

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

9. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Bizonyítsuk be, hogy négy egymást követő természetes szám szorzatához 1-et adva négyzetszámot kapunk.

Megoldás

Jelölje a négy egymást követő természetes számot: $n; n + 1; n + 2; n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$), amelyek 1-gyel növelt szorzata:

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + n)(n^2 + 5n + 6) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$
Erről kellene belátni, hogy egy kifejezés négyzete. Mivel ez egy 1 főegyütthatójú egész együtthatós negyedfokú kifejezés, így egy 1 főegyütthatójú egész együtthatós másodfokú kifejezés négyzete lehet, azaz

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + an + b)^2 \text{ ahol } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Mivel a konstans tag 1, ezért $b = 1$, azaz $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + an + 1)^2$

$$(n^2 + an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)n^2 + 2an + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

ahonnan adódik, hogy $a = 3$, vagyis

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

így négy egymást követő természetes szám szorzatához 1-et adva valóban négyzetszámot kapunk.

2. Hány természetes számokból álló $(x; y)$ rendezett számpár elégíti ki az alábbi egyenletet?

$$x + y + xy = 2025$$

Megoldás

Adjunk mindkét oldalhoz 1-et, majd a jobboldalt alakítsuk szorzattá!

$$x + y + xy + 1 = 2026$$

$$(x + 1)(y + 1) = 2026$$

Mivel x és y természetes számokat jelöl, így a 2026-ot két természetes szám szorzataként állítjuk elő, amit a következő módokon tehetünk meg:

$1 \cdot 2026; 2 \cdot 1013; 1013 \cdot 2; 2026 \cdot 1$, vagyis négy $(x; y)$ természetes számokból álló rendezett számpár elégíti ki az egyenletet: $(0; 2025), (1; 1012), (1012; 1), (2025; 0)$.

3. Határozzuk meg a 0-tól különböző a valós paraméter értékét úgy, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 - 2x + a + 1$ függvény

a) legnagyobb;

b) legkisebb

értéke 1 legyen. Határozzuk meg, hogy a függvény ezekben az esetekben, hol veszi föl szélsőértékét.

Megoldás

$$f(x) = ax^2 - 2x + a + 1 = a \left[x^2 - \frac{2}{a}x + 1 + \frac{1}{a} \right] = a \left[\left(x - \frac{1}{a} \right)^2 - \frac{1}{a^2} + 1 + \frac{1}{a} \right] =$$

$$= a \left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + \frac{a^2 + a - 1}{a}$$

- a) A függvénynek akkor van legnagyobb értéke, ha $a < 0$. Ha a függvény legnagyobb értéke 1, akkor $\frac{a^2+a-1}{a} = 1$, ahonnan $a^2 - 1 = 0$, vagyis $a = \pm 1$, ami a feltétel miatt $a = -1$ esetén következik be. Ezt az értéket a függvény $x = \frac{1}{a}$ helyen, azaz $x = -1$ -ben veszi föl.
- b) A függvénynek akkor van legkisebb értéke, ha $a > 0$. Ha a függvény legkisebb értéke 1, akkor $\frac{a^2+a-1}{a} = 1$, ahonnan $a^2 - 1 = 0$, vagyis $a = \pm 1$, ami a feltétel miatt $a = 1$ esetén következik be. Ezt az értéket a függvény $x = \frac{1}{a}$ helyen, azaz $x = 1$ -ben veszi föl.

4. a) Hány olyan egymást követő természetes számokból álló számhármass van, ahol a számhármass első és harmadik tagja prímszám, a középső tag pedig prímszám?

b) Hány olyan prímszám van, ami ikerprímek közé esik? (Ikerprímnek nevezünk két prímszámot, ha különbségük 2. Ilyen ikerprímek például a 17 és a 19.)

Megoldás

a) Ha a középső szám páros, akkor nem lehet a nála kisebb szám prímszám, így a középső szám biztosan páratlan. A két szélső szám így kettőshatvány, amik különbsége 2 csak a (2;4) párnál lesz, ami megoldás.

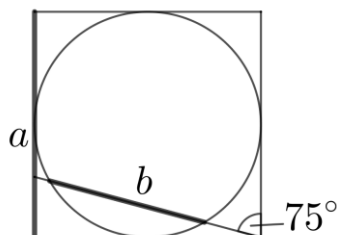
Így a feladatnak csak egy számhármass megoldása, a (2;3;4)

b) Mivel az ikerprímek páratlanok, így a közéjük eső szám biztos páros. Legyen a keresett prímszám 2^k alakú.

Három szomszédos szám közül egy biztosan osztható 3-mal. Ha ez az egyik prím, akkor a (3;4;5) számhármass megoldást jelent. Más esetben 2^k osztható 3-mal, ami nem lehet, hiszen csak egy prímosztója van, a 2.

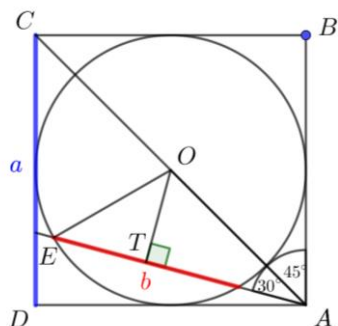
Így a feladatnak megfelelő számhármass csak 1 van, a (3;4;5).

5. Léteznek-e olyan a és b egész számok, amelyekre az ábrán jelölt megfelelő szakaszok a és b hosszúságúak?



Megoldás

Húzzuk be az AC átlót.



Ekkor a EAB szög 45° -os és 30° -os részekre oszlik. O -ból b -re merőlegest állítva megkapjuk az AOT félszabályos háromszöget, ahol T a b szakasz felezőpontja. Mivel OA az átló fele, így

$$OA = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ és } OT = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Mivel OE a kör sugara, így $OE = \frac{a}{2}$. Az ETO derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \frac{a^2}{4} &= \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{4} \\ a^2 &= 2b^2 \\ \frac{a^2}{b^2} &= 2 \end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy az a szakasz hossza éppen $\sqrt{2}$ -szerese b -nek, így nem léteznek olyan a és b egész számok, amelyek teljesítik a feladat feltételeit.

6. Egy táblára felírtuk 1-gyel kezdve az egymás utáni pozitív egész számokat egy bizonyos számig. Majd a felírt számok közül egyet letöröltünk. A megmaradt számok számtani közepe (átlaga) $\frac{602}{17}$ -del egyenlő. Melyik számot töröltük le?

1. megoldás

Jelöljük a fölírt legnagyobb pozitív egész számot n -nel, a letörölt számot pedig x -szel! A feladat feltételeiből:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \dots + n - x}{n - 1} &= \frac{602}{17} \\ \frac{\frac{n(n+1)}{2} - x}{n - 1} &= \frac{602}{17} \\ \frac{n^2 + n - 2x}{n - 1} &= \frac{1204}{17} \\ \frac{n(n-1) + 2n - 2x}{n - 1} &= \frac{70 \cdot 17 + 14}{17} \\ n + 2 \cdot \frac{n - x}{n - 1} &= 70 + \frac{14}{17} \end{aligned}$$

$x \neq 1$, mivel ellenkező esetben $\frac{n-x}{n-1}$ és így a bal oldal értéke egész szám lenne, míg a jobb oldal nem. Ezért $x \geq 2$, és emiatt $\frac{n-x}{n-1} < 1$, így $2 \cdot \frac{n-x}{n-1} < 2$, vagyis n csak 70 vagy 69 lehet.

Ha $n = 70$, akkor $70 + 2 \cdot \frac{70-x}{70-1} = 70 + \frac{14}{17}$, ahonnan $x = \frac{707}{17}$, ami viszont nem egész.

Ha $n = 69$, akkor $69 + 2 \cdot \frac{69-x}{69-1} = 70 + \frac{14}{17}$, ahonnan $x = 7$, ami viszont egész, és valóban kielégíti a feladat feltételeit.

2. megoldás

Az $1, 2, \dots, n$ természetes számok számtani közepe kisebb, mint az $1, 2, \dots, n, n+1$ természetes számok számtani közepe, mivel

$$\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} < \frac{(1+n+1)(n+1)}{n+1} = \frac{n+2}{2}$$

vagyis az 1-től kezdődően fölirt természetes számok számtani közepe szigorúan monoton növekszik, és így elegendően sok számot választva az adott számtani közeget pontosan egyszer lépjük át. Mivel az adott számtani közép $\frac{602}{17}$, ezért a törlés után megmaradt számok száma

$(n-1)$ a 17 többszöröse, vagyis a fölirt számok száma (n) ennél 1-gyel nagyobb szám.

Készítsünk táblázatot a 17 többszörösei szerint az összeadott számokról, számtani közepük legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátjáról (amit a legkisebb és a legnagyobb lehetséges szám elhagyásával kapunk).

$n-1$	n	letörölt szám (x)	a megmaradt $n-1$ szám számtani közepe (A_{n-1})
17	18	$1 \leq x \leq 18$	$9 \leq A_{17} \leq 10$
34	25	$1 \leq x \leq 35$	$17,5 \leq A_{34} \leq 18,5$
51	52	$1 \leq x \leq 52$	$26 \leq A_{51} \leq 27$
68	69	$1 \leq x \leq 69$	$34,5 \leq A_{68} \leq 35,5$
85	86	$1 \leq x \leq 86$	$43 \leq A_{85} \leq 44$

Mivel $\frac{602}{17} \approx 35,41$, ezért csak $n = 69$ lehetséges, ahonnan a feladat szövegébe helyettesítve

$$\frac{1+69}{2} - x = \frac{602}{17}, \text{ így } x = 7, \text{ ami valóban eleget tesz a feladta feltételeinek.}$$

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

10. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Mennyi azoknak a háromjegyű pozitív egész számoknak az összege, amelyeknek minden jegye páratlan?

Megoldás

Mivel mindhárom helyiértéken egymástól függetlenül öt-öt féle jegy szerepelhet, így $5^3 = 125$ olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden jegye páratlan.

Mindegyik háromjegyű szám fölírható $100a + 10b + c$ lakban, ahol a, b, c a szám számjegyei. Így a 125 páratlan számjegyekből álló szám összege:

$$\begin{aligned} S &= \overline{a_1 b_1 c_1} + \overline{a_2 b_2 c_2} + \cdots + \overline{a_{125} b_{125} c_{125}} = \\ &= 100 \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_{125}) + 10 \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_{125}) + 1 \cdot (c_1 + c_2 + \cdots + c_{125}) \end{aligned}$$

ahol a_i, b_i, c_i az i -edik szám jegyei.

Az a_i, b_i, c_i számjegyek között mind az öt páratlan számjegy ugyanannyiszor, 25-ször fordul elő, így

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{125} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{125} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{125} = 25 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 625.$$

Így a számok összege: $S = 100 \cdot 625 + 10 \cdot 625 + 1 \cdot 625 = 69375$.

2. a, b, c, d ebben a sorrendben egymást követő természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy $a + b^2 + c^3$ osztható d^2 -tel.

1. megoldás

Mivel a, b, c, d egymást növekvő sorrendben követő szomszédos természetes számok, ezért $c = d - 1, b = d - 2, a = d - 3$.

Azt kell belátni, hogy $(d - 3) + (d - 2)^2 + (d - 1)^3$ osztható d^2 -tel.

$$\begin{aligned} (d - 3) + (d - 2)^2 + (d - 1)^3 &= d - 3 + d^2 - 4d + 4 + d^3 - 3d^2 + 3d - 1 = \\ &= d^3 - 2d^2 = d^2(d - 2) \end{aligned}$$

ami nyilván osztható d^2 -tel.

2. megoldás

Mivel a, b, c, d egymást növekvő sorrendben követő szomszédos természetes számok, ezért $b = a + 1, c = a + 2, d = a + 3$.

Azt kell belátni, hogy $a + (a + 1)^2 + (a + 2)^3$ osztható $(a + 3)^2$ -tel.

$$\begin{aligned} a + (a + 1)^2 + (a + 2)^3 &= a + a^2 + 2a + 1 + a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = \\ &= a^3 + 7a^2 + 15a + 9 = \end{aligned}$$

$= (a^2 + 6a + 9)(a + 1) = (a + 3)^2(a + 1)$,
ami nyilván osztható $(a + 3)^2$ -tel.

3. A p valós paraméter mely értékei mellett van megoldása az alábbi egyenletnek a valós számok halmazán?

$$\sqrt{x + 4p + 16} = 2\sqrt{x + 2p + 4} - \sqrt{x}$$

Oldjuk meg az egyenletet.

Megoldás

A négyzetgyökök miatt $x \geq 0, x \geq -2p - 4, x \geq -4p - 16$.

Ekvivalens átalakítással kapjuk, hogy

$$\sqrt{x + 4p + 16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x + 2p + 4}$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve

$$x + 4p + 16 + 2 \cdot \sqrt{x + 4p + 16} \cdot \sqrt{x} + x = 4(x + 2p + 4)$$

Rendezve: $2\sqrt{x^2 + 4px + 16x} = 2x + 4p$, azaz

$$\sqrt{x^2 + 4px + 16x} = x + 2p$$

Mivel a négyzetgyökös kifejezés értéke nem lehet negatív, ezért $x + 2p \geq 0$, azaz $x \geq -2p$.

Ismét mindkét oldalt négyzetre emelve: $x^2 + 4px + 16x = x^2 + 4px + 4p^2$, ahonnan $x = \frac{p^2}{4}$.

A kikötésekbe helyettesítve:

$$\frac{p^2}{4} \geq 0 \text{ ahonnan } p \in \mathbb{R},$$

$$\frac{p^2}{4} \geq -2p - 4, \text{ vagyis } p^2 + 8p + 16 \geq 0, \text{ azaz } (p + 4)^2 \geq 0, \text{ ahonnan } p \in \mathbb{R},$$

$$\frac{p^2}{4} \geq -4p - 16, \text{ vagyis } p^2 + 16p + 64 \geq 0, \text{ azaz } (p + 8)^2 \geq 0, \text{ ahonnan } p \in \mathbb{R},$$

$$\frac{p^2}{4} \geq -2p, \text{ vagyis } p^2 + 8p \geq 0, \text{ ahonnan } p \leq -8 \text{ vagy } p \geq 0.$$

Így egyenletünknek $p \leq -8$ vagy $p \geq 0$ esetén van megoldása, mégpedig $x = \frac{p^2}{4}$.

4. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 + 2x + p^3 + 3p^2 + 2p$ függvénynek két különböző zérushelye van. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy a zérushelyek szorzata az f függvény 0 helyen fölvetett értékének négyzetével legyen egyenlő.

Megoldás

A másodfokú függvénynek pontosan akkor van két zérushelye, ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa pozitív, azaz

$$4 - 4 \cdot (p^3 + 3p^2 + 2p) > 0, \text{ azaz } p^3 + 3p^2 + 2p < 1.$$

Jelölje x_1 és x_2 a függvény két zérushelyét!

Az f függvény 0 helyen fölvetett értékének négyzete: $(f(0))^2 = (p^3 + 3p^2 + 2p)^2$

Viète formula alapján: $x_1 \cdot x_2 = p^3 + 3p^2 + 2p$, így a feladta szöveg szerint:

$$(p^3 + 3p^2 + 2p)^2 = p^3 + 3p^2 + 2p$$

$$\text{így } p^3 + 3p^2 + 2p = 0 \text{ vagy } p^3 + 3p^2 + 2p = 1.$$

Mivel utóbbi esetben a függvénynek nincs két zérushelye, ezért

$$p^3 + 3p^2 + 2p = 0$$

$$p(p^2 + 3p + 2) = 0$$

$$p(p+1)(p+2) = 0$$

$$p = 0 \text{ vagy } p = -1 \text{ vagy } p = -2.$$

5. Mely rendezett valós számhármassok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$x + y + z = 2$$

$$2xy = z^2 + 4$$

1. megoldás

Mivel $x + y = 2 - z$ és $xy = \frac{z^2+4}{2}$, ezért x és y megoldásai egy olyan u -ban másodfokú egyenletnek, amelynek alakja a gyökök és együtthatók összefüggése alapján:

$$u^2 - (2 - z)u + \frac{z^2+4}{2} = 0$$

Ennek az egyenletnek pontosan akkor léteznek valós megoldásai, ha diszkriminánsa nem negatív, azaz

$$(2 - z)^2 - 4 \cdot \frac{z^2 + 4}{2} \geq 0$$

$$4 - 4z + z^2 - 2z^2 - 8 \geq 0$$

$$0 \geq z^2 + 4z + 4$$

$$0 \geq (z + 2)^2$$

ami pontosan $z = -2$ esetben teljesül.

A kapott eredményt az eredeti egyenletrendszerbe helyettesítve:

$$x + y = 4 \text{ és } xy = 4, \text{ ahonnan } x = 2 \text{ és } y = 2.$$

Egyenletrendszerünk megoldása tehát: $(2; 2; -2)$.

2. megoldás

Első egyenletet rendezve és négyzetre emelve kapjuk, hogy $(x + y)^2 = 4 - 4z + z^2$.

Ebből a második egyenlet kétszeresét kivonva:

$$(x + y)^2 - 4xy = 4 - 4z + z^2 - 2(z^2 + 4)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = 4 - 4z + z^2 - 2z^2 - 8$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = -z^2 - 4z - 4$$

$$(x - y)^2 = -(z + 2)^2$$

Mivel a bal oldal nemnegatív, a jobb oldal nem pozitív, így az egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha $x - y = 0$ és $z + 2 = 0$.

Innen $x = y$ és $z = -2$.

Az eredeti első egyenletbe helyettesítve y -t és z -t kapjuk, hogy

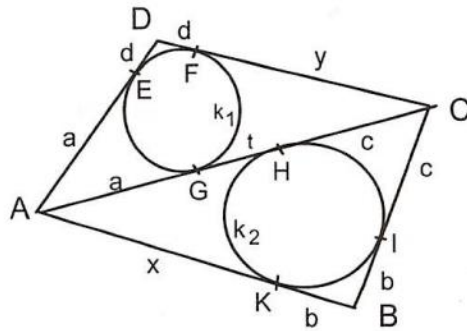
$$2x = 4 \text{ vagyis } x = 2.$$

Egyenletrendszerünk megoldása tehát: $(2; 2; -2)$.

6. Igazoljuk, hogy ha az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, akkor az ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást.

Megoldás

Tekintsük az ábrát a jelölésekkel! Mivel körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért $AG = AE = a$; $BK = BI = b$; $CH = CI = c$; $DE = DF = d$, és legyen továbbá $AK = x$, $CF = y$, $GH = t$! Mivel az AK és AH , valamint a CF és CG érintőszakaszok is egyenlőek, így $x = a + t$ és $y = c + t$.



A feladat szövege szerint $ABCD$ négyszög érintőnégyyszög, így szemközti oldalainak összege egyenlő, vagyis $a + d + b + c = d + y + x + b$, ahonnan $a + c = x + y$.

Behelyettesítve ide az x -re és y -ra kapott összefüggéseket

$$a + c = a + t + c + t$$

ahonnan $0 = 2t$, vagyis $t = 0$.

Ha viszont $t = 0$, akkor $G = H$, vagyis a két kör ebben a pontban érinti egymást, és éppen ezt akartuk belátni.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

11. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Mely valós x értékre teljesül, hogy $\log_a b + \log_b a \leq 2$, ha $a = \frac{x^2 - x + 20}{50}$ és $b = \frac{x^2 - 8x + 17}{50}$?

Megoldás

A logaritmus értelmezési tartománya miatt $a > 0$; $b > 0$; $a \neq 1$; $b \neq 1$

Ezért $x^2 - x + 20 > 0$ és $x^2 - 8x + 17 > 0$, ami minden valós x esetén teljesül. (1)

Továbbá $a - 1 \neq 0$ és $b - 1 \neq 0$, vagyis

$$a - 1 = \frac{x^2 - x + 20}{50} - 1 = \frac{x^2 - x - 30}{50} = \frac{(x-6)(x+5)}{50} \neq 0,$$

$$\text{és } b - 1 = \frac{x^2 - 8x + 17}{50} - 1 = \frac{x^2 - 8x - 33}{50} = \frac{(x-11)(x+3)}{50} \neq 0$$

azaz $x \neq 6$; $x \neq -5$; $x \neq 11$; $x \neq -3$ (2)

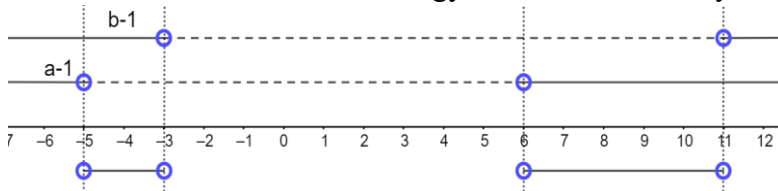
$\log_a b + \log_b a$ két szám reciprokának összege, ami pozitív számok esetén legalább 2, tehát

Mivel $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ így $\log_a b + \log_b a \leq 2 \Leftrightarrow \log_a b + \log_b a = 2$, és az egyenlőség

pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Ekkor $\frac{x^2 - x + 20}{50} = \frac{x^2 - 8x + 17}{50}$ egyenletből $x = -\frac{3}{7}$, amely megfelel az értelmezési tartománynak.

$\log_a b + \log_b a$ negatív számok esetén legfeljebb -2, tehát teljesül a feltétel. $\log_a b$ negatív, ha a és b közül az egyik 0 és 1 között van, a másik pedig 1-nél nagyobb. Azaz $a - 1$ és $b - 1$ közül az egyik -1 és 0 között van, a másik pedig pozitív.

Az alábbi ábráról leolvasható, hogy $a - 1$ és $b - 1$ milyen esetben ellenkező előjelűek:



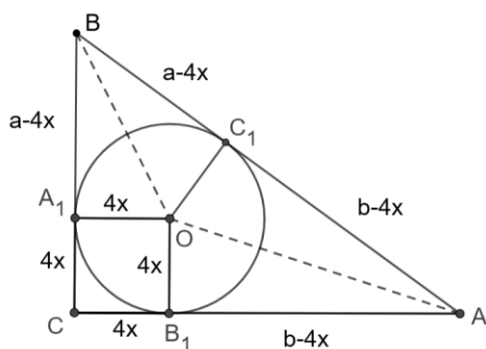
Tehát $-5 < x < -3$ vagy $6 < x < 11$, ami megfelel az (1) és (2) feltételeknek.

Összefoglalva: $-5 < x < -3$ vagy $6 < x < 11$ vagy $x = -\frac{3}{7}$.

2. Egy derékszögű háromszög köré írt kör sugara a háromszögbe írt kör sugarának $\frac{13}{4}$ -szerese. Mekkora a háromszög hegyesszögei?

1. megoldás

Legyen a beírt kör sugara $4x$, a köré írt kör sugara $13x$.



Az ábra jelöléseit használva az átfogó (a derékszögű háromszög köréírt köre sugarának kétszerese) $c=26x$. Mivel a beírt körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért A_1OB_1C négyzet, és így $AB_1 = AC_1 = b - 4x$, illetve $BA_1 = BC_1 = a - 4x$.

Ezért $AB = a - 4x + b - 4x = a + b - 8x = 26x$. Tehát $a + b = 34x$. Mivel $a^2 + b^2 = 676x^2$, ezért az egyenletrendszer megoldása: $a = 24x$ és $b = 10x$ (vagy fordítva). Tehát $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{10}$, azaz $\alpha = 67^\circ 23'$, amiből $\beta = 22^\circ 37'$.

2. megoldás

Az ábra jelöléseit használva az AO és BO szakaszok a háromszög szögfelezői, ezért az AOB háromszögben $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$.

Az AOC_1 derékszögű háromszögben $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{AC_1}{4x}$, a BOC_1 derékszögű háromszögben $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{BC_1}{4x}$.

Így $AC_1 = 4x \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ és $BC_1 = 4x \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ és összegük $26x$.

$$4 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 4 \cdot \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 26$$

Alkalmazzuk a $\operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1}$ addíciós tételt, így az egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$2\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 13\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 15 = 0$$

Ennek megoldásai: $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 5$, azaz $\alpha = 22^\circ 37'$, illetve $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$, azaz $\alpha = 67^\circ 23'$.

3. Adjuk meg az összes olyan x valós számot, amely egyszerre elégíti ki az alábbi két egyenletet.

$$\sin \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} \right) = 0$$

$$\sin \left(\sqrt{\log_{\sqrt{2}} x} \right) = 0$$

Megoldás

A négyzetgyök és a logaritmus miatt $x > 0$.

Alakítsuk át a két egyenletet:

$$\sin \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^{k\pi} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{k\pi} = x$$

$$\sin\left(\sqrt{\log_{\sqrt{2}} x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_{\sqrt{2}} x} = l \cdot \pi \quad (l \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}} x = (l \cdot \pi)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^{(l \cdot \pi)^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{(l \cdot \pi)^2}{2}} = x,$$

$$\text{azaz } 2^{k\pi} = 2^{\frac{(l \cdot \pi)^2}{2}},$$

ahonnan az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $k\pi = \frac{l^2 \cdot \pi^2}{2}$, vagyis

$$2k = l^2 \cdot \pi \quad (\text{ahol } k \in \mathbb{Z} \text{ és } l \in \mathbb{N}).$$

Mivel az egyenlet bal oldala egész, így a jobb oldalnak is egésznek kell lennie, ami akkor és csakis akkor teljesül, ha $l = 0$, ekkor viszont $k = 0$, amiből következik, hogy $x = 1$. Ez pedig kielégíti mindkét egyenletet, hiszen

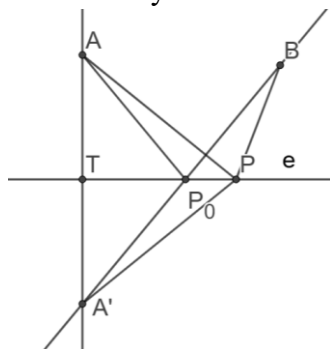
$$\sin(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{1}) = \sin(\log_{\sqrt{2}} 1) = \sin 0 = 0$$

$$\sin(\sqrt{\log_{\sqrt{2}} 1}) = \sin(\sqrt{\log_{\sqrt{2}} 1}) = \sin \sqrt{0} = 0.$$

4. Tekintsük a derékszögű koordináta rendszerben az $A(-6; 10)$ és $B(4; 14)$ pontokat. Számítsuk ki annak a $2x - 5y + 4 = 0$ egyenletű egyenesen lévő P pontnak a koordinátáit, amelyre az AP és PB szakaszok hosszának összege minimális.

Megoldás

Az A és B pontok koordinátáit behelyettesítve az egyenes egyenletének bal oldalába (-58 és -63) azonos előjelű számokat kapunk, azaz A és B a $2x - 5y + 4 = 0$ egyenletű e egyenes azonos oldalán helyezkednek el.



Jelölje P az egyenes tetszőleges pontját! Azt a P pontot keressük, amelyre $AP + BP$ összeg minimális. A -t e -re tükrözve kapjuk A' -t.

Mivel a tengelyes tükrözés távolságtartó transzformáció, ezért bármely P pontra $PA = PA'$. Ezért $AP + BP = A'P + BP$ akkor minimális, ha P az $A'B$ és e P_0 metszéspontja. Minden más P pont esetén az APB háromszögben felírva a háromszög egyenlőtlenséget: $A'P + PB > A'B$.

P_0 pont koordinátáinak kiszámítása:

1) az A pontból az e -re bocsátott merőleges egyenes egyenlete: $\vec{n}_{AT}(5; 2) \Rightarrow 5x + 2y = -10$.

- 2) e és AT egyenesek metszéspontja: $T(-2; 0)$.
 3) mivel T az AA' szakasz felezési pontja, ezért $A'(2; -10)$.
 4) $A'B$ egyenes egyenlete: $\overrightarrow{A'B}(2; 24) = \overrightarrow{v_{A'B}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{A'B}}(12; -1) \Rightarrow A'B: 12x - y = 34$.
 5) $A'B$ és e metszéspontja: $P_0(3; 2)$.
5. Van-e olyan m pozitív egész szám, hogy $5m$ ötödik, $6m$ hatodik, $7m$ hetedik hatványa egy egész számnak?

Megoldás

Ha létezik, akkor az 5, 2, 3 és 7 biztosan szerepel a prímtényezős fölbontásában.

Ha $m = 5^p \cdot 2^q \cdot 3^r \cdot 7^s$, akkor a feladat feltételei csak úgy teljesülhetnek, ha

$$p = 5a - 1 = 6e = 7i$$

$$q = 5b = 6f - 1 = 7j$$

$$r = 5c = 6g - 1 = 7k$$

$$s = 5d = 6h = 7l - 1.$$

A $p = 84; q = 35; r = 35; s = 90$ megfelelnek a feltételnek.

6. Egy 3×3 -as amőba táblán minden lépésben véletlenszerűen megjelenik az egyik üres mezőben egy X vagy egy kör, minden üres mezőre nézve egyenlő valószínűséggel. Ezután a maradék üres mezőkre ez megismétlődik. Ez addig történik, amíg az X vagy a kör nyer, tehát egy sor, oszlop vagy nagyátló egyforma jelekkel telik meg, vagy amíg be nem telik a tábla. Mekkora valószínűséggel ér véget a játék legfeljebb 4 lépésben?

1. megoldás

Ha véletlenszerűen játszunk 4 lépést, akkor győztes esetben sorrendtől függetlenül látunk győztes vonalat, akár 3, akár 4 lépésben ért véget a játék.

Ha a sorrendet nem vesszük figyelembe, akkor az összes esetek száma:

$$n = \binom{9}{4} \cdot \left(\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right) = 2016.$$

Hiszen számít, hogy a 9 helyből melyik 4-be kerül jel, és az is, hogy hányféleképpen lehet elrendezni az összesen 4 darabot a kétféle jeltől.

Kedvező állás többféleképpen lehet. Például helyes sor 3-féle helyen lehet, 2-féle jeltől. Minden ilyen esetben a 4. jel 6-féle helyen lehet, szintén kétféle jelkiosztásban. Ugyanennyi oszlopnnyertes állás van, és hasonló az átlónyertesek esetének száma is kétféle helyes átlóval. A kedvező esetek száma így

$$k = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 192.$$

Így a keresett valószínűség:

$$P(\text{maximum 4 lépésben véget ér a játék}) = \frac{k}{n} = \frac{192}{2016} = \frac{2}{21}.$$

2. megoldás

A feladat feltétele azt jelenti, hogy a játék 3 vagy 4 lépésben ér véget.

Ha 3 lépésben ér véget, akkor 3 X vagy 3 kör volt egy oszlopban, sorban vagy átlóban. Annak, hogy minden jel egyforma legyen $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ a valószínűsége, hiszen $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egyezik meg a 2. és a 3. jel is az elsővel.

Jeltől függetlenül számíthatunk az összes elrendezés azonos valószínűsége alapján:

$$P(3 \text{ azonos jel győztes elrendezésű}) = \frac{k}{n} = \frac{3+3+2}{\binom{9}{3}} = \frac{2}{21}.$$

Így a keresett valószínűség 3 lépésre: $P_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{21} = \frac{1}{42}$.

4 lépés esetén már többet számít a lépések sorrendje, hiszen fontos, hogy a 3. lépésben még ne legyen győztes állás. Ha megkülönböztetjük az azonos végállásokat a jelek bekerülési sorrendjétől, akkor az összes esetek száma, figyelembe véve, hogy minden jelnél 2 lehetőségünk van:

$$n_4 = 2^4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 48384.$$

Fontos megjegyezni, hogy ebben benne vannak azok a játékok is, amik 3 lépésben véget értek, de ezzel a modellel is ugyanígy kijön a P_3 értéke.

A kedvező esetek számánál egy-egy állásban 2 lehetőség van a győztes jelre. 8 különböző lehetőség a győztes vonal helyére. Egy ilyen esetben a győztes vonalon kívül még 6 különböző hely van a (sorrendben semmiképp sem) negyedik jelre, mely megint csak 2-féle lehet. A győztes vonalban 3-féle lehet az utolsó, győztes jel helye. Az első 3 lerakott hely pedig 3! sorrendben kerülhet le. Így a kedvező esetek száma:

$$k_4 = 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3! = 3456.$$

Ennek megfelelően, mivel minden ilyen módon vett kimenetel azonos valószínűségű:

$$P_4 = \frac{k_4}{n_4} = \frac{3456}{48384} = \frac{1}{14}.$$

A két lehetséges eset valószínűségei adják a feladat kérdésében szereplő valószínűséget:

$$P(\text{maximum 4 lépésben véget ér a játék}) = \frac{1}{42} + \frac{1}{14} = \frac{2}{21}.$$

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

12. évfolyam

II. forduló

Megoldások

1. Egy számtani sorozat első n tagjának összege kettőhatvány. Igaz-e, hogy ekkor n is kettőhatvány? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

Ha a sorozat első tagja a , differenciája d , akkor a feltétel szerint alkalmas k -ra

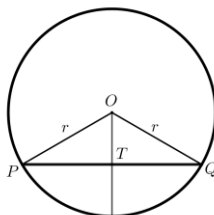
$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot d) = 2^k,$$

ahonnan $n \cdot (2a + (n-1) \cdot d) = 2^{k+1}$. Mivel a jobb oldalon kettőhatvány áll, ezért a bal oldal mindegyik tényezőjének kettőhatványnak kell lennie. Ebből adódik, hogy n valóban kettőhatvány.

2. Egy egyenes körhenger alakú, h magasságú zárt tartály a palástjára fektetve vízszintes helyzetben fekszik a földön. Ebben a helyzetben az alapkör átmérőjének (mint magasságnak) negyed részéig áll a víz. Milyen magasan fog állni a víz a tartályban, ha azt talpra, azaz alapkörére állítjuk?

Megoldás

Legyen a henger alapkörének sugara r . Fektetett helyzetében a forgástengelyére merőleges keresztmetszetben (lásd ábra) a rövidebb PQ ív és a PQ szakasz által meghatározott körszeletben van víz.



Mivel T a PQ szakasznak is és a PQ -ra merőleges sugárnak is felezőpontja ($OT = r/2$), ezért a PTO derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele. Ebből következik, hogy a QOP szög 120° -os, és a PQO háromszög területe $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$. A körszelet területe így

$$t = \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Ezek alapján a hengerben levő víz térfogata: $V = h \cdot r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$.

Ha a tartály talpra állítása után a hengerben y magasságig áll a víz, akkor $V = r^2 \pi y$. Így

$$h \cdot r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = r^2 \pi y,$$

ahonnan $y = h \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) \approx 0,195 \cdot h$.

3. Minden pozitív egész n esetén tekintsük az $n+1; n+2; \dots; 2n$ számok (n darab szám) mindegyikének legnagyobb páratlan pozitív osztóját, majd ezeket az osztókat adjuk össze. Bizonyítsuk be, hogy az összeg bármely pozitív egész n esetén n^2 lesz.

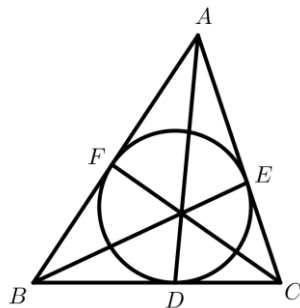
Megoldás

Ha az $n+1; n+2; \dots; 2n$ számok közül kettőnek ugyanaz lenne a legnagyobb páratlan pozitív osztója, akkor a nagyobbik osztható lenne a kisebbikkel. Ez viszont nem lehetséges, ugyanis a számok közül a legnagyobb és a legkisebb hányadosa kisebb, mint 2. A tekintett n szám páratlan pozitív osztói tehát páronként különbözők, és kisebbek $2n$ -nél. Ez csak úgy lehetséges, ha 1-től $2n-1$ -ig mindegyik páratlan szám pontosan egyszer fordul elő a páratlan pozitív osztók között. Közismert, hogy az első n darab pozitív páratlan szám összege n^2 . Ezzel beláttuk az állítást.

4. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a D , E , F pontokban érinti. Igaz-e, hogy ha $AD = BE = CF$, akkor az ABC háromszög szabályos? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

A válasz: igaz. Először azt fogjuk belátni, hogy a $BE = CF$ feltételből következik az $AB = AC$ egyenlőség.



A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, így $AF = AE$.

Mivel $BE = CF$ és $AF = AE$, ezért az ABE és CAF háromszögek két-két oldala megegyezik. Ha ez a két háromszög nem lenne egybevágó, akkor teljesülnie kellene az $\angle ABE + \angle ACF = 180^\circ$ összefüggésnek, de mivel az ABE és ACF szögek biztosan hegyesszögek (az eredeti háromszög két szögének a fele), ezért ez lehetetlen. Ebből viszont következik, hogy az ABE és CAF háromszögek egybevágók, így $AB = AC$.

Hasonlóan látható be, hogy az $AD = CF$ feltételből következik, hogy $AB = BC$. Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszög szabályos.

5. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény, ahol a, b, c egész számok, és $a \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ha az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ egész helyeken felvett értékeire teljesül, hogy a grafikon $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontjainak távolsága egész szám, akkor $f(x_1) = f(x_2)$.

Megoldás

Mivel $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)$, és x_1, x_2 egész számok, ezért alkalmas n egész számra

$$f(x_1) - f(x_2) = n \cdot (x_1 - x_2). \quad (1)$$

Az $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ grafikon pontok távosságára vonatkozó feltétel azt jelenti, hogy

$$(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2 = m^2 \quad (2)$$

valamely m egész számra. Helyettesítsük (1)-et (2)-be:

$$(x_1 - x_2)^2 \cdot (1 + n^2) = m^2.$$

Ez utóbbi egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $1 + n^2$ négyzetszám, amiből adódik, hogy $n = 0$. Ez pedig (1) alapján azt jelenti, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ezzel beláttuk az állítást.

6. Az 1-nél nagyobb a valós számra teljesül, hogy a $10 < a^x < 100$ egyenlőtlenségnek pontosan 5 darab egész megoldása van. Adjuk meg az összes megfelelő a esetén, hogy a $100 < a^x < 1000$ egyenlőtlenségnek hány egész megoldása van?

Megoldás

Legyen az 5 egész megoldása a $10 < a^x < 100$ egyenlőtlenségnek $n-2, n-1, n, n+1, n+2$. A feltétel a -ra nézve azt jelenti, hogy $a^{n-3} \leq 10 < a^{n-2}$ és $a^{n+2} < 100 \leq a^{n+3}$. Ebből a -ra a következő feltételek adódnak: egyrészt $a > 10^{\frac{1}{n-2}}$ és $a \geq 10^{\frac{2}{n+3}}$, másrészt $a \leq 10^{\frac{1}{n-3}}$ és $a < 10^{\frac{2}{n+2}}$. Több esetet kell megvizsgálnunk ahhoz, hogy a megfelelő a -t meg tudjuk határozni n függvényében.

1. Ha $n \leq 6$, akkor az $10^{\frac{1}{n-2}} < a < 10^{\frac{2}{n+2}}$ egyenlőtlenségből $n > 6$ adódik, azaz ilyen n -ek esetén nincs egész megoldása a feltételi egyenlőtlenségnek.

2. Ha $n = 7$, akkor $10^{\frac{1}{5}} < a < 10^{\frac{2}{9}}$.

3. Ha $n = 8$, akkor $10^{\frac{2}{11}} \leq a < 10^{\frac{1}{5}}$.

4. Ha $n = 9$, akkor $10^{\frac{1}{6}} \leq a \leq 10^{\frac{1}{6}}$, azaz $a = 10^{\frac{1}{6}}$.

5. Ha $n \geq 10$, akkor az $10^{\frac{2}{n+3}} \leq a \leq 10^{\frac{1}{n-3}}$ egyenlőtlenségből $n \leq 9$ adódik, azaz ilyen n -ek esetén nincs egész megoldása a feltételi egyenlőtlenségnek.

Miután beazonosítottuk a feltételnek megfelelő a -kat, tekintsük a kérdéses egyenlőtlenséget, és adjuk meg a megoldások számát.

Ha $a = 10^{\frac{1}{6}}$, akkor $a^{12} = 100 < a^{13}$ és $a^{17} < 1000 = a^{18}$, vagyis ebben az esetben 5 egész megoldás van.

Ha $a = 10^{\frac{2}{11}}$, akkor $a^{11} = 100 < a^{12}$ és $a^{16} < 1000 = a^{17}$, vagyis ebben az esetben is 5 egész megoldás van.

Ha $10^{\frac{2}{11}} < a < 10^{\frac{3}{16}}$, akkor $a^{10} < 100 < a^{11}$ és $a^{16} < 1000 < a^{17}$, azaz ebben az esetben 6 egész megoldás van.

Ha $10^{\frac{3}{16}} \leq a < 10^{\frac{1}{5}}$, akkor $a^{10} < 100 < a^{11}$ és $a^{15} < 1000 \leq a^{16}$, azaz ebben az esetben 5 egész megoldás van.

Ha $10^{\frac{1}{5}} < a < 10^{\frac{3}{14}}$, akkor $a^9 < 100 < a^{10}$ és $a^{14} < 1000 < a^{15}$, azaz ebben az esetben is 5 egész megoldás van.

Ha $10^{\frac{3}{14}} \leq a < 10^{\frac{2}{9}}$, akkor $a^9 < 100 < a^{10}$ és $a^{13} < 1000 \leq a^{14}$, azaz ebben az esetben 4 egész megoldás van.