Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIV. esztendő

2015-2016. tanév

11. évfolyam

II. forduló

1. A valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett f függvényre teljesülnek a következők:

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ az értelmezési tartomány bármely x elemére;

(2) $f(20)=20$ és $f(16)=16$;

(3) $f(f(x))=x$ az értelmezési tartomány bármely x elemére.

Határozzuk meg f értékkészletét.

2. Az $ABCD$ konvex négyszögben az átlók metszéspontja M. A BD átlóval párhuzamos e egyenest az AB, DC, AC, BC, AD egyenesek rendre a P, Q, R, S, T pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $RP\cdot RQ=RS\cdot RT$.

3. Az x és y valós számok kielégítik az $|y|\le 1$ és $2x+y=1$ feltételeket. Határozzuk meg a $2x^2+16x+3y^2$ kifejezés minimumát.

4. Az ABC hegyesszögű háromszög oldalhosszai és szögei a szokásos jelöléseket alkalmazva a, b, c illetve α, β, γ. Tudjuk, hogy $\sin\alpha=2a\cdot\sin\beta$ és a háromszög köré írt kör sugara $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Milyen határok között változhat a háromszög kerülete?

5. Az 1; 2; ...; n számok egy $a_1;a_2;...;a_n$ permutációja *kvadratikus permutáció*, ha az

$$a_1;a_1+a_2;a_1+a_2+a_3;...;a_1+a_2+...+a_n$$

számok közül legalább az egyik négyzetszám. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy az 1; 2; ...; n számok mindegyik permutációja kvadratikus.

6. Egy környezetvédelmi konferencia 100 résztvevője 50 országból érkezett, minden ország 2 főt delegált. A plenáris tárgyaláson az összes résztvevő egy kör alakú asztal körül foglalt helyet. Mutassuk meg, hogy akármilyen sorrendben ültek a kör alakú asztalnál, be lehetett őket sorolni két csoportba úgy, hogy sem két azonos országbeli küldött, sem három, az asztalnál egymás mellett ülő résztvevő nem került azonos csoportba.