Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVIII. esztendő

2019-2020. tanév

10. évfolyam

I. forduló

1. Az $x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$ egyenletben az m valós paraméterre teljesülnek a következők: (1) $m \ge -1$; (2) az egyenletnek két különböző valós gyöke van. Jelölje a gyököket a szokásos módon x_1 és x_2. Határozzuk meg az $\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$ kifejezés maximumát.

2. Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van. D a BC, E a CA oldal tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy $AD^2+BE^2=AB^2+DE^2$.

3. Igazoljuk a következő állításokat.
(1) Négy egymást követő egész szám szorzatához 1-et adva négyzetszámot kapunk.
(2) Öt egymást követő négyzetszám összege nem lehet négyzetszám.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszöghöz van olyan egyenes, amelyre tükrözve a háromszöget, az eredeti és a képháromszög metszetének területe nagyobb, mint a háromszög területének 2/3-a.

5. x és y olyan valós számok, amelyekre $2x+y\ge 1$. Határozzuk meg az x^2+4x+y^2-2y kifejezés minimális értékét.

6. Egy tízes számrendszerben felírt $\overline{a_1a_2...a_n}$ n-jegyű pozitív egész számot *hullámos szám*nak nevezünk, ha
(1) számjegyei az $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ halmaz elemei;
(2) bármely két szomszédos számjegye különböző;
(3) $n\ge 3$ esetén a_i-a_{i+1} és $a_{i+1}-a_{i+2}$ ellenkező előjelű ($i\in\{1;\ 2;\ ...;\ n-2\}$).
Határozzuk meg a hétjegyű *hullámos szám*ok számát.