**Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő**

**2016-2017. tanév**

**12. évfolyam**

**I. forduló**

**1.** Oldjuk meg a rendezett pozitív egész ($x$; $y$) számpárok halmazán a következő egyenletet.

$$\frac{1}{x-2017}+\frac{1}{y-2017}=\frac{2017}{(x-2017)(y-2017)}-1$$

**2.** Létezik-e olyan háromszög, amelynek $a$, $b$, $c$ oldalhosszaira

$$25a^2+b^2+c^2=2a\cdot(3b+4c)?$$

**3.** Egy kör illeszkedik az $ABC$ háromszög $B$ és $C$ csúcsaira, az $AB$ oldalt $D$-ben, az $AC$ oldalt $E$-ben metszi. A háromszög $BC$ oldalának felezőpontja $F$, $AF$ és $DE$ metszéspontja pedig $G$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{GD}{GE}=\frac{AC^2}{AB^2}.$$

**4.** Határozzuk meg a $p$ valós paraméter értékét úgy, hogy az origóból az

$$x^2+y^2-8x-8y+p=0$$

egyenletű körhöz húzott érintők 60º-os szöget zárjanak be egymással.

**5.** Mutassuk meg, hogy ha egy pozitív egész tagokból álló, nem konstans $\{a_n\}$ számtani sorozatban van köbszám (egy pozitív egész szám harmadik hatványa), akkor van olyan köbszám is, amelyik nem négyzetszám (egy pozitív egész szám második hatványa).

**6.** A koordináta-rendszerben egy nyolcszög *ideális*, ha
(1) mindegyik csúcsának mindkét koordinátája egész szám;
(2) belső szögei egyenlő nagyságúak;
(3) területe egész szám.
Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész $K$ számot, amelyre teljesül, hogy bármely $k \geq K$ egész szám esetén van olyan *ideális* nyolcszög, amelynek a területe $k$.