

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Egy számtani sorozat első n tagjának összege kettőhatvány. Igaz-e, hogy ekkor n is kettőhatvány? (A választ indokolni kell.)
2. Egy egyenes körhenger alakú, h magasságú zárt tartály a palástjára fektetve vízszintes helyzetben fekszik a földön. Ebben a helyzetben az alapkör átmérőjének (mint magasságnak) negyed részéig áll a víz. Milyen magasan fog állni a víz a tartályban, ha azt talpra, azaz alapkörére állítjuk?
3. Minden pozitív egész n esetén tekintsük az $n+1; n+2; \dots; 2n$ számok (n darab szám) mindegyikének legnagyobb páratlan pozitív osztóját, majd ezeket az osztókat adjuk össze. Bizonyítsuk be, hogy az összeg bármely pozitív egész n esetén n^2 lesz.
4. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a D , E , F pontokban érinti. Igaz-e, hogy ha $AD = BE = CF$, akkor az ABC háromszög szabályos? (A választ indokolni kell.)
5. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény, ahol a, b, c egész számok, és $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ha az f x_1 és x_2 egész helyeken felvett értékeire teljesül, hogy a grafikon $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontjainak távolsága egész szám, akkor $f(x_1) = f(x_2)$.
6. Az 1-nél nagyobb a valós számra teljesül, hogy a $10 < a^x < 100$ egyenlőtlenségnek pontosan 5 darab egész megoldása van. Adjuk meg az összes megfelelő a esetén, hogy a $100 < a^x < 1000$ egyenlőtlenségnek hány egész megoldása van?