Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVIII. esztendő

2019-2020. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Az a valós gyöke az $x^2 - x - 3 = 0$ egyenletnek. Számítsuk ki az $\dfrac{a^3+1}{a^5-a^4-a^3+a^2}$ kifejezés értékét.

2. Egy háromszög belső szögei α, β, γ, beírt körének sugara r, köré írt körének sugara R. Igazoljuk, hogy $2 \cdot R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma = r \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

3. x, y, z és t olyan páronként különböző pozitív egészek, amelyekre $x^2 - y^2 = z^2 - t^2 = 81$. Határozzuk meg az $xz + yt + xt + yz$ kifejezés értékét.

4. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(0;\, a)$ pont, ahol a 1-nél nagyobb valós paraméter. A $P(x;\, y)$ pont az $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 1\right|$ függvény grafikonján mozog. Adjuk meg az AP távolság minimumát a függvényében.

5. Az ABC háromszög beírt körének középpontja O, sugara r. Bizonyítsuk be, hogy bármely, az O pontra illeszkedő egyenes az ABC háromszögből olyan háromszöget vág le, amelynek t területére nézve teljesül a $t \geq 2r^2$ egyenlőtlenség. Mikor teljesül egyenlőség?

6. Egy összejövetelre a házigazda e-mailben meghívott néhány vendéget azzal, hogy hívjanak meg ők is vendégeket, és írják meg az általuk meghívott vendégeknek, hogy nekik is jogukban áll újabb vendégeket meghívni. Az összejövetelen minden meghívott vendég megjelent és természetesen a házigazda is. Az ismerkedésnek a következő formáját választották: névsorban szólították egyenként a jelenlévőket, a szólított átadott egy-egy névjegyet a meghívóinak, továbbá felkérte azokat, akiket ő hívott meg, és azokat is, akik neki már adtak névjegyet, hogy adjanak azoknak is, akiknek ő már adott névjegyet. Mutassuk meg, hogy végül a házigazda mindenkitől kapott névjegyet.