Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

11. évfolyam

I. forduló

1. A p valós paraméter mely értékeire van a

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=p$$

egyenletnek valós megoldása?

2. Az ABC háromszög belső szögeire (a szokásos jelölést használva) $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$. A háromszög köré írható kör középpontja O, a C csúcsból induló belső szögfelező az AB oldalt D-ben metszi. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha tudjuk, hogy az $ODAC$ négyszög húrnégyszög.

3. Határozzuk meg azokat az (x; y) rendezett egész számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet.

$$x^2-xy+y^2=2\cdot(x+y)$$

4. Adott n pozitív egész számhoz $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\frac{x^2+n}{x^2+x+1}$. Legyen a_n az f_n függvény abszolút maximuma, b_n pedig f_n abszolút minimuma. Fejezzük ki n függvényeként az a_n-b_n különbséget.

5. Egy dobozban 2017 darab fekete és 2017 darab fehér, méretre és tapintásra egyforma golyó van. Egy alkalommal véletlenszerűen kiveszünk 2 golyót. Ha ezek azonos színűek, akkor nem tesszük vissza őket a dobozba. Ha különböző színűek, akkor a fehéret visszatesszük, de a feketét nem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt az eljárást folytatva a végén 1 darab fehér golyó marad a dobozban?

6. Jelölje H az első 106 darab pozitív egész szám halmazát. Az A halmaz a H-nak olyan 16 elemű részhalmaza, amelyre teljesül, hogy bármely két elemének különbsége (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) eltér a 6, 9, 12, 15, 18 és 21 számok mindegyikétől. Bizonyítsuk be, hogy van A-nak két olyan eleme, amelyek különbsége 3.