

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

12. évfolyam

I. forduló

1. Igazoljuk, hogy ha $a + b = c + d$ és $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$, akkor $a^{2026} + b^{2026} = c^{2026} + d^{2026}$.

2. Az ABC háromszög tetszőleges belső P pontjának a BD oldalegyenestől vett távolságát jelölje x , a CA oldalegyenestől vett távolságát jelölje y , az AB oldalegyenestől vett távolságát jelölje z . Legyen a háromszög A csúcsából induló magasság hossza m_a , a B csúcsból induló magasság hossza m_b , a C csúcsból induló magasság hossza pedig m_c . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x}{m_a} + \frac{y}{m_b} + \frac{z}{m_c} = 1.$$

3. Felírható-e a 2026 tizenkét darab páratlan négyzetszám (pozitív egész szám négyzete) összegeként? (A választ indokolni kell.)

4. Bergengócia egyik fennsíkján váratlanul kitört egy vulkán. A szakemberek egy nap késéssel érkeztek a helyszínre, a vulkán ezalatt 10 méter magas törmelékkúpot rakott. A 2. napon a vulkán kétszer akkora, a 3. napon háromszor akkora, ... a k -edik napon k -szor akkora anyagmennyiséget dobott ki, mint az első napon. Ezután a vulkán tevékenysége hasonló módon gyengülni kezdett (azaz pl. a $k+1$ -edik napon $k-1$ -szer akkora anyagmennyiséget dobott ki, mint az első napon), végül „kialudt”. Ekkor a törmelékkúp magassága 40 méter volt. (A törmelékkúp a vulkán működése alatt végig állandó nyílásszögű egyenes kúp volt.) Hány napig működött a vulkán, ha tudjuk, hogy a működés időtartama napokban mérve egész szám volt?

5. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsba futó élei páronként merőlegesek egymásra. A D csúcsban érintkező lapok területeinek páronként vett összegei: 150, 168, 126. Mekkora az ABC háromszög legnagyobb szöge?

6. Hány olyan, pozitív egész számokból álló $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$ rendezett számhatos van, amelyre teljesül, hogy $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 5x_6 = 21$?