatni, hogy $p(n) \leq F(n)$, az n . Fibonacci szám
- Euler évekig foglalkozott vele, egyik legszebb eredménye:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \dots$$

A partíció-függvény

Definition

Az $n \in \mathbb{N}$ szám partícióinak száma: $p(n)$

- Philippe Naude levele Euler-hez (1740): $p(n) = ?$
- Képlet?? Mekkora? (növekszik, de milyen gyorsan?)
- Nem nehéz megmutatni, hogy $p(n) \leq F(n)$, az n . Fibonacci szám
- Euler évekig foglalkozott vele, egyik legszebb eredménye:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \dots$$

- "*De partitione numerorum*", Szentpétervári Akadémia, 1750

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1
2	$2 = 1 + 1$	2

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1
2	$2 = 1 + 1$	2
3	$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$	3

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1
2	$2 = 1 + 1$	2
3	$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$	3
4	$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$	5

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1
2	$2 = 1 + 1$	2
3	$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$	3
4	$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$	5
5	$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = \dots$	7

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1
2	$2 = 1 + 1$	2
3	$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$	3
4	$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$	5
5	$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = \dots$	7
6	$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = \dots$	11

A $p(n)$ értékei:

n	partíciók	$p(n)$
0	0	1
1	1	1
2	$2 = 1 + 1$	2
3	$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$	3
4	$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$	5
5	$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = \dots$	7
6	$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = \dots$	11

Néhány további érték: $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(100) = 190569292$, $p(200) = 3972999029388 \approx 4 \cdot 10^{12}$

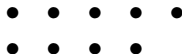
Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:



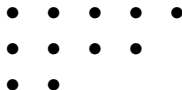
Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:



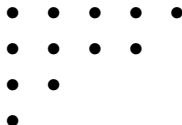
Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:



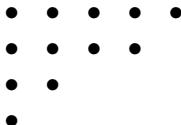
Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:



Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:

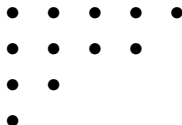


vagy $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$? konjugált diagramok, konjugálás.



Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:

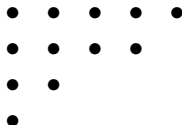


vagy $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$? konjugált diagramok, konjugálás.

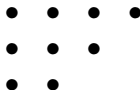


Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:

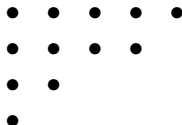


vagy $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$? konjugált diagramok, konjugálás.

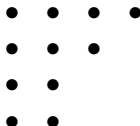


Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:

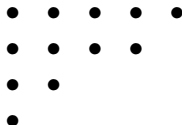


vagy $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$? konjugált diagramok, konjugálás.

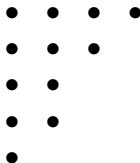


Ferrers-diagram (vagy Young-?)

A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:

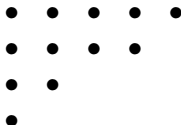


vagy $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$? konjugált diagramok, konjugálás.

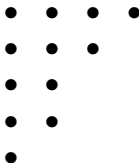


Ferrers-diagram (vagy Young-?)

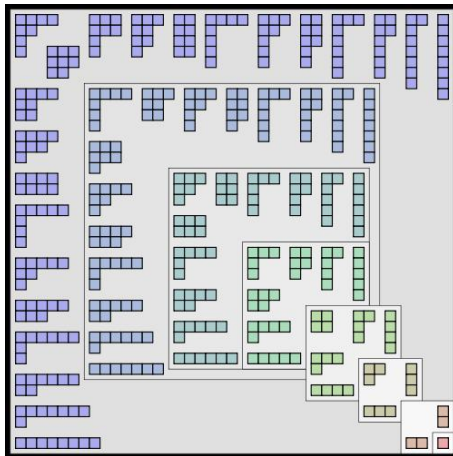
A partíciók ábrázolása: pöttyökkel, pl. a $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ábrázolása:



vagy $12 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1$? konjugált diagramok, konjugálás.



Ferrers-diagramok $n = 8$ -ig



Feladatok

- 1 Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?

Feladatok

- ① Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- ② $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$

Feladatok

- 1 Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- 2 $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$
- 3 $p(n|\text{egyenlő tagok}) = n$ osztóinak száma.

Feladatok

- ① Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- ② $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$
- ③ $p(n|egyenlő \text{ tagok}) = n$ osztóinak száma.
- ④ $p(n|különböző \text{ ptlan tagok}) = p(n|önkonjugált)$

Feladatok

- ① Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- ② $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$
- ③ $p(n|egyenlő \text{ tagok}) = n$ osztóinak száma.
- ④ $p(n|különböző \text{ ptlan tagok}) = p(n|önkonjugált)$
- ⑤ (Euler): $p(n|ptlan \text{ tagok}) = p(n|különböző \text{ tagok})$

Feladatok

- ① Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- ② $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$
- ③ $p(n|egyenlő \text{ tagok}) = n$ osztóinak száma.
- ④ $p(n|különböző \text{ ptlan tagok}) = p(n|önkonjugált)$
- ⑤ (Euler): $p(n|ptlan \text{ tagok}) = p(n|különböző \text{ tagok})$
- ⑥ Nyilván $p(n| \leq 1) = 1$, mennyi a $p(n| \leq 2)$ értéke?

Feladatok

- ① Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- ② $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$
- ③ $p(n|egyenlő \text{ tagok}) = n$ osztóinak száma.
- ④ $p(n|különböző \text{ ptlan tagok}) = p(n|önkonjugált)$
- ⑤ (Euler): $p(n|ptlan \text{ tagok}) = p(n|különböző \text{ tagok})$
- ⑥ Nyilván $p(n| \leq 1) = 1$, mennyi a $p(n| \leq 2)$ értéke?

Feladatok

- ① Mi a konjugáltja az $7 + 2 + 1$ ill. az $5 + 4 + 2 + 2 + 1$ partícióknak?
- ② $p(n|m \text{ db tag}) = p(n|a \text{ legnagyobb tag } m)$
- ③ $p(n|egyenlő \text{ tagok}) = n$ osztóinak száma.
- ④ $p(n|különböző \text{ ptlan tagok}) = p(n|önkonjugált)$
- ⑤ (Euler): $p(n|ptlan \text{ tagok}) = p(n|különböző \text{ tagok})$
- ⑥ Nyilván $p(n| \leq 1) = 1$, mennyi a $p(n| \leq 2)$ értéke? $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots =$$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots\end{aligned}$$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots\end{aligned}$$

Mi az együtthatója x^n -nek?

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots\end{aligned}$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots \end{aligned}$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

$$x^4 \cdot 1 \cdot 1 \dots = (x^1)^4 \qquad 4 \text{ db } 1\text{-es} \qquad 1 + 1 + 1 + 1$$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots \end{aligned}$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

$$\begin{array}{lll} x^4 \cdot 1 \cdot 1 \dots = (x^1)^4 & 4 \text{ db } 1\text{-es} & 1 + 1 + 1 + 1 \\ x \cdot 1 \cdot x^3 \dots = (x^1)^1 \cdot (x^3)^1 & 1 \text{ db } 1\text{-es, } 1 \text{ db } 3\text{-as} & 1 + 3 \end{array}$$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

$x^4 \cdot 1 \cdot 1 \dots = (x^1)^4$	4 db 1-es	$1 + 1 + 1 + 1$
$x \cdot 1 \cdot x^3 \dots = (x^1)^1 \cdot (x^3)^1$	1 db 1-es, 1 db 3-as	$1 + 3$
$x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \dots = (x^1)^2 \cdot (x^2)^1$	2 db 1-es, 1 db 2-es	$1 + 1 + 2$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

$x^4 \cdot 1 \cdot 1 \dots = (x^1)^4$	4 db 1-es	$1 + 1 + 1 + 1$
$x \cdot 1 \cdot x^3 \dots = (x^1)^1 \cdot (x^3)^1$	1 db 1-es, 1 db 3-as	$1 + 3$
$x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \dots = (x^1)^2 \cdot (x^2)^1$	2 db 1-es, 1 db 2-es	$1 + 1 + 2$
$1 \cdot x^4 \cdot 1 \dots = (x^2)^2$	2 db 2-es	$2 + 2$

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

$x^4 \cdot 1 \cdot 1 \dots = (x^1)^4$	4 db 1-es	$1 + 1 + 1 + 1$
$x \cdot 1 \cdot x^3 \dots = (x^1)^1 \cdot (x^3)^1$	1 db 1-es, 1 db 3-as	$1 + 3$
$x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \dots = (x^1)^2 \cdot (x^2)^1$	2 db 1-es, 1 db 2-es	$1 + 1 + 2$
$1 \cdot x^4 \cdot 1 \dots = (x^2)^2$	2 db 2-es	$2 + 2$
$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^4 \dots = (x^4)^1$	1 db 4-es	4

Generátorfüggvény, formális hatványsor

Definition

$$\{a_n\} \longleftrightarrow a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots = \\ = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \dots$$

Mi az együtthatója x^n -nek? Éppen $p(n)$!!

$x^4 \cdot 1 \cdot 1 \dots = (x^1)^4$	4 db 1-es	$1 + 1 + 1 + 1$
$x \cdot 1 \cdot x^3 \dots = (x^1)^1 \cdot (x^3)^1$	1 db 1-es, 1 db 3-as	$1 + 3$
$x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \dots = (x^1)^2 \cdot (x^2)^1$	2 db 1-es, 1 db 2-es	$1 + 1 + 2$
$1 \cdot x^4 \cdot 1 \dots = (x^2)^2$	2 db 2-es	$2 + 2$
$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^4 \dots = (x^4)^1$	1 db 4-es	4

De! Végtelen sok tényező, mindegyikben végtelen sok tag ... :- (

Generátorfüggvény (folyt.)

Minden tényezőben egy végtelen (formális) mértani sor áll. Tudjuk:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

ezért:

Generátorfüggvény (folyt.)

Minden tényezőben egy végtelen (formális) mértani sor áll. Tudjuk:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

ezért:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots =$$

Generátorfüggvény (folyt.)

Minden tényezőben egy végtelen (formális) mértani sor áll. Tudjuk:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

ezért:

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots &= \\ &= \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^3} \cdot \dots = \end{aligned}$$

Generátorfüggvény (folyt.)

Minden tényezőben egy végtelen (formális) mértani sor áll. Tudjuk:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

ezért:

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots &= \\&= \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^3} \cdot \dots = \\&= \frac{1}{(1 - x) \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - x^3) \cdot \dots}\end{aligned}$$

Nevező? (végtelen sok tényező, de mind kéttagú!)

Az Euler-féle ötszög-tétel

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}$$

... ..

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{22})\cdot A = (1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots)\cdot A$$

(a jobboldalon a kiírt tagok már nem változnak!)

Az Euler-féle ötszög-tétel

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}$$

... ..

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{22})\cdot A = (1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots)\cdot A$$

(a jobboldalon a kiírt tagok már nem változnak!)

- Mely kitevők maradnak meg és melyek nem?

Az Euler-féle ötszög-tétel

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}$$

... ..

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{22})\cdot A = (1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots)\cdot A$$

(a jobboldalon a kiírt tagok már nem változnak!)

- Mely kitevők maradnak meg és melyek nem?
- Mitől függ a megmaradó tagok előjele?

Az Euler-féle ötszög-tétel

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = 1 - x - x^2 + x^4 + x^5 - x^6$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) = 1 - x - x^2 + 2x^5 - x^8 - x^9 + x^{10}$$

... ..

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{22})\cdot A = (1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots)\cdot A$$

(a jobboldalon a kiírt tagok már nem változnak!)

- Mely kitevők maradnak meg és melyek nem?
- Mitől függ a megmaradó tagok előjele?
- $\pm x^n$ annyiszor fordul elő, ahányféleképpen n kül. tagokra partícionálható

Az Euler-féle ötszög-tétel

$$\begin{aligned}
 (1-x)(1-x^2) &= 1-x-x^2+x^3 \\
 (1-x)(1-x^2)(1-x^3) &= 1-x-x^2+x^4+x^5-x^6 \\
 (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) &= 1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10} \\
 &\dots \quad \dots
 \end{aligned}$$

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{22}) \cdot A = (1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots) \cdot A$$

(a jobboldalon a kiírt tagok már nem változnak!)

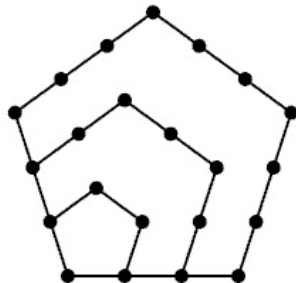
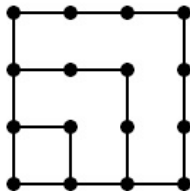
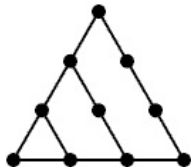
- Mely kitevők maradnak meg és melyek nem?
- Mitől függ a megmaradó tagok előjele?
- $\pm x^n$ annyiszor fordul elő, ahányféleképpen n kül. tagokra partícionálható
- páros számú tényező $\rightarrow$ poz. előjel; ptlan számú tényező $\rightarrow$ neg. előjel

Ötszögszámok

Ötszögszámok és általánosított ötszögszámok:

$$\frac{k(3k-1)}{2}, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{k(3k \pm 1)}{2}, k \in \mathbb{N}$$



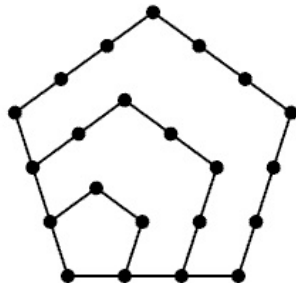
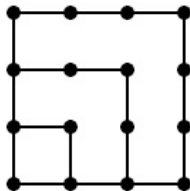
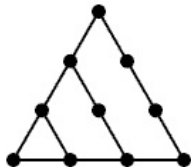
1, 5, 12, 22, 35, 51, ... illetve 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, ...

Ötszögszámok

Ötszögszámok és általánosított ötszögszámok:

$$\frac{k(3k-1)}{2}, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{k(3k \pm 1)}{2}, k \in \mathbb{N}$$



1, 5, 12, 22, 35, 51, ... illetve 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, ...
(HF: vezessük le a képletet!)

Euler ötszögtétele

Theorem

Az ált. ötszögszámok kivételével **minden** n szám ugyanannyiféleképpen partícionálható páros számú, mint páratlan számú tagra.

Az ötszögszámok esetén a különbség ± 1 , mégpedig 1 , ha k páros és -1 , ha k páratlan.

Euler ötszögtétele

Theorem

Az ált. ötszögszámok kivételével **minden** n szám ugyanannyiféleképpen partícionálható páros számú, mint páratlan számú tagra.

Az ötszögszámok esetén a különbség ± 1 , mégpedig 1 , ha k páros és -1 , ha k páratlan.

Corollary

Az Euler-féle hatványsorban csak azok a hatványok nem tűnnek el, amelyeknek kitevője ált. ötszögszám.

Ötszögtételből rekurzív képlet

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots}$$

Ötszögtételből rekurzív képlet

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots}$$
$$(p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots) \cdot ((1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots) = 1$$

Ötszögtételből rekurzív képlet

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots}$$

$$(p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots) \cdot ((1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots) = 1$$

$$(p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots) \cdot ((1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15} \dots)) = 1$$

Ötöztételből rekurzív képlet

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots}$$

$$(p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots) \cdot ((1-x) \cdot (1-x^2) \cdot (1-x^3) \cdot \dots) = 1$$

$$(p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots) \cdot ((1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15} \dots)) = 1$$

Az azonos kitevőjű hatványok együtthatói egyenlők, ebből:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - \dots \\ - \dots + (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + (-1)^k p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \dots = 0$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$p(0) \cdot 1 = 1$$

$$\longrightarrow p(0) = 1$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$p(0) \cdot 1 = 1$$

$$p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0$$

$$\longrightarrow p(0) = 1$$

$$\longrightarrow p(1) = p(0) = 1$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$\begin{array}{ll} p(0) \cdot 1 = 1 & \longrightarrow p(0) = 1 \\ p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0 & \longrightarrow p(1) = p(0) = 1 \\ p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot (-1) + p(2) = 0 & \longrightarrow p(2) = p(1) + p(0) = 2 \end{array}$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$\begin{array}{ll} p(0) \cdot 1 = 1 & \longrightarrow p(0) = 1 \\ p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0 & \longrightarrow p(1) = p(0) = 1 \\ p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot (-1) + p(2) = 0 & \longrightarrow p(2) = p(1) + p(0) = 2 \\ p(1) \cdot (-1) + p(2) \cdot (-1) + p(3) = 0 & \longrightarrow p(3) = p(2) + p(1) = 3 \end{array}$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$\begin{array}{ll} p(0) \cdot 1 = 1 & \longrightarrow p(0) = 1 \\ p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0 & \longrightarrow p(1) = p(0) = 1 \\ p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot (-1) + p(2) = 0 & \longrightarrow p(2) = p(1) + p(0) = 2 \\ p(1) \cdot (-1) + p(2) \cdot (-1) + p(3) = 0 & \longrightarrow p(3) = p(2) + p(1) = 3 \\ p(2) \cdot (-1) + p(3) \cdot (-1) + p(4) = 0 & \longrightarrow p(4) = p(3) + p(2) = 5 \end{array}$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$\begin{array}{ll}
 p(0) \cdot 1 = 1 & \longrightarrow p(0) = 1 \\
 p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0 & \longrightarrow p(1) = p(0) = 1 \\
 p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot (-1) + p(2) = 0 & \longrightarrow p(2) = p(1) + p(0) = 2 \\
 p(1) \cdot (-1) + p(2) \cdot (-1) + p(3) = 0 & \longrightarrow p(3) = p(2) + p(1) = 3 \\
 p(2) \cdot (-1) + p(3) \cdot (-1) + p(4) = 0 & \longrightarrow p(4) = p(3) + p(2) = 5
 \end{array}$$

$$p(0) \cdot 1 + p(3) \cdot (-1) + p(4) \cdot (-1) + p(5) = 0 \longrightarrow p(5) = p(4) + p(3) - p(0) = 7$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$\begin{array}{ll}
 p(0) \cdot 1 = 1 & \longrightarrow p(0) = 1 \\
 p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0 & \longrightarrow p(1) = p(0) = 1 \\
 p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot (-1) + p(2) = 0 & \longrightarrow p(2) = p(1) + p(0) = 2 \\
 p(1) \cdot (-1) + p(2) \cdot (-1) + p(3) = 0 & \longrightarrow p(3) = p(2) + p(1) = 3 \\
 p(2) \cdot (-1) + p(3) \cdot (-1) + p(4) = 0 & \longrightarrow p(4) = p(3) + p(2) = 5
 \end{array}$$

$$p(0) \cdot 1 + p(3) \cdot (-1) + p(4) \cdot (-1) + p(5) = 0 \longrightarrow p(5) = p(4) + p(3) - p(0) = 7$$

Theorem (Euler)

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \dots(?)$$

A rekurzív képlet alkalmazása

$$\begin{array}{ll}
 p(0) \cdot 1 = 1 & \longrightarrow p(0) = 1 \\
 p(0) \cdot (-1) + p(1) = 0 & \longrightarrow p(1) = p(0) = 1 \\
 p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot (-1) + p(2) = 0 & \longrightarrow p(2) = p(1) + p(0) = 2 \\
 p(1) \cdot (-1) + p(2) \cdot (-1) + p(3) = 0 & \longrightarrow p(3) = p(2) + p(1) = 3 \\
 p(2) \cdot (-1) + p(3) \cdot (-1) + p(4) = 0 & \longrightarrow p(4) = p(3) + p(2) = 5
 \end{array}$$

$$p(0) \cdot 1 + p(3) \cdot (-1) + p(4) \cdot (-1) + p(5) = 0 \longrightarrow p(5) = p(4) + p(3) - p(0) = 7$$

Theorem (Euler)

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \dots(?)$$

Hatékony algoritmus: $n^{1.5}$ -nel arányos a kiszámítási ideje.

Leonhard Euler (1707-1783)



A KÉPLET

Theorem (Hardy-Ramanujan; Rademacher)

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{24}\right)}} \right]$$

ahol

$$A_k(n) = \sum_{\substack{(h;k)=1 \\ 0 \leq h \leq k-1}} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h / k}$$

A KÉPLET

Theorem (Hardy-Ramanujan; Rademacher)

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{24}\right)}} \right]$$

ahol

$$A_k(n) = \sum_{0 \leq h \leq k-1}^{(h;k)=1} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h / k}$$

Csúnya, de legalább gyors! :-)

A KÉPLET

Theorem (Hardy-Ramanujan; Rademacher)

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \left[\frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{24}\right)}} \right]$$

ahol

$$A_k(n) = \sum_{0 \leq h \leq k-1}^{(h;k)=1} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h / k}$$

Csúnya, de legalább gyors! :-) Bizonyítás: (Hans Rademacher, 1937) 12 oldal ... (komplex függvénytanal és egyéb szépségekkel:)

G.H.Hardy (1877-1947) és S.A.Ramanujan(1887-1920)



G.H.Hardy (1877-1947) és S.A.Ramanujan(1887-1920)



"The Man Who Loved Numbers"

G.H.Hardy (1877-1947) és S.A.Ramanujan(1887-1920)



"The Man Who Loved Numbers"

Turán Pál: Egy különös életút, Ramanujan, I. rész, II.rész, Középiskolai Matematikai Lapok, 27(1977), 49-54, 97-106.

Monotonitás, korlátosság, határértékek

Theorem

$$p(n) < p(n+1) < 2p(n) \text{ és } p(n) < F(n)$$

Monotonitás, korlátosság, határértékek

Theorem

$$p(n) < p(n+1) < 2p(n) \text{ és } p(n) < F(n)$$

Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1 \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} (p(n+1) - p(n)) = \infty$$

(hasonlóan, mint pl. az $a_n = n^k$ sorozat(ok).)

Monotonitás, korlátosság, határértékek

Theorem

$$p(n) < p(n+1) < 2p(n) \text{ és } p(n) < F(n)$$

Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1 \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} (p(n+1) - p(n)) = \infty$$

(hasonlóan, mint pl. az $a_n = n^k$ sorozat(ok).)

Theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$$

Összehasonlítás:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{F(n)} = \tau (\approx 1,618)$$

(aranymetszés)

Aszimptotikus formula

Definition (aszimptotikus egyenlőség)

$$a(n) \sim b(n) \quad \text{ha} \quad \frac{a(n)}{b(n)} \rightarrow 1 \quad \text{midőn} \quad n \rightarrow \infty$$

Aszimptotikus formula

Definition (aszimptotikus egyenlőség)

$$a(n) \sim b(n) \quad \text{ha} \quad \frac{a(n)}{b(n)} \rightarrow 1 \quad \text{midőn} \quad n \rightarrow \infty$$

Example (Stirling-formula; prímek száma)

$$n! \sim 2n\pi \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Aszimptotikus formula

Definition (aszimptotikus egyenlőség)

$$a(n) \sim b(n) \quad \text{ha} \quad \frac{a(n)}{b(n)} \rightarrow 1 \quad \text{midőn} \quad n \rightarrow \infty$$

Example (Stirling-formula; prímek száma)

$$n! \sim 2n\pi \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Theorem (Hardy-Ramanujan)

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$$

(szubexponenciális :-)

$n = 100$ -ra $0,9562848\dots$, de $n = 10000$ -re már $0,9955734\dots$

Fölhasznált és ajánlott irodalom I



G. E. Andrews, K. Eriksson

Integer Partitions

Cambridge University Press, 2004.



P. Hajnal

Összeszámlálási alapfeladatok

Polygon Jegyzettár, 1997.



N. J. Vilenkin

Kombinatorika

Műszaki Könyvkiadó, 1987.



és persze internetes források, pl.

<http://www.mathpages.com/home/kmath623/kmath623.htm>

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!