Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVII. esztendő

2018-2019. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

2. Az a és b valós számokról tudjuk, hogy $a+b>0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

3. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek nem állíthatók elő $ab+a+b$ alakban, ahol a és b pozitív egészek?

4. A p paraméter mely valós értékei esetén esik az $x^2+px+9=0$ egyenlet egyik gyöke az $[1;\ 2]$, másik gyöke a $[4;\ 5]$ intervallumba?

5. Adott az $ABCD$ téglalap. Az A-ból, B-ből, C-ből, illetve D-ből induló AB, BC, CD, illetve DA félegyenesen rendre kijelöljük az A_1, B_1, C_1, D_1 pontot úgy, hogy

$$\frac{AA_1}{AB}=\frac{BB_1}{BC}=\frac{CC_1}{CD}=\frac{DD_1}{DA}=k>0$$

teljesüljön. A k szám milyen értékére lesz az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög területe minimális?

6. Két egymást metsző körvonal a síkot négy tartományra bontja, ezek közül három korlátos. Van-e olyan körvonal, amelyik egyszerre mindhárom korlátos tartományt két egyenlő területű részre bontja?