Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVI. esztendő

2017-2018. tanév

12. évfolyam

II. forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

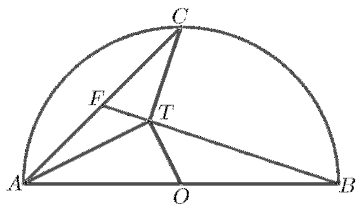
2. Számítsuk ki annak az $ABCD$ négyszögnek a területét, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) A csúcsa az $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 12$ egyenletű kör középpontja;

(2) B és D csúcsa az (1)-beli kör és az $x - 2y + 6 = 0$ egyenletű egyenes metszéspontjai;

(3) C csúcsa az (1)-beli kört a B és a D pontban érintő egyenesek metszéspontja.

3. Az ábrán látható AB átmérőjű félkörív felezőpontja C, a félkör középpontja O. F az AC szakasz felezőpontja, T pedig az FB egyenesre C-ből állított merőleges talppontja. Bizonyítsuk be, hogy $CT^2 = AT \cdot OT$.



4. Milyen értékeket vehet fel az a valós szám, ha tudjuk, hogy a

$$\sqrt{2} \cdot (2a+3) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{6}{\sin x + \cos x} - 2 \cdot \sin 2x < 3a + 6$$

egyenlőtlenség bármely $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ esetén érvényes?

5. Hány olyan páronként nem hasonló szabályos sokszög van, amelyben egy belső szög nagysága fokokban mérve egész szám?

6. Egy szabályos dobókockának véletlenszerűen kiválasztjuk az egyik lapját, és arról a lapról „eltüntetünk” egy pontot. Ezután feldobjuk a kockát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy páratlan számot dobunk, azaz a dobás után a kocka felső lapján páratlan számú pont van?