Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LVI. esztendő

2017-2018. tanév

10. évfolyam

II. forduló

1. A 0-tól különböző *a*, *b*, *c* valós számokra $a+b+c=0$. Határozzuk meg az

$$x^{2018}-2018x+2018$$

kifejezés értékét, ha $x=\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{c+a}-\frac{|c|}{a+b}$.

2. Az ABC háromszögben D a BC oldal felezőpontja, E pedig az AD szakasz azon pontja, amelyre $AE=\frac{AD}{3}$. A CE egyenes az AB szakaszt F-ben metszi. Milyen hosszú az AB szakasz, ha $AF=a$?

3. Adjuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (x; y; z) rendezett számhármasokat, amelyekre $xy+yz=63$ és $xz+yz=23$.

4. Oldjuk meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán az

$$x+\frac{56}{x}=[x]+\frac{56}{[x]}$$

egyenletet, ahol $[x]$ az x-nél nem nagyobb legnagyobb egész számot jelöli.

5. Az $ABCD$ derékszögű trapéz alapjai AB és CD, valamint A és D a derékszögű csúcsok. A D pontból a BC egyenesre állított merőleges talppontja E. Bizonyítsuk be, hogy ha a trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AC\cdot CD}{AC^2-CD^2}.$$

6. Az *a*, *b*, *c* pozitív valós számokra $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1-a^2+c^2}{c\cdot(a+2b)}+\frac{1-b^2+a^2}{a\cdot(b+2c)}+\frac{1-c^2+b^2}{b\cdot(c+2a)}\geq 6.$$