Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LV. esztendő

2016-2017. tanév

10. évfolyam

II. forduló

1. Az a, b, c valós számokra $a=b+c+1$. Mutassuk meg, hogy az $x^2+x+b=0$ és $x^2+ax+c=0$ másodfokú egyenletek közül legalább az egyiknek van két különböző valós gyöke.

2. Vegyük fel egy $ABCD$ konvex négyszöget. Szerkesszünk a négyszög BC oldalán olyan P pontot, amelyre teljesül, hogy az AP egyenes felezi a négyszög területét. („Szerkesszünk" jelentése: adjuk meg és indokoljuk a szerkesztés lépéseit.)

3. Melyek azok a p és q pozitív egész számok, amelyekre az $x^2-pqx+p+q=0$ egyenletnek van egész gyöke?

4. Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő belső szög kétszer akkora, mint a B csúcsnál levő belső szög. Bizonyítsuk be, hogy $AC^2+AB\cdot AC=BC^2$.

5. Hány olyan háromelemű részhalmaza van az $\{1;2;3;...;22;23\}$ halmaznak, amelyben az elemek összege nem nagyobb 36-nál?

6. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c valós számokra $0<c\le b\le a$, akkor

$$2a+3b+5c-\frac{8}{3}\cdot\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\le\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+4\cdot\frac{c^2}{a}\right).$$