Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVII. esztendő

2018-2019. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget, ha p 1-től különböző pozitív valós számot jelöl.

$$\frac{p^x}{p^x-1} > \frac{1+p^{-x}}{1-2p^{-x}}$$

2. Egységnyi oldalú négyzet két szomszédos oldalára befelé szabályos háromszögeket rajzolunk. Mekkora a két háromszög közös részének területe?

3. Melyek azok az a valós számok, amelyekre az alábbi három állítás közül kettő igaz, egy pedig hamis?

(1) a egész szám.

(2) a^2-3a negatív egész szám.

(3) $a+\frac{1}{a}$ pozitív egész szám.

4. Az $ABCD$ téglalapban M az ACD háromszögbe írt kör középpontja. M-en át az AD oldallal és az AB oldallal párhuzamost húzunk, ezek rendre az AB oldalt E-ben, a BC oldalt F-ben metszik. Az $EBFM$ téglalap területe hogyan aránylik az $ABCD$ téglalap területéhez?

5. Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen definiáljuk: $a_n = n^2+n+1$ bármely pozitív egész n esetén. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amely megegyezik másik két tag szorzatával.

6. Egy 15x15-ös táblázatba beírjuk a pozitív egész számokat 1-től 225-ig úgy, hogy az első sorba balról jobbra rendre 1-től 15-ig, a második sorba ugyanígy 16-tól 30-ig, és így tovább; végül az utolsó sorba 211-től 225-ig. Mutassuk meg, hogy bárhogyan is választunk ki a táblázatból egy 11x11-es összefüggő résztáblázatot, az ebben található számok összege mindig osztható 121-gyel.