

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

10. évfolyam

I. forduló

1. Egy falu könyvtárában egy adott napon megfordult személyekről az alábbiakat tudjuk:
- a) A könyvtárban legalább hatan megfordultak.
 - b) Minden olvasó aznap csak egyszer volt a könyvtárban.
 - c) Egyidőben kettőnél többen nem voltak a könyvtárban.
 - d) Bármely hat látogató között található két olyan személy, akik a könyvtárban találkoztak egymással.

Bizonyítsuk be, hogy az adott napon egyetlen olvasó sem találkozhatott a könyvtárban ötnél több személlyel.

2. Igazolja, hogy ha az a, b, c valós számok közül legalább kettő különbözik, akkor az

$$(x-a) \cdot (x-b) + (x-b) \cdot (x-c) + (x-c) \cdot (x-a) = 0$$

egyenletnek két különböző valós megoldása van.

3. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge ötször akkora, mint a másik hegyesszög, átfogójához tartozó magasságának hossza pedig 3 cm. Határozzuk meg a háromszög területét.

4. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2$ függvények grafikonjainak halmazát, ahol m tetszőleges valós szám. Határozzuk meg az egyes függvények grafikonjaként előálló parabolák tengelypontjainak halmazát.

5. Az $ABCD$ téglalap D csúcsán átmenő és az AC átlóra merőleges egyenes az AB szakaszt az E pontban metszi. Az AE szakasz hossza 9 cm, a téglalap területe 192 cm^2 . Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.

6. A p paraméter mely valós értéke esetén vesz fel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 + 2px + 6$ függvény minden valós x -re legalább 1-gyel nagyobb értéket, mint a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = px^2 + 4x - 2p$ függvény?