

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán az alábbi egyenletet.

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{x + y} \right| = 1$$

2. Az ABC szabályos háromszög belsejében vegyünk fel egy tetszőleges P pontot, majd bocsássunk P -ből merőlegest az oldalakra. Legyenek ezek talppontjai az AB oldalon D , a BC oldalon E , az AC oldalon F . Határozzuk meg a

$$\frac{PD + PE + PF}{AF + CE + BD}$$

hányados értékét.

3. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ számokat. Egy lépésben letörlünk két számot és helyettük a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) írjuk fel a táblára. Tíz ilyen lépés után egyetlen szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?

4. Adott az ABC háromszög két oldalának hossza, $BC = a$ és $CA = b$. Mekkora az $AB = c$ oldalhossz, ha tudjuk, hogy a háromszög beírt és az AB oldalhoz hozzáírt körének az AB oldalon levő érintési pontjai harmadolják az AB oldalt?

5. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ahol a, b, c pozitív valós számok.

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

6. Egy szabályos n -szög alapú egyenes hasáb csúcsait három színnel szeretnénk színezni úgy, hogy mindegyik csúcson a belőle kifutó három él másik végpontjai páronként különböző színűek legyenek. Mutassuk meg, hogy ez akkor és csak akkor valósítható meg, ha n osztható 3-mal.