

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

9. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. A pozitív egész számokat az alábbi módon csoportosítottuk: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10) stb. Melyik szám a 2025. csoport legkisebb eleme?

Megoldás

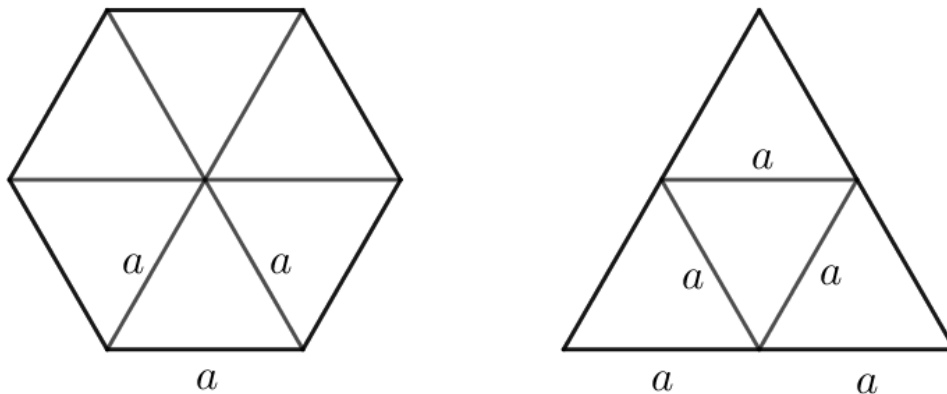
Az egyes csoportokba rendre 1, 2, 3, 4, 5, ... számot használunk, így az első 2024 csoporthoz a pozitív egészek közül az első $1 + 2 + 3 + \dots + 2024 = \frac{(1+2024)}{2} \cdot 2024 = 2049300$ pozitív egészet használtuk föl, vagyis a 2025. csoport legkisebb eleme 2049301.

2. Egy szabályos hatszög és egy szabályos háromszög kerülete egyenlő. Hányad része a háromszög területe a hatszög területének?

Megoldás

Jelölje a a szabályos hatszög oldalát. Ekkor a hatszög és a szabályos háromszög kerülete $6a$, vagyis a háromszög oldala $2a$.

A szabályos hatszög fölbontható hat darab, a szabályos háromszög pedig négy darab egybevágó, a oldalú szabályos háromszögre (az ábra szerint).



A szabályos háromszög és a vele megegyező kerületű szabályos hatszög területének aránya tehát $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3. Igazolja, hogy ha $x + y + z = a$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ (ahol x, y, z, a 0-tól különböző valós számok), akkor $x = a$ vagy $y = a$ vagy $z = a$.

Megoldás

Mivel $x + y + z = a$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, ezért $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. A nevezőkkel beszorozva kapjuk, hogy $(x + y + z)yz + (x + y + z)xz + (x + y + z)xy = xyz$.

Innen $xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2 + x^2y + xy^2 + xyz = xyz$.

$$\underline{y^2z} + \underline{yz^2} + \underline{x^2z} + \underline{xyz} + \underline{xz^2} + \underline{x^2y} + \underline{xy^2} + \underline{xyz} = 0$$

$$z(y^2 + yz + xz + xy) + x(xz + xy + y^2 + yz) = 0$$

$$(z + x)(xz + xy + y^2 + yz) = 0$$

$$(z + x)[x(z + y) + y(y + z)] = 0$$

$$(z + x)(z + y)(x + y) = 0,$$

ahonnan (mivel valós számok szorzatának értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényező 0) vagy $z = -x$ vagy $z = -y$ vagy $x = -y$.

Az $x + y + z = a$ összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy $y = a$ vagy $x = a$ vagy $z = a$, ami a bizonyítandó volt.

4. Léteznek-e olyan téglalapok, amelyeknek oldalhosszai pozitív egész számok, területük és kerületük mérőszáma pedig megegyezik?

Megoldás

Jelölje a keresett téglalapok oldalának hosszát a és b ($a; b \in \mathbb{Z}^+$), amelyekre a feladat feltételéből $2a + 2b = ab$. Nullára redukálva

$$ab - 2a - 2b = 0,$$

majd mindkét oldalhoz 4-et adva

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

$$a(b - 2) - 2(b - 2) = 4$$

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Mivel a és b pozitív egészeket jelöl, így a 4-et két pozitív egész szorzataként állítjuk elő, amit a következő módokon tehetünk meg: $1 \cdot 4$; $2 \cdot 2$; $4 \cdot 1$.

Tehát léteznek olyan téglalapok, amelyeknek oldalhosszai természetes számok, területük és kerületük mérőszáma pedig megegyezik, hiszen a 3 és 6 oldalhosszúságú (kerülete, területe 18) és a 4-4 oldalhosszúságú (kerülete, területe 16) téglalapok kielégítik a feladat feltételeit.

5. Melyik a legkisebb q természetes szám, amelyhez található olyan p természetes szám, hogy

$$\frac{1}{2026} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2025}?$$

Megoldás

Mivel $\frac{1}{2026} < \frac{p}{q} < \frac{1}{2025}$, ezért $\frac{p}{2026p} < \frac{p}{q} < \frac{p}{2025p}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $2025p < q < 2026p$.

Ha $p = 0$ vagy $p = 1$, akkor ellentmondásra jutunk.

Ha $p = 2$, akkor $4050 < q < 4052$, vagyis q értéke 4051.

Ha $p = 3$, akkor $4075 < q < 7078$, vagyis q értéke 7076, 7077, ... lehet.

Így q legkisebb lehetséges értéke 4051.

6. Melyik a legkisebb természetes szám, amely osztható 56-tal, 56-ra végződik, és számjegyeinek összege is 56?

Megoldás

Mivel a feladat feltételeinek megfelelő legkisebb természetes számot keressük, ezért minél kevesebb számjegyből álló 56-ra végződő szám kell, amelyben – mivel a jegyek összege is 56 – az utolsó két jegy előtt legalább öt jegy kell, hogy álljon. Ez csak úgy valósulhat meg, hogy mind az öt jegy 9-es, de a 9999956 nem osztható 56-tal, vagyis a keresett szám legalább nyolcjegyű.

Mivel az 56-tal osztható számok 8-cal is oszthatók, így a százask helyén 0, 2, 4, 6 vagy 8 áll. A nyolcjegyű számok közül próbáljuk az első számjegyet a legkisebbnek választani. Ha ez 1, akkor (mivel a százask helyén páros számjegy áll) a szám csak a 19999856 lehetne, ami azonban nem osztható 56-tal. Ha az első számjegy a 2, akkor a hiányzó öt számjegy összegének 43-nak kell lennie. A százask helyén így továbbra is csak 8 állhat (mert, ha kisebb páros szám állna, akkor a nagyobb helyiértékű helyre kerülne nagyobb számjegy) vagyis hiányzó helyekre három 9-es és egy 8-as kerülhet: 28999856; 29899856; 29989856; 29998856. Ezek közül 56-tal osztható és így a feladat összes feltételének megfelelő szám a 29899856.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

10. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. Egy falu könyvtárában egy adott napon megfordult személyekről az alábbiakat tudjuk:

- a) A könyvtárban legalább hatan megfordultak.
- b) Minden olvasó aznap csak egyszer volt a könyvtárban.
- c) Egyidőben kettőnél többen nem voltak a könyvtárban.
- d) Bármely hat látogató között található két olyan személy, akik a könyvtárban találkoztak egymással.

Bizonyítsuk be, hogy az adott napon egyetlen olvasó sem találkozhatott a könyvtárban ötnél több személlyel.

Megoldás

Tételezzük föl, hogy van olyan olvasó (hívjuk őt A -nak), aki legalább hat személlyel találkozott. A d) feltétel miatt ezek között a személyek között van kettő, akik egymással is találkoztak. Találkozásuk ideje alatt viszont A nem lehetett a könyvtárban (hiszen ott már rajta kívül ketten voltak). Ha A e két személy találkozására előtt vagy után járt volna a könyvtárban, akkor valamelyikükkel nem találkozott volna. Föltevésünk így ellentmondásra vezetett, vagyis hamis, így egyetlen olvasó sem találkozhatott a könyvtárban ötnél több személlyel.

2. Igazolja, hogy ha az a, b, c valós számok közül legalább kettő különbözik, akkor az

$$(x-a) \cdot (x-b) + (x-b) \cdot (x-c) + (x-c) \cdot (x-a) = 0$$

egyenletnek két különböző valós megoldása van.

Megoldás

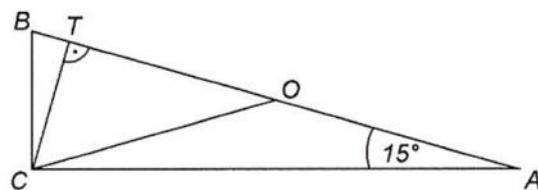
$$\begin{aligned} & [-2(a+b+c)]^2 - 4 \cdot 3 \cdot (ab+ac+bc) = \\ & = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab + 8ac + 8bc - 12ab - 12ac - 12bc = \\ & = 2(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = \\ & = 2[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \end{aligned}$$

Mivel a feladat feltétele szerint az a, b, c valós számok közül legalább kettő különbözik, így az $a-b$, $a-c$ és $b-c$ közül legalább az egyik nem nulla, vagyis a másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív, így két különböző valós megoldása van.

3. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge ötször akkora, mint a másik hegyesszög, átfogójához tartozó magasságának hossza pedig 3 cm. Határozzuk meg a háromszög területét.

Megoldás

Legyen α, β a derékszögű háromszög két hegyesszöge. Mivel $\alpha = x, \beta = 5x$, így $6x = 90^\circ$ és $x = 15^\circ$, vagyis $\alpha = 15^\circ, \beta = 75^\circ$.



Legyen O az AB átfogó középpontja, azaz a háromszög köréírt körének (Thalész kör) középpontja, T a C -ből induló magasság talppontja, így $OA = OB = OC$. Mivel ACO háromszög egyenlőszárú, így $OAC\angle = ACO\angle = 15^\circ$, azaz $COT\angle = 30^\circ$. Mivel a COT háromszög derékszögű, melynek szögei $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Ezért $OC = 2CT = 2m = 6$. Mivel $OA = OB = OC$, ezért $AB = 2OC = 12$, vagyis az eredeti derékszögű háromszög területe: $\frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$.

4. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2$ függvények grafikonjainak halmazát, ahol m tetszőleges valós szám. Határozzuk meg az egyes függvények grafikonjaként előálló parabolák tengelypontjainak halmazát.

Megoldás

Mivel

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = \\ &= 2 \left[x^2 - mx + \frac{m^2}{2} - m - 1 \right] = \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{m}{2} \right)^2 + \frac{m^2}{4} - m - 1 \right] = \\ &= 2 \left(x - \frac{m}{2} \right)^2 + \frac{m^2}{2} - 2m - 2, \end{aligned}$$

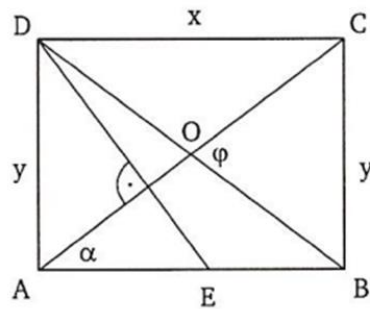
ezért a parabolák tengelypontjainak $(x; y)$ koordinátái: $\left(\frac{m}{2}; \frac{m^2}{2} - 2m - 2 \right)$ vagyis a pontok az $x = \frac{m}{2}, y = \frac{m^2}{2} - 2m - 2 (m \in \mathbb{R})$ paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbén helyezkednek el. Mivel $m = 2x, y = \frac{m^2}{2} - 2m - 2 = 2x^2 - 4x - 2$, ezért a tengelypontok mértani helye az $y = 2x^2 - 4x - 2$ egyenletű parabola.

5. Az $ABCD$ téglalap D csúcsán átmenő és az AC átlóra merőleges egyenes az AB szakaszt az E pontban metszi. Az AE szakasz hossza 9 cm, a téglalap területe 192 cm^2 . Határozzuk meg a téglalap oldalainak hosszát.

Megoldás

Jelölje x és y a téglalap két oldalának hosszát. Legyen $CAB\angle = \alpha$.

Ekkor $ACB\angle = CAD\angle = 90^\circ - \alpha$, így $ADE\angle = \alpha$ (merőleges szárú hegyesszögek), tehát az ADE és BAC háromszögek hasonlóak, így megfelelő oldalaik aránya megegyezik, azaz $\frac{AD}{AE} = \frac{BA}{BC}$, vagyis $\frac{y}{9} = \frac{x}{y}$.



Innen $x = \frac{y^2}{9}$. Mivel a téglalap területe 192, ezért $xy = 192$, így $\frac{y^3}{9} = 192$, ahonnan $y = 12$ és $x = 16$, tehát a téglalap két oldalának hossza 12 cm és 16 cm.

6. A p paraméter mely valós értéke esetén vesz fel a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 + 2px + 6$ függvény minden valós x -re legalább 1-gyel nagyobb értéket, mint a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = px^2 + 4x - 2p$ függvény?

Megoldás

Az $f(x) \geq g(x) + 1$ pontosan akkor igaz minden x -re, ha a valós számok halmazán értelmezett $h(x) = f(x) - g(x) - 1$ függvény minden x -re nemnegatív.

$$h(x) = 2x^2 + 2px + 6 - (px^2 + 4x - 2p) - 1 = (2 - p)x^2 + (2p - 4)x + 5 + 2p$$

Vizsgáljuk meg h függvény előjelét, ha a főegyütthatója 0. Ha $p = 2$, akkor $h(x) = 9$, vagyis minden x esetén pozitív.

Ha $p \neq 2$, akkor h másodfokú függvény, így annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy minden x -re nemnegatív értéket vegyen föl az, hogy főegyütthatója legyen pozitív, diszkriminánsa pedig nemnegatív, vagyis $2 - p > 0$, azaz $p < 2$, és

$$\begin{aligned} D(p) &= (2p - 4)^2 - 4 \cdot (2 - p)(5 + 2p) = 4p^2 - 16p + 16 - 40 - 16p + 20p + 8p^2 \\ &= 12p^2 - 12p - 24 \leq 0 \end{aligned}$$

Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha $-1 \leq p \leq 2$. Ezt a főegyütthatóra vonatkozó $p < 2$ feltétellel kiegészítve a $-1 \leq p < 2$ feltételt kapjuk.

Mivel azonban $p = 2$ esetén a h pozitív értéket vesz föl, ezért $-1 \leq p \leq 2$ esetén vesz fel f minden x -re legalább 1-gyel nagyobb értéket, mint g .

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

11. évfolyam

I. forduló

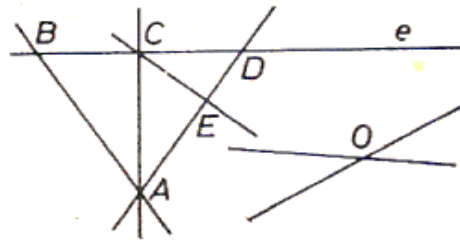
Megoldások

1. A sík adott n darab egyenesre közül semelyik kettő nem párhuzamos. Tudjuk, hogy bármelyik kettő metszéspontján még legalább egy további egyenes is átmegy. Bizonyítsuk be, hogy az összes egyenes egy ponton megy keresztül.

Megoldás

Az állítás három egyenesre nyilvánvaló.

Legalább négy egyenes esetén tételezzük föl, hogy az állítás nem igaz, azaz létezik egy olyan e egyenes, amelyik nem megy át másik kettő egyenes O metszéspontján. Legyen A a többi egyenes metszéspontjai közül az, amelyik legközelebb van e -hez. (A esetleg egybeesik O -val.) A -n keresztül legalább három egyenes megy,



melyek messék e -t a B, C, D pontokban, ahol C a B és D közé esik. A C ponton át az e és AC egyeneseken kívül még egy egyenesnek is át kell haladnia. Ez az egyenes az ABD háromszög AB vagy AD oldalát metszi egy E pontban, ami közelebb van e -hez, mint A , ami ellentmond a kezdeti feltételnek, vagyis hamis a föltevésünk, így az összes egyenes egy ponton megy át.

2. Melyik az a négyjegyű pozitív egész szám, amellyel 21 685-öt elosztva 37-et, 33 509-et elosztva pedig 53-at kapunk maradékul?

Megoldás

Legyen a keresett négyjegyű szám a . Így $1000 \leq a \leq 9999$ és $a \in \mathbb{Z}$. A feladat feltételei szerint:

$$21685 = a \cdot q_1 + 37 \text{ és } 33509 = a \cdot q_2 + 53 (q_1, q_2 \in \mathbb{Z}^+), \text{ ahonnan}$$

$$21648 = a \cdot q_1 \text{ és } 33456 = a \cdot q_2,$$

vagyis a a 21648 és a 33456 négyjegyű közös osztója.

$$\text{Mivel } 21648 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 41 \text{ és } 33456 = 2^4 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 41,$$

ezért e két szám közös osztói $2^p \cdot 3^q \cdot 41^r$ ($p \in \{0; 1; 2; 3; 4\}, q \in \{0; 1\}, r \in \{0; 1\}$) alakban írhatók.

A két szám legnagyobb közös osztója $2^4 \cdot 3^1 \cdot 41^1 = 1968$, így nincs nála kisebb négyjegyű osztó.

3. Az a és b hosszúságú oldalakkal rendelkező deltoidba r sugarú kör írható. Igazoljuk, hogy ha a deltoid húrnégyszög, akkor $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Megoldás

Ha a deltoid húrnégyszög is, akkor – mivel így szemközti szögeinek összege 180° - két szögének nagysága 90° , vagyis két a és b befogójú derékszögű háromszögre bontható.

Így a deltoid területe ab .

Mivel minden érintőnéyszög területe kiszámolható a $T = rs$ képlettel, így

$$\begin{aligned} ab &= rs \\ ab &= r \cdot (a + b) \\ \frac{1}{r} &= \frac{a + b}{ab} \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

ami a bizonyítandó állítás volt.

4. Mivel egyenlő $|A - B|$, ha

$$A = 506 \cdot \left(\frac{\sqrt{2025} + 1}{\sqrt{2025} - 1} - \frac{\sqrt{2025} - 1}{\sqrt{2025} + 1} \right), \quad B = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}} ?$$

Megoldás

$$\begin{aligned} A &= 506 \cdot \left(\frac{\sqrt{2025} + 1}{\sqrt{2025} - 1} - \frac{\sqrt{2025} - 1}{\sqrt{2025} + 1} \right) = \\ &= 506 \cdot \left(\frac{(\sqrt{2025} + 1)^2}{(\sqrt{2025} - 1) \cdot (\sqrt{2025} + 1)} - \frac{(\sqrt{2025} - 1)^2}{(\sqrt{2025} + 1) \cdot (\sqrt{2025} - 1)} \right) = \\ &= 506 \cdot \frac{2025 + 2\sqrt{2025} + 1 - 2025 + 2\sqrt{2025} - 1}{2025 - 1} = \\ &= 506 \cdot \frac{4\sqrt{2025}}{2024} = \sqrt{2025} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2025}} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \dots \\ &\quad + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{(\sqrt{2024} + \sqrt{2025}) \cdot (\sqrt{2025} - \sqrt{2024})} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \dots + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{2025 - 2024} = \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2025} - \sqrt{2024} = \\ &= \sqrt{2025} - 1 \end{aligned}$$

$$|A - B| = |\sqrt{2025} - (\sqrt{2025} - 1)| = 1$$

5. Határozzuk meg a $\log_3 x - \log_3 y$ kifejezés értékét, ha az x és y pozitív valós számokra teljesül a $3x^2 + 11xy - 4y^2 = 0$ egyenlet.

Megoldás

Mivel $x, y > 0$, ezért a $3x^2 + 11xy - 4y^2 = 0$ egyenletet y^2 -tel osztva kapjuk, hogy

$$3 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 11 \cdot \frac{xy}{y^2} - 4 = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 11 \cdot \left(\frac{x}{y}\right) - 4 = 0.$$

Ennek az $\left(\frac{x}{y}\right)$ -ban másodfokú egyenletnek a megoldásai $\left(\frac{x}{y}\right)_1 = -4$ és $\left(\frac{x}{y}\right)_2 = \frac{1}{3}$. Mivel két pozitív szám hányadosa nem lehet negatív, így az egyetlen megoldás: $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Így } \log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y} = \log_3 \frac{1}{3} = -1.$$

6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x)^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

Megoldás

A négyzetgyök és a hatványozás fogalmából adódóan $x > 0$ és így $\sqrt{x} > 0$, vagyis egyenletünk ekvivalens a következővel:

$$(\sqrt{x})^{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x,$$

amely pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{x} = 1$ vagy $2\sqrt{x} = x$.

Az első egyenletből $x = 1$, a másodikból $\sqrt{x} = 2$, vagyis $x = 4$. Mindkét megoldás kielégíti az eredeti egyenletet.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXII. esztendő

2025-2026. tanév

12. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. Igazoljuk, hogy ha $a+b=c+d$ és $a^3+b^3=c^3+d^3$, akkor $a^{2026}+b^{2026}=c^{2026}+d^{2026}$.

Megoldás (A feladat, sajnos hibásan jelent meg, a végső formára hozásnál kimaradt az „ a, b, c, d pozitív valós számok” feltétel. E nélkül a feltétel nélkül az állítás nem igaz, amiből adódik, hogy egyetlen ellenpéldáért is teljes pontszám jár. A következőkben megoldjuk az eredeti feladatot.)

Mivel $a+b=c+d$, ezért $(a+b)^3=(c+d)^3$. Elvégezve a köbre emelést, és az $a^3+b^3=c^3+d^3$ feltételt figyelembe véve némi számolás után kapjuk, hogy

$$ab(a+b)=cd(c+d).$$

Mivel a, b, c, d pozitív valós számok, ezért ez az egyenlet ekvivalens az $ab=cd$ egyenlettel. Az eredeti feltételt figyelembe véve $(a+b=c+d)$ pozitív számokra ez csak akkor teljesül, ha $a=c, b=d$ vagy $a=d, b=c$. Ebből pedig az állítás már triviálisan következik.

2. Az ABC háromszög tetszőleges belső P pontjának a BC oldalegyenestől vett távolságát jelölje x , a CA oldalegyenestől vett távolságát jelölje y , az AB oldalegyenestől vett távolságát jelölje z . Legyen a háromszög A csúcsából induló magasság hossza m_a , a B csúcsból induló magasság hossza m_b , a C csúcsból induló magasság hossza pedig m_c . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x}{m_a} + \frac{y}{m_b} + \frac{z}{m_c} = 1.$$

Megoldás

x, y, z rendre a PBC, APC, ABP háromszögek BC, CA, AB oldalaihoz tartozó magasságok. Így ezen háromszögek területeire felírhatók a következő arányok:

$$\frac{x}{m_a} = \frac{T_{PBC}}{T_{ABC}}; \quad \frac{y}{m_b} = \frac{T_{APC}}{T_{ABC}}; \quad \frac{z}{m_c} = \frac{T_{ABP}}{T_{ABC}}.$$

Összeadva ezt a három egyenletet:

$$\frac{x}{m_a} + \frac{y}{m_b} + \frac{z}{m_c} = \frac{T_{PBC} + T_{APC} + T_{ABP}}{T_{ABC}} = \frac{T_{ABC}}{T_{ABC}} = 1.$$

Ezzel beláttuk az állítást.

3. Felírható-e a 2026 tizenkét darab páratlan négyzetszám (pozitív egész szám négyzete) összegeként? (A választ indokolni kell.)

Megoldás

Nincs a feltételeknek megfelelő előállítás.

Tegyük fel, hogy van. Mivel a páratlan négyzetszámok 8-cal osztva 1 maradékot adnak, ezért tizenkét darab páratlan négyzetszám összege 8-cal osztva 4-et ad maradékul. 2026 viszont 8-cal osztva 2-t ad maradékul, amiből adódóan nem áll elő tizenkét darab páratlan négyzetszám összegeként.

4. Bergengócia egyik fennsíkján váratlanul kitört egy vulkán. A szakemberek egy nap késéssel érkeztek a helyszínre, a vulkán ezalatt 10 méter magas törmelékkúpot rakott. A 2. napon a vulkán kétszer akkora, a 3. napon háromszor akkora, ... a k -adik napon k -szor akkora anyagmennyiséget dobott ki, mint az első napon. Ezután a vulkán tevékenysége hasonló módon gyengülni kezdett (azaz pl. a $k+1$ -edik napon $k-1$ -szer akkora anyagmennyiséget dobott ki, mint az első napon), végül „kialudt”. Ekkor a törmelékkúp magassága 40 méter volt. (A törmelékkúp a vulkán működése alatt végig állandó nyílásszögű egyenes kúp volt.) Hány napig működött a vulkán, ha tudjuk, hogy a működés időtartama napokban mérve egész szám volt?

Megoldás

Mivel a törmelékkúp nyílásszöge végig állandó volt, ezért térbeli hasonlóság áll fenn a mindenkorai törmelékkúpok között. A hasonlóság aránya az adatok alapján 1 : 4, így a „kezdőkúp” és a „végső kúp” térfogatának aránya 1 : 64.

A vulkán működésére vonatkozó feltétel szerint

$$1+2+\dots+(k-1)+k+(k-1)+\dots+2+1=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}=k^2=64,$$

ahonnan $k=8$. A vulkán 15 napig működött.

5. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsba futó élei páronként merőlegesek egymásra. A D csúcsban érintkező lapok területeinek páronként vett összegei: 150, 168, 126. Mekkora az ABC háromszög legnagyobb szöge?

Megoldás

A D csúcsba futó, páronként merőleges élek hossza legyen rendre $AD=a$, $BD=b$, $CD=c$. Ezekkel a feladat feltétele ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$(1) \quad ab+bc=300$$

$$(2) \quad bc+ac=336$$

$$(3) \quad ab+ac=252.$$

Ebből az egyenletrendszerből a merőleges élek páronkénti szorzataira kapjuk, hogy $ac=144$, $ab=108$, $bc=192$. Ebből az egyenletrendszerből kapjuk, hogy $a=9$, $b=12$, $c=16$.

Ha $AB=x$, $BC=y$, $CA=z$, akkor $a^2+b^2=x^2$, $b^2+c^2=y^2$, $c^2+a^2=z^2$.

Elvégezve a megfelelő számolásokat az ABC háromszög oldalhosszaira $x=15$, $y=20$, $z=\sqrt{337}$ adódik.

Az ABC háromszög leghosszabb oldala a BC oldal, ezért vele szemben lesz a legnagyobb szög is. Felírva a koszinusztételt

$$400=225+337-30\sqrt{337}\cos\alpha,$$

ahonnan $\cos\alpha=\frac{162}{30\sqrt{337}}\approx 0,2941$. Így az ABC háromszög legnagyobb szöge: $\alpha\approx 72,89^\circ$.

6. Hány olyan, pozitív egész számokból álló $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$ rendezett számhatos van, amelyre teljesül, hogy $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 5x_6 = 21$?

Megoldás

Mivel $x_i \geq 1$ bármely $i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ esetén, ezért x_6 értéke 1 vagy 2 lehet.

1. Ha $x_6 = 1$, akkor $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 16$. Ebben az esetben $x_4 + x_5$ értéke 2, 3 vagy 4 lehet.

(a) $x_4 + x_5 = 2$, azaz $x_4 = x_5 = 1$. Ekkor $x_1 + x_2 + x_3 = 10$. Ezt az egyenletet $\binom{9}{2} = 36$ pozitív egészekből álló rendezett számhármas elégíti ki. Tehát ebben az esetben ($x_4 = x_5 = x_6 = 1$) 36 rendezett számhatos elégíti ki az egyenletet.

(b) $x_4 + x_5 = 3$, ami kétféleképpen valósulhat meg. Ekkor $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Ez utóbbi egyenletet $\binom{6}{2} = 15$ rendezett számhármas elégíti ki. Így ebben az esetben $2 \cdot 15 = 30$ rendezett számhatos van.

(c) $x_4 + x_5 = 4$, ami háromféleképpen valósulhat meg. Ekkor $x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Ez utóbbi egyenletet 3 rendezett számhármas elégíti ki. Így ebben az esetben $3 \cdot 3 = 9$ rendezett számhatos van.

2. Ha $x_6 = 2$, akkor $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 11$. Ebben az esetben $x_4 + x_5$ értéke csak 2 lehet, és így $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Ezt az egyenletet $\binom{4}{2} = 6$ rendezett számhármas elégíti ki.

Az eredeti egyenletet $36 + 30 + 9 + 6 = 81$ pozitív egészekből álló rendezett számhatos elégíti ki.