Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVIII. esztendő

2019-2020. tanév

10. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet. (*a* és *b* valós paraméterek.)

$$x^2-2\left(a^2+b^2\right)x+\left(a^2-b^2\right)^2=0$$

2. Az *ABCD* négyzet átlóinak metszéspontja *M*. A *CAB* szög szögfelezője a *BD* átlót *E*-ben, a *BC* oldalt *F*-ben metszi. Igazoljuk, hogy $2\cdot ME=CF$.

3. Oldjuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán a következő egyenlőtlenséget.

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$$

4. *a*) Megadható-e hat darab páronként különböző páratlan pozitív egész szám úgy, hogy reciprokaik összege 1 legyen?
b) Megadható-e kilenc darab páronként különböző páratlan pozitív egész szám úgy, hogy reciprokaik összege 1 legyen?

5. Az *ABC* háromszögben *A'* a *BC*, *B'* a *CA*, *C'* pedig az *AB* oldal pontja úgy, hogy az *AA'*, *BB'*, *CC'* egyenesek az *M* pontban metszik egymást. Tudjuk, hogy $\frac{AM}{MA'}+\frac{BM}{MB'}+\frac{CM}{MC'}=20$.
Határozzuk meg $\frac{AM}{MA'}\cdot\frac{BM}{MB'}\cdot\frac{CM}{MC'}$ értékét.

6. Egy konvex *n*-szög csúcsai közül kiválasztjuk azt a hármat, amelyeket összekötő szakaszok a legkisebb területű háromszöget fogják közre. Mutassuk meg, hogy a kapott háromszög két oldala a konvex *n*-szögnek is oldala.