

Határérték és integrál

Kérchy László

Galilei: A természet könyvét a matematika nyelvén írták.

2008 a matematika éve Németországban.

internet cím: <http://www.jahr-der-mathematik.de/>

A matematikai analízis egzakt megalapozása a *határérték* fogalmának pontos definiálásával történt a XIX. sz. első felében.

Előtte olyan nagy matematikusok/természettudósok, mint NEWTON, LEIBNIZ és EULER, végtelen kicsi, *infinitesimalis* mennyiségekkel dolgoztak.

Mély intuíciójuknak köszönhetően a legtöbbször jó eredményt kaptak, a misztikus *végtelen kicsi* mennyiségekkel való számolás azonban sokszor tévútra vezet.

A francia AUGUSTIN LOUIS CAUCHY által bevezetett határértékfogalom tette lehetővé a matematikai analízis szabatos felépítését, a végtelen kicsi mennyiségek használata nélkül.

Határérték:

Azt mondjuk, hogy a valós számokból álló

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, \dots)$ sorozat konvergál az x valós számhoz,

ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \nu \implies |x_n - x| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ vagy $x_n \rightarrow x \ (n \rightarrow \infty)$

Példák:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad (\text{könnyűek})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (\text{nehezek})$$

Érvényes a **Cauchy-féle (belső) konvergencia-kritérium:**
az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens,
ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}, \forall k, l \in \mathbb{N}, k, l \geq \nu \implies |x_k - x_l| < \varepsilon$.

A valós számok $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ teste *teljes metrikus tér*.

Ezzel szemben a racionális számok $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ teste *nem* teljes metrikus tér:

$\exists \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionális számsorozat, amely a $\sqrt{2}$ valós számhoz tart;

$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-sorozat $\mathbb{Q}$ -ban, de nem konvergens $\mathbb{Q}$ -ban.

Folytonosság:

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytonos* az $x \in [a, b]$ pontban,
ha $x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Jó tulajdonságok: korlátosság, szélsőértékek felvétele, egyenletes folytonosság, stb.

Példák:

$f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ mindenütt folytonosak;

$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$ sehol sem folytonos.

Differenciálás:

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az $x \in [a, b]$ pontban, ha

$$\exists d \in \mathbb{R}, x \neq x_n \rightarrow x \implies \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \rightarrow d.$$

$f'(x) := d$ az f deriváltja x -ben,

az f változásának ütemét adja meg.

Pl. Ha f egy mozgó objektum útfüggvénye, akkor $f'(x)$ a pillanatnyi sebességet adja meg az x időpontban.

Riemann integrál: GEORG RIEMANN

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény: $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$n \in \mathbb{N}$

$P_n: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad$ az $[a, b]$ egy beosztása

$|P_n| := \max\{|x_i - x_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ a P_n finomsága

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$S_n := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ integrálközelítő összeg

f Riemann-integrálható, ha

$$\exists I \in \mathbb{R}, \quad |P_n| \rightarrow 0 \implies S_n \rightarrow I$$

$\int_a^b f(x) dx := I$ az f Riemann-integrálja.

Példák:

(a) Ha f egy mozgó objektum sebességfüggvénye, akkor az integrál a megtett út.

(b) Ha $f \geq 0$, akkor az integrál a grafikon alatti terület.

Newton – Leibniz formula:

Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és létezik olyan differenciálható $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Példa:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

A Riemann integrál *rosszul* viselkedik a határátmenettel szemben.

$\mathcal{R}[a, b]$ az $[a, b]$ -on Riemann-integrálható függvények halmaza $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ távolsága:

$$d(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$\mathcal{R}[a, b]$ *nem-teljes metrikus tér*:

$\mathcal{R}[a, b]$ -beli példa nem-konvergens Cauchy-sorozatra a Cantor-féle triadikus eljárással adható.

Lebesgue integrál:

A fenti hiányosságot szünteti meg a HENRI LEBESGUE által a XX. sz. elején kidolgozott hatékonyabb integrálfogalom.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény: $|f(x)| < M \quad \forall x \in [a, b]$

$n \in \mathbb{N}$

$Q_n: -M = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$

a $[-M, M]$ egy beosztása

$|Q_n| := \max\{|y_i - y_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ a Q_n finomsága

$\forall 1 \leq i \leq n$ esetén: $\eta_i \in [y_{i-1}, y_i)$ tetszőleges, és

$$E_i := \{x \in [a, b] : f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$$

Feltesszük, hogy f mérhető függvény, ami azt jelenti, hogy mindegyik E_i halmaz az $[a, b]$ mérhető részhalmazainak $\mathcal{M}$ rendszeréhez tartozik.

$\mathcal{M}$ a legszűkebb olyan halmazrendszer, amely tartalmazza az $[a, b]$ részintervallumait, és

$$A \in \mathcal{M} \implies [a, b] \setminus A \in \mathcal{M}, \text{ valamint}$$
$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M} \implies A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{M}.$$

A hossz vagy *mérték* fogalma kiterjeszthető $\mathcal{M}$ -re:

$\exists m: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ leképezés, melynél

$m([c, d]) = d - c$ bármely $[c, d] \subset [a, b]$ esetén, és

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}, A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \implies$

$\implies m(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = m(A_1) + m(A_2) + \dots$

(σ -additivitás).

$\sigma_n := \sum_{i=1}^n \eta_i m(E_i)$ integrálközelítő összeg

f Lebesgue-integrálható, ugyanis

$$\exists I \in \mathbb{R}, \quad |Q_n| \rightarrow 0 \implies \sigma_n \rightarrow I.$$

(Ez a véges $[a, b]$ intervallumon értelmezett minden korlátos, mérhető f függvény esetén teljesül.)

$$\int_a^b f \, dm := I \quad \text{az } f \text{ Lebesgue-integrálja}$$

Ez a Riemann-integrál általánosítása.

A Lebesgue-integrál fogalma kiterjeszthető *nem-korlátos* függvényekre is:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény

$n \in \mathbb{N}, \quad f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{ha } |f(x)| > n \end{cases}$$

f Lebesgue-integrálható, ha

$$\sup \left\{ \int_a^b |f_n| \, dm : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty;$$

$\int_a^b f \, dm := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dm$ az f Lebesgue-integrálja

$L^2[a, b]$ azon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekből áll, melyekre

$$\int_a^b |f|^2 dm < \infty.$$

$f, g \in L^2[a, b]$ függvények távolsága:

$$d(f, g) := \left(\int_a^b |f - g|^2 dm \right)^{1/2}$$

Riesz – Fischer Tétel:

$L^2[a, b]$ teljes metrikus tér.

$\mathcal{R}[a, b]$ sűrű $L^2[a, b]$ -ben.

RIESZ FRIGYES az elsők közt ismerte fel a Lebesgue-integrál jelentőségét, a Lebesgue-integrálható függvények tereire vonatkozó alapvető eredményei igazolták az új integrálfogalom alkalmas voltát.

HAAR ALFRÉDDAL együtt ő alapította meg és tette világhírűvé a szegedi matematikai iskolát.

Közös domborművük megtekinthető a Dóm téri árkádok alatt.

Az $L^2[a, b]$ függvénytér *struktúrájára* jellemző,

hogyan van benne:

összeadás: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$,

valós számmal való szorzás: $(cf)(x) := cf(x)$,

belső (vagy skaláris) szorzás: $\langle f, g \rangle := \int_a^b fg \, dm$,

hossz (vagy norma): $\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$,

távolság (vagy metrika):

$$d(f, g) := \|f - g\| = \left(\int_a^b |f - g|^2 \, dm \right)^{1/2}.$$

Hasonló struktúrájú tér $\mathbb{R}^n$, ahol

$$\langle (\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \rangle := \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n,$$

$$d((\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n)) := ((\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2)^{1/2}.$$

Az előbbi terek végtelen dimenziós változata a Hilbert-féle ℓ^2 tér, amely azon valós $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ sorozatokból áll, melyekre

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 < \infty.$$

Tetszőleges $\xi, \eta \in \ell^2$ esetén

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k.$$

A német DAVID HILBERT a XIX. sz. végének és a XX. sz. első felének legnagyobb hatású matematikusa volt.

Az $\mathbb{R}^n$ és ℓ^2 terek is hasonló struktúrájúak, mint $L^2[a, b]$, s a távolság bennük is teljes.

E terek közös tulajdonságait axiómáknak megtéve jutott el NEUMANN JÁNOS az absztrakt *Hilbert tér* fogalmához.

(A valós számtest kicserélhető a sok szempontból előnyösebb *komplex* számtestre.)

A Hilbert terek (valamint az általánosabb Banach terek) és operátoraik elmélete a *funkcionálanalízis*, amely új, hatékony eszközöket adott a matematikai problémák megoldásához.

Az elmélet kidolgozásához nagy lökést adott az atomi rendszerek fizikájának robbanásszerű fejlődése a XX. sz. elején.

Kiderült ugyanis, hogy a Hilbert terek operátorai szolgáltatják annak a matematikai nyelvnek az ábécéjét, amelyen a *kvantummechanika* törvényei megfogalmazhatók.

A kvantummechanika egzakt matematikai alapjainak kidolgozása ugyancsak NEUMANN JÁNOS nevéhez fűződik, akit sokan a XX. sz. legragyogóbb matematikai elméjének tekintenek, s aki legmélyebb eredményeit a Hilbert terek operátoraival kapcsolatban érte el.

Azóta az elmélet más fontos alkalmazásokra is talált, pl. az elektronikus hálózatok, vagy az irányításelmélet területén.

A funkcionálanalízis alapvető tételei segítségével a Cauchy-féle határérték-fogalom is általánosítható.

Jelölje ℓ^∞ a *korlátos valós számsorozatok* halmazát, azaz $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$, ha

$$\|\xi\|_\infty := \sup\{|\xi_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

A lengyel STEFAN BANACH megmutatta, hogy létezik olyan $L: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál(=számértékű leképezés), melyre:

$$L(\xi + \eta) = L(\xi) + L(\eta) \quad \forall \xi, \eta \in \ell^\infty,$$

$$L(c\xi) = cL(\xi) \quad \forall \xi \in \ell^\infty, \forall c \in \mathbb{R},$$

$$|L(\xi)| \leq \|\xi\|_\infty \quad \forall \xi \in \ell^\infty,$$

$$L(H\xi) = L(\xi), \text{ ahol } H\xi := (\xi_2, \xi_3, \dots),$$

$$L(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \text{ ha a } \xi \text{ sorozat konvergens.}$$

Végtelen sok ilyen *általánosított Banach limesz* létezik.

Példák:

(a) $\xi = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ esetén

$$H\xi = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots),$$

$$\xi + H\xi = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots),$$

$$1 = L((1, 1, 1, \dots)) = L(\xi) + L(H\xi) = 2L(\xi),$$

$$L(\xi) = \frac{1}{2}.$$

(b) $\eta_n := \begin{cases} 1 & \text{ha } 2^k \leq n < 2^{k+1} \text{ és } k \text{ páros} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

Megmutatható, hogy

$$\forall c \in [0, 1], \exists L \text{ Banach-limesz, } L(\eta) = c.$$

A határértékhez hasonlóan az *integrál* fogalma is kiterjeszthető az $[a, b]$ intervallumon értelmezett minden korlátos függvényre, s a *mérték* fogalma is kiterjeszthető az $[a, b]$ intervallum összes részhalmazán értelmezett

$$\mu: \mathcal{P}[a, b] \rightarrow [0, \infty)$$

“mértékké”.

Ez utóbbi azonban csak *végesen additív*, de nem σ -additív, azaz

$$E_1, E_2 \in \mathcal{P}[a, b], E_1 \cap E_2 = \emptyset \implies$$

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2),$$

$$\text{de } E_1, E_2, \dots \in \mathcal{P}[a, b], E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j) \not\implies$$

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots$$

Irodalom:

KÉRCHY LÁSZLÓ: Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.

KÉRCHY LÁSZLÓ: Hilbert terek operátorai, Polygon, Szeged, 2003.