Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

9. évfolyam

Döntő

Megoldások

1. Határozzuk meg azt az *n* pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy az első *n* pozitív egész szám összege olyan háromjegyű szám, amelyben minden számjegy egyenlő.

Megoldás

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \overline{xxx} (n \in \mathbb{Z}^+$, *x* pedig egyjegyű pozitív egész)

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111 \cdot x$$

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x$$

ahol az egyenlet bal oldalán két szomszédos egész szám szorzata áll.
Ez pontosan úgy lehetséges, ha $x = 6$ és $n = 36$.

2. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy az $x^2 - 18x + 2kx + k^2 + 3k + 4$ kifejezés teljes négyzet legyen.

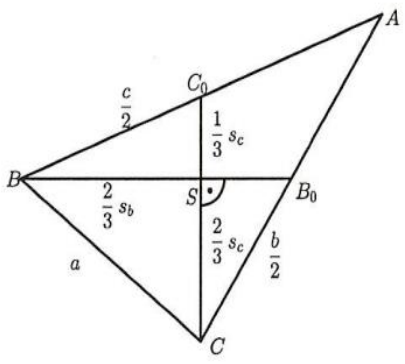
Megoldás

$x^2 - 18x + 2kx + k^2 + 3k + 4 = x^2 + 2x(k-9) + k^2 + 3k + 4$
így $(k-9)^2 = k^2 + 3k + 4$
$k^2 - 18k + 81 = k^2 + 3k + 4$
ahonnan $k = \frac{11}{3}$.

3. Jelölje az ABC háromszögben a, b, c az oldalak, s_a, s_b, s_c pedig a hozzájuk tartozó súlyvonalak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ha s_b és s_c merőlegesek egymásra, akkor $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Megoldás

Tekintsük az ábra jelöléseit, ahol B_0 a b, A_0 pedig az a oldal felezőpontját, S az ABC háromszög súlypontját jelöli. Felírva Pitagorasz tételét az SBC, SB_0C, SC_0B derékszögű háromszögekre:



$\frac{4}{9}s_b^2 + \frac{4}{9}s_c^2 = a^2$, azaz $\frac{4}{9}(s_b^2 + s_c^2) = a^2$,
vagyis $s_b^2 + s_c^2 = \frac{9}{4}a^2$,
$\frac{4}{9}s_c^2 + \frac{1}{9}s_b^2 = \frac{1}{4}b^2$,
$\frac{4}{9}s_b^2 + \frac{1}{9}s_c^2 = \frac{1}{4}c^2$.

Utóbbi kettőt összeadva kapjuk, hogy $\frac{5}{9}s_b^2 + \frac{5}{9}s_c^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$, azaz
$\frac{5}{9}(s_b^2 + s_c^2) = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)$,
ahonnan $\frac{5}{9} \cdot \frac{9}{4}a^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)$,
vagyis $5a^2 = b^2 + c^2$, ami a bizonyítandó volt.

4. Adjuk meg azokat a valós számok halmazán értelmezett elsőfokú függvényeket, amelyekre teljesül az alábbi egyenletrendszer.

$$[f(-1)]^2 + [f(1)]^2 = 50$$
$$[f(-1)]^2 - [f(1)]^2 = 48$$

Megoldás
Legyen a keresett függvény $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ $(a \neq 0)$. Ebbe helyettesítve a feladat feltételeit kapjuk, hogy
$(b - a)^2 + (b + a)^2 = 50$,
$(b - a)^2 - (b + a)^2 = 48$,
ahonnan
$(b + a)^2 = 1$, azaz $b + a = \pm 1$,
$(b - a)^2 = 49$, azaz $b - a = \pm 7$.
A kapott értékek alapján négy egyenletrendszert tudunk fölírni:
$b + a = 1$ és $b - a = 7$ ahonnan $a = -3; b = 4$.
$b + a = 1$ és $b - a = -7$ ahonnan $a = 4; b = -3$.
$b + a = -1$ és $b - a = 7$ ahonnan $a = -4; b = 3$.
$b + a = -1$ és $b - a = -7$ ahonnan $a = 3; b = -4$.
Így a feladat feltételeit négy függvény elégíti ki:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -3x + 4$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x - 3$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -4x + 3$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 4$.

5. *x*, *y* és *z* olyan páronként különböző valós számok, amelyekre teljesül, hogy az *A* és *B* halmazok egyenlők, ahol

$A = \{x + 237;\ x + 501;\ 3x + 729\}$,

$B = \{x - 237;\ 7x + 5y - 637;\ 5x - 7z + 943\}$.

Tekintsük a *B* halmaz üres halmaztól különböző összes részhalmazát, és az egyes részhalmazokban lévő elemek összegét. Adjuk meg ezen összegeknek az összegét.

Megoldás
Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha elemeik ugyanazok.
Ha a *B* halmaz $x - 237$ eleme az *A* halmaz $x + 237$ elemével lenne egyenlő, akkor $x + 237 = x - 237$ egyenletből ellentmondásra jutunk. Ugyanígy nem lehet egyenlő $x - 237$az *A* halmaz $x + 501$-es elemével sem, vagyis
$x - 237 = 3x + 729$, ahonnan $x = -483$,

így az A halmaz elemei:$x + 237 = -246; x + 501 = 18; 3x + 729 = -720.$
Mivel A és B halmaz megegyezik, így $B = \{-246; 18; -720\}$.
Az $\{a; b; c\}$ háromelemű halmaz üres halmaztól különböző részhalmazai:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}$$

így az egyes részhalmazok elemei összegének összege: $4 \cdot (a + b + c)$,
tehát a B halmaz üres halmaztól különböző összes részhalmaza elemei összegének összege: $4 \cdot (-246 + 18 - 720) = -3792$.

6. A 2024-et fölbontottuk néhány természetes szám összegére. Ezeket a természetes számokat köbre emeltük, a köböket összeadtuk, és az így kapott összeget elosztottuk 6-tal. Mennyi lett a 6-tal való osztáskor kapott maradék?

Megoldás
Tudjuk, hogy $n^3 - n$ $(n \in \mathbb{N})$ osztható 6-tal, mivel három egymást követ természetes szám szorzatára bontható, hiszen $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$.
Bontsuk föl 2024-et az alábbi módon természetes számok összegére:

$$2024 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \ (1.)$$

Jelöljük S-sel a tagok köbének összegét, azaz

$$S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 \ (2.)$$

Képezzük (2.) és (1.) különbségét:

$$S - 2024 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

$$S - 2024 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \cdots + (a_n^3 - a_n)$$

Mivel a jobb oldalon minden zárójelben lévő különbség osztható 6-tal, így az az egyenlet jobb oldala és így a bal oldala is osztható 6-tal. Mivel $S - 2024$ osztható 6-tal, ezért S-nek és 2024-nek ugyanaz a 6-tal vett osztási maradéka.
Mivel $2024 = 337 \cdot 6 + 2$, ezért S 6-tal vett osztási maradéka is 2.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

10. évfolyam

Döntő

Megoldások

1. Felírható-e az $\{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 2025\}$ halmaz olyan páronként közös elem nélküli halmazok egyesítéseként, amely halmazok mindegyikében a legkisebb és a legnagyobb elem összege megegyezik a többi elem összegével? A választ indokolni kell!

Megoldás

Nem írható fel.

Legyen egy ilyen halmaz legkisebb eleme x, legnagyobb eleme $y(x, y \in \mathbb{Z}^+)$. Mivel ezek összege $x + y$, ezért a halmaz elemeinek összege: $2(x + y)$, vagyis a halmaz elemeinek összege páros.

Viszont az eredeti halmaz elemeinek összege: $1 + 2 + \cdots + 2025 = \frac{2026 \cdot 2025}{2} = 1013 \cdot 2025$ páratlan.

2. Ha a, b, c egy háromszög oldalhosszai, akkor hány valós megoldása lehet a $c^2x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)x + b^2 = 0$ egyenletnek?

Megoldás

Mivel a, b, c egy háromszög három oldalának hosszát jelöli, így mindhárom pozitív, és érvényes a háromszög-egyenlőtlenség, azaz

$$a + b > c, a + c > b, b + c > a$$

Az egyenlet valós megoldásainak száma az egyenlet diszkriminánsának előjelétől függ, így vizsgáljuk ezt meg.

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4 \cdot c^2 \cdot b^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2cb)^2 =$$
$$= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) \cdot (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) =$$
$$= ((b - c)^2 - a^2) \cdot ((b + c)^2 - a^2) =$$
$$= (b - c - a) \cdot (b - c + a) \cdot (b + c - a) \cdot (b + c + a)$$

A háromszög-egyenlőtlenségből adódó feltételek miatt a négy tényező közül az első negatív (mivel $0 < b < a + c$), a másik három pozitív, így a szorzat, vagyis a másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, tehát a feladatbeli egyenletnek nulla megoldása van a valós számok halmazán.

3. Tekintsük az $f\colon [-75; 125] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x+75} + \sqrt{125-x}$ függvényt. Mely x érték esetén veszi föl f a maximumát és mekkora ez a maximum?

Megoldás
Alkalmazzuk a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést.

$$f(x) = \sqrt{x+75} + \sqrt{125-x} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{x+75+125-x}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{200}{2}} = 20,$$

ahol az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{x+75} = \sqrt{125-x}$, vagyis $x + 75 = 125 - x$, ahonnan $x = 25$.
Vagyis f maximumát az $x = 25$-ben veszi föl, s ennek értéke 20.

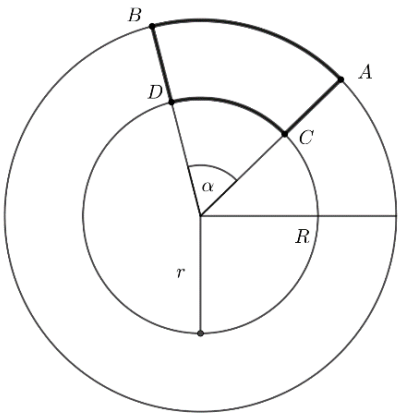
4. Nevezzük az $\overline{abcd}$ négyjegyű pozitív egész számot *„ügyesnek”*, ha teljesül a következő két feltétel: (1) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$; (2) $a + b = c + d$. Hány *ügyes* szám van?

Megoldás
A második feltételt átrendezve kapjuk, hogy$a - d = c - b$.
Ezt és az első feltételt figyelembe véve kapjuk, hogy
$a^2 - d^2 - (c^2 - b^2) = (a-d)(a+d) - (c-b)(c+b) =$
$= (c-b)(a+d) - (c-b)(c+b) = (c-b)(a+d-c-b) = 0.$

Ha $c = b$, akkor a második feltételből következik, hogy $a = d$, azaz a keresett szám $\overline{abba}$ alakú, ahol a és b nem feltétlenül különböző számjegyeket jelöl, és $a \neq 0$.
Ilyen alakú számból $9 \cdot 10 = 90$ van.

Ha $c \neq b$, akkor a szorzat második tényezője 0, azaz $a + d - c - b = 0$. A második feltételt is figyelembe véve:
$a + d = c + b$
$a - d = c - b$
E két egyenletet összeadva majd 2-vel osztva kapjuk, hogy $a = c$, ekkor a feltelek miatt $b = d$, így az $\overline{abab}$ alakú számok is „ügyes” számok. Ekkor mivel $a = c \neq b = d$, ezért $a \neq b$, és $a \neq 0$.
Ilyen alakú számból $9 \cdot 9 = 81$ van.
Összesen tehát $90 + 81 = 171$ „ügyes” szám létezik.

5. Az ábrán egy város térképének egy részlete látható (R és r a két kör sugara). Az A pontból el lehet jutni a B pontba az AB köríven (ez a város egyik körútjának egy darabja), de el lehet jutni úgy is, hogy A-ból elmegyünk a C pontba (a város egyik sugárútja mentén), majd elmegyünk a CD köríven a D pontba, és onnan a város egy másik sugárútja mentén a B pontba.
Ha gépkocsival közlekedünk, akkor az AB, AC és CD útvonalakon 50 $\frac{km}{h}$ maximális sebességgel lehet közlekedni,



míg a BD útvonalon (egy sebességkorlátozás miatt) csak 40 $\frac{km}{h}$ sebességgel. Áron kiszámolta, hogy ha kocsival megy, és mindenütt a megengedett maximális sebességgel halad, akkor abban az esetben, ha az AB „körúti” útvonal helyett az $ACDB$ „kerülő” utat választja, akkor ez utóbbi út kisebb hosszúságú, de hosszabb ideig tart, mint ha az első utat választaná. Mekkora lehet az ábrán α-val jelölt középponti szög, ha tudjuk, hogy fokban mérve egész szám, és Áron számításai helyesek? (Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű, abból a szög nagyságrendjére következtetni nem lehet.)

Megoldás

Legyen α radiánban adott szög. Ekkor az AB körív hossza $R\alpha$, az $ACDB$ út hossza $2(R-r)+r\alpha$. Ez utóbbi út rövidebb hosszúságú:

$$2(R-r)+r\alpha < R\alpha$$

Innen azt kapjuk, hogy $2 < \alpha$. Az AB körív megtételéhez szükséges idő: $\frac{R\alpha}{50}$, az *ACDB* út megtételéhez szükséges idő: $\frac{R-r}{50}+\frac{r\alpha}{50}+\frac{R-r}{40}$. Ez hosszabb idő, mint az előző:

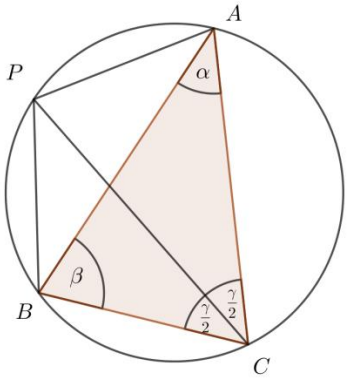
$$\frac{R-r}{50}+\frac{r\alpha}{50}+\frac{R-r}{40} > \frac{R\alpha}{50}$$

Az egyenlőtlenség rendezése után kapjuk: $2{,}25 > \alpha$. Vagyis $2 < \alpha < 2{,}25$, ami azt jelenti, hogy a szög értéke fokban 115°, 116°,… , 128° lehet.

6. Az *ABC* háromszög beírt körének középpontja *O*. Bizonyítsuk be, hogy az *ABO* háromszög körül írt körének középpontja az *ABC* háromszög köré írt kör *C*-t nem tartalmazó *AB* ívének felezőpontja.

Megoldás:

Először lássuk be, hogy az ABC háromszög C-ből induló szögfelezője épp a keresett ívfelező pontban metszi az ABC háromszög körülírt körét!



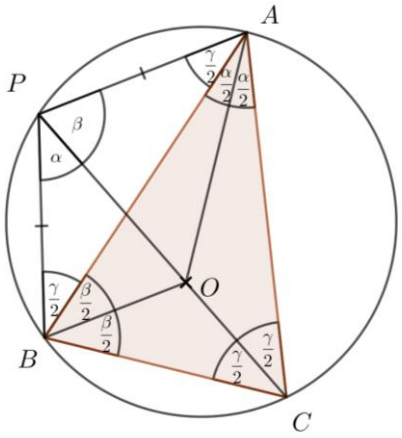
A kerületi szögek tétele miatt az AP és BP ívekhez tartozó kerületi szögek megegyeznek:

$$ABP\angle = ACP\angle = \frac{\gamma}{2} \text{ és } BAP\angle = BCP\angle = \frac{\gamma}{2}$$

Így mivel egyenlő nagyságú kerületi szögekhez egyenlő hosszúságú ívek tartoznak, a P pont valóban az AB ív felezőpontja, vagyis az OP szakasz a CP egyenesen helyezkedik el.

Továbbá, a kerületi szögek tétele miatt az AP és BP ívekhez tartozó kerületi szögek megegyeznek:

$$APC\angle = ABC\angle = \beta \text{ és } CPB\angle = CAB\angle = \alpha$$



$BOP\angle = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, mivel BOC háromszög O-nál levő külső szöge. Így a BOP háromszög egyenlőszárú, tehát $PB = PO = PA$, így az AOB háromszög csúcsa a P középpontú körön helyezkednek el, ami a bizonyítandó állítás.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

11. évfolyam

Döntő

Megoldások

1. Mely p prímszámra igaz, hogy tetszőleges a pozitív egész szám esetén az

$$(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+\ldots+(a+p)^2$$

kifejezés osztható p-vel?

Megoldás

$(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2\ldots+(a+p)^2=$

$=a^2+2\cdot1\cdot a+1^2+a^2+2\cdot2\cdot a+2^2+\cdots+a^2+2\cdot p\cdot a+p^2=$

$=pa^2+2a(1+2+\cdots+p)+1^2+2^2+\cdots+p^2=$

$=pa^2+2a\dfrac{p(p+1)}{2}+\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}=$

$=pa^2+p(p+1)a+\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

Ennek a háromtagú összegnek az első két tagja mindig osztható p-vel.

Ha $p>6$, akkor a harmadik tag is biztosan osztható p-vel.

Ha $p=2$, akkor a harmadik tag $\frac{2\cdot3\cdot5}{6}=5$ nem osztható p-vel.

Ha $p=3$, akkor a harmadik tag $\frac{3\cdot4\cdot7}{6}=14$ nem osztható p-vel.

Ha $p=5$, akkor a harmadik tag $\frac{5\cdot6\cdot11}{6}=55$ osztható p-vel.

Így az eredeti kifejezés minden 3-nál nagyobb p prímszám esetén osztható p-vel.

2. Határozza meg a p pozitív valós szám értékét, úgy, hogy a pozitív számok halmazán értelmezett $f(x)=\frac{x^2+p^2}{x}$ függvény az $x=2\sqrt{3}$ helyen vegye föl a legkisebb értékét. Mekkora ez a legkisebb érték?

Megoldás

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$\frac{f(x)}{2}=\frac{x+\frac{p^2}{x}}{2}\geq\sqrt{p^2}=|p|=p$ (mivel $p>0$),

így $f(x)\geq2p$ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{p^2}{x}$, azaz $x^2=p^2$. Így, mivel $x>0$, $x=p$. Tehát az f akkor veszi föl minimumát az $x=2\sqrt{3}$ helyen, ha $p=2\sqrt{3}$.

Ekkor f értéke $f\left(2\sqrt{3}\right)=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\sqrt{3}}=\frac{24}{2\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{6}=4\sqrt{3}$.

3. Az *ABC* háromszögben az *ACB* szög 60°-os. A háromszög oldalainak mérőszámai olyan pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy $AB + AC = 5 \cdot BC$. Milyen hosszúak lehetnek a háromszög oldalai? Lehet-e 2025 a kerülete egy ezen feltételeknek megfelelő háromszögnek?

Megoldás

Felírva a koszinusztételt a háromszög c oldalára:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 60° = a^2 + b^2 - ab.$

A feladat feltételét átrendezve kapjuk, hogy $c = 5a - b$, amit a koszinusztételbe helyettesítve kapjuk, hogy:

$(5a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab.$

$25a^2 - 10ab + b^2 = a^2 + b^2 - ab.$

$24a^2 - 9ab = 0$

$3a(8a - 3b) = 0$

Mivel $a \neq 0$, ezért $a = \frac{3}{8}b.$

Mivel $c = 5a - b$, ezért $c = \frac{15b}{8} - b = \frac{7}{8}b.$

Így a háromszög oldalaira azt kapjuk, hogy $a = \frac{3}{8}b; b;\ c = \frac{7}{8}b$. Ezek minden pozitív egész b esetén lehetnek háromszög oldalai, hiszen

$$a + b = \frac{11}{8}b > \frac{7}{8}b = c$$

$$a + c = \frac{10}{8}b > b$$

$b + c = \frac{15}{8}b > \frac{3}{8}b = a.$

Mivel a háromszög oldalainak mérőszámai egészek, így b értékének oszthatónak kell lennie 8-cal, azaz $a = 3k; b = 8k; c = 7k\ (k \in \mathbb{Z}^+)$.

Ekkor a háromszög kerülete $18k$. Mivel 2025 nem osztható 18-cal, így a feltételeknek megfelelő háromszögek között nincs olyan, amelynek a kerülete 2025.

4. Mely a valós szám esetén van az

$$f:\ ]0;\ 6[\setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \log_x \frac{6-x}{x} - (\lg\lg a - 1) \cdot \log_x 10$$

függvénynek pontosan egy zérushelye?

Megoldás

$$1 + \log_x \frac{6-x}{10} - (\lg\lg a - 1) \cdot \log_x 10 = 0$$

Áttérve 10-es alapú logaritmusra: $1 + \frac{\lg\frac{6-x}{10}}{\lg x} - (\lg\lg a - 1) \cdot \frac{1}{\lg x} = 0 \quad / \cdot \lg x$

$$\lg x + \lg\frac{6-x}{10} - (\lg\lg a - \lg 10) = 0$$

$$\lg\frac{6x - x^2}{10} = \lg\frac{\lg a}{10}$$

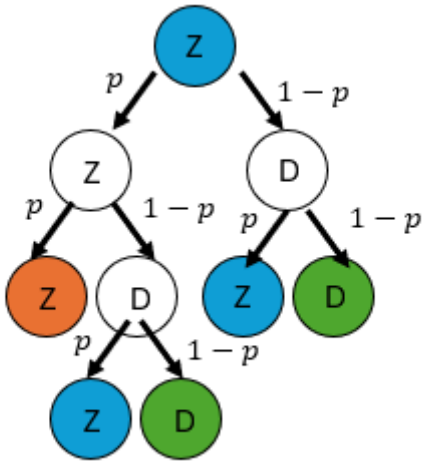
A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt:

$\frac{6x-x^2}{10} = \frac{\lg a}{10}$, ahonnan $x^2 - 6x + \lg a = 0.$

Akkor lesz csak 1 zérushely, ha a bal oldalon teljes négyzet áll:
$(x-3)^2 - 9 + \lg a = 0$
Ez csak akkor következik be, ha
$\lg a = 9$
Ami a logaritmus definíciója alapján $a = 10^9$ esetén teljesül.

5. Detti és Zalán egymás ellen teniszeznek. Egy szett kimenetelét tekinthetjük véletlen eseménynek, amely *p* valószínűséggel Zalán győzelmével zárul. Azt beszélték meg, hogy addig játszanak, amíg Detti nyer 2 szettet egymás után (ekkor Detti nyeri a mérkőzést), vagy Zalán nyer 3 szettet egymás után (ekkor Zalán nyeri a mérkőzést). Mekkora *p* értéke, ha tudjuk, hogy Detti 0,6 valószínűséggel nyeri a mérkőzést abban az esetben, ha az első szettet Zalán nyeri?

Megoldás



Jelölje $P(D)$ annak a valószínűségét, hogy Detti nyeri a mérkőzést az elvesztett első szett után. Az ábrán látható fagráf pontjaiba a szett győztesét, éleire annak valószínűségét írtuk, hogy az adott szett úgy végződik. A kezdeti pontból, és minden kékre színezett helyzetből indulva Detti $P(D)$ valószínűséggel nyer. Detti még a zöldre színezett helyzeteket elérve győz, a narancssárga végéllásnál veszít. A gráf alapján $P(D)$-re a következő egyenlet adódik:

$$P(D) = p(1-p)p \cdot P(D) + p(1-p)^2 + (1-p)p \cdot P(D) + (1-p)^2$$

Kihasználva, hogy $P(D) = 0{,}6$, az egyenletet 5-tel megszorozva, majd rendezve az alábbi harmadfokú egyenletet kapjuk:

$$2p^3 - 5p^2 - 2p + 2 = 0$$

A $]0;1[$ intervallumban az egyenlet egyetlen lehetséges racionális gyöke, az $\frac{1}{2}$ valóban gyök. Így ennek segítségével, vagy a következő módon szorzattá alakítható a bal oldal:

$$2p(p^2 - 2p - 2) - p^2 + 2p + 2 = (2p-1)(p^2 - 2p - 2)$$

A $p^2 - 2p - 2 = 0$ egyenletnek nincsenek a $]0;1[$ intervallumban megoldásai ($1-\sqrt{3}$ és $1+\sqrt{3}$), így a feladat egyedüli megoldása a $p = 0{,}5$.

6. Pisti azt állítja, hogy lehet rajzolni olyan konvex négyszöget, amely nem deltoid és nem is trapéz, de van két egyenlő hosszú oldala, az átlói pedig merőlegesek egymásra és azonos hosszúságúak. Igaza van-e Pistinek? A választ indokolni kell!

Megoldás

Vegyünk egy konvex négyszöget, amelynek van két egyenlő hosszú oldala, az átlói pedig merőlegesek egymásra és mindkettő „a” hosszúságú. Mivel az átlók merőlegesek, ezért a négyszög elhelyezhető egy koordinátarendszerben úgy, hogy a csúcsai a következők legyenek: $A(x;0), B(0;y), C(-(a-x);0), D(0;-(a-y))$, így mindkét átló hossza "a" lesz, és mindkettő a tengelyeken „fekszik”. A négyszög oldalainak hossza:

$$AB = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$BC = \sqrt{(a-x)^2+y^2}$$
$$CD = \sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}$$
$$DA = \sqrt{(a-y)^2+x^2}$$

Ha két szomszédos oldal hossza egyenlő, pl. $AB = BC$, akkor az alábbit kapjuk:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(a-x)^2+y^2}$$

Innen $x = a - x$, ami viszont azt jelenti, hogy $CD = DA$, vagyis a másik két szomszédos oldal is egyenlő hosszú, tehát a négyszög egy deltoid.

Ha két szemközti oldal hossza egyenlő, pl. $AB = CD$, akkor az alábbit kapjuk:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}$$

Négyzetre emelés, zárójel-felbontás és rendezés után a következőt kapjuk:

$$0 = 2a^2 - 2ax - 2ay$$

Innen $a = x + y$, ami azt jelenti, hogy az a két derékszögű háromszög, amelynek átfogói BCés DA, egyenlőszárú derékszögű háromszögek. Tehát BC és DA 45°-os szöget zárnak be az x tengellyel, ezért egymással párhuzamosak, vagyis az $ABCD$ négyszög trapéz.

Pistinek nincs igaza, a négyszögnek deltoidnak vagy trapéznak kell lennie.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

12. évfolyam

Döntő

Megoldások

1. Az $ax^2+bx+c=0$ egyenletben *a*, *b*, *c* 0-tól különböző valós számok, és az egyenletnek van valós gyöke. Tudjuk továbbá, hogy ha az egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor

(1) $a=x_1^2+x_2^2$;

(2) $b=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$;

(3) $c=\frac{1}{x_1+x_2}$.

Határozzuk meg az egyenlet gyökeit.

Megoldás

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján a három feltétel három egyenletet szolgáltat a másodfokú egyenlet gyökeire.

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$, így (1) alapján

$$\frac{b^2-2ac}{a^2}=a.$$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{b}{c}$, így (2) alapján

$$-\frac{b}{c}=b.$$

$\frac{1}{x_1+x_2}=-\frac{a}{b}$, így (3) alapján

$$-\frac{a}{b}=c.$$

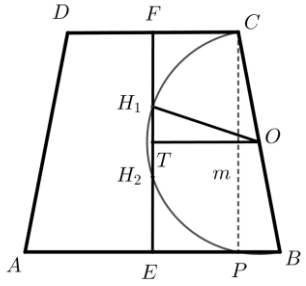
A második egyenletből azonnal kapjuk, hogy $c=-1$. Ezt a harmadik egyenletbe helyettesítve $a=b$ adódik. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve átrendezés és egyszerűsítés után *a*-ra az $a^2-a-2=0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $a_1=-1$ vagy $a_2=2$.

Két másodfokú egyenletet kapunk így: $-x^2-x-1=0$ és $2x^2+2x-1=0$. Az első egyenletnek viszont nincs valós gyöke, ezért nem felel meg a feladat feltételének. A második egyenlet gyökei: $x_1=-1-\sqrt{3}$, $x_2=-1+\sqrt{3}$.

2. Az *ABCD* húrtrapézban az alapok: $AB=12$, $CD=8$. Jelölje *E* az *AB*, *F* pedig a *CD* szakasz felezőpontját. Az *EF* szakasz harmadolópontjaiból a szárak derékszögben látszanak. Mekkora a trapéz területe?

Megoldás

A trapéz területének meghatározásához a magasság meghatározására van szükségünk.
A továbbiakban az ábra jelöléseit használjuk.



Az a tény, hogy a H_1 és H_2 pontokból a szárak derékszögben látszanak azt jelenti, hogy ezek a harmadolópontok illeszkednek a szárak mint átmérők fölé írt Thalész-körökre.

A *CPB* derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $BC^2=2^2+m^2$ (1).

Ha *T* az *EF* (és egyben a H_1H_2) szakasz felezőpontja, akkor a tengelyes szimmetriából, és a trapéz középvonalára vonatkozó összefüggésből adódóan $OT=\frac{1}{2}\cdot\frac{8+12}{2}=5$.

A H_1TO derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele: $\left(\frac{BC}{2}\right)^2=5^2+\left(\frac{m}{6}\right)^2$, ahonnan alkalmas átalakításokkal $BC^2=100+\frac{m^2}{9}$ (2).

(1) és (2) összevetéséből kapjuk, hogy $m=6\sqrt{3}$.

Így a trapéz területe: $T=\frac{8+12}{2}\cdot 6\sqrt{3}=60\sqrt{3}$.

3. Az $\{a_n\}$ számtani, a $\{b_n\}$ mértani sorozat a következő tulajdonságokkal:

(1) mindkét sorozat tagjai pozitív egész számok;

(2) $a_1=b_1=1$ és $a_3=b_3\neq 1$;

(3) a $\{b_n\}$ mértani sorozat *q* hányadosára $5<q<10$.

Mely pozitív egész *n* esetén lesz $a^n_{4n+1}=b_{4n+1}$?

Megoldás

Ha *d* jelöli az $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciáját, akkor (2) alapján $1+2d=q^2\neq 1$ (*).

Ha valamely pozitív egész *n* esetén $a^n_{4n+1}=b_{4n+1}$, akkor $(1+4nd)^n=q^{4n}$, ahonnan

$$1+4nd=q^4.$$

Felhasználva, hogy $1+2d=q^2$, kapjuk, hogy $1+4nd=14d+4d^2$, vagyis, mivel (2) alapján $d\neq 0$, ezért

$$n=1+d\,.$$

Mivel $5<q<10$ és (*) miatt q páratlan, ezért $q=7$ vagy $q=9$.

Ha $q=7$, akkor (*) alapján $d=24$, ha pedig $q=9$, akkor $d=40$.

Így két megfelelő pozitív egész n esetén lesz $a^n_{4n+1}=b_{4n+1}$: $n=25$ vagy $n=41$.

4. Egy szabályos n-szög alapú egyenes hasáb csúcsait három színnel szeretnénk színezni úgy, hogy mindegyik csúcs esetén a belőle kifutó három él másik végpontjai páronként különböző színűek legyenek. Mutassuk meg, hogy ez akkor és csak akkor valósítható meg, ha n osztható 3-mal.

Megoldás (a II. forduló 6 feladata volt)

Legyen a három szín piros, sárga, zöld.

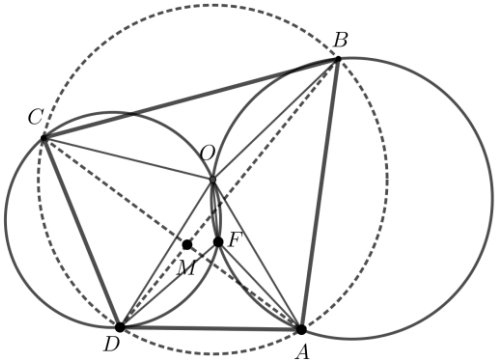
Ha n 3-mal osztható, akkor az alaplap csúcsait színezzük valahonnan kezdve pozitív körüljárás szerint egymás után piros-sárga-zöld színűre periodikusan. Ugyanígy színezzük ki a fedőlapot is, az oldaléllel összekötött csúcsok azonos színűek legyenek. Könnyen látható, hogy ez a színezés megfelel a feltételnek.

A megfordítás bizonyítása végett tegyük fel, hogy a hasáb csúcsait sikerült a feltételnek megfelelően megszínezni. Legyen a piros csúcsok száma p. Minden piros csúcsnak van három szomszédja (három csúcs, amit az adott csúccsal él köt össze), ezért $3p$ darab csúcsnak van piros szomszédja. Mivel minden csúcsnak pontosan egy piros szomszédja van, ezért a csúcsok száma $3p$. A csúcsok száma másrészt $2n$, így $3p=2n$. Mivel 2 és 3 relatív prímek, és 3 osztója $2n$-nek, ezért 3 osztója n-nek is, és ezt akartuk bizonyítani.

5. Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör középpontja O. Az ABO és CDO háromszögek köré írt köreinek O-tól különböző metszéspontja F. Igazoljuk, hogy az A, F és D pontokra illeszkedő kör illeszkedik az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontjára is.

Megoldás

A jelölések az ábrának megfelelőek. Legyen $DAC\sphericalangle=\alpha$ és $BDA\sphericalangle=\delta$.



A kerületi és középponti szögek tétele miatt $DOA\sphericalangle=2\alpha$, és mivel $CO=OD$, ezért $OCD\sphericalangle=90°-\alpha$. Így a húrnégyszögek tétele értelmében $OFD\sphericalangle=90°+\alpha$. Hasonló indoklással adódik, hogy $OFA\sphericalangle=90°+\delta$.

A fentiekből adódik, hogy $AFD\sphericalangle = 180° - \alpha - \delta$.
Az *AMD* háromszögben $DAM\sphericalangle = \alpha$ és $MDA\sphericalangle = \delta$, így $AMD\sphericalangle = 180° - \alpha - \delta$.
Az utóbbi két megállapítás azt jelenti, hogy az *AD* szakasz az *F* és *M* pontokból ugyanakkora szögben látszik, azaz az *AFMD* négyszög húrnégyszög, ami a feladat állítását bizonyítja.

6. Egy *n*-oldalú konvex sokszöget néhány átlójával felosztottuk háromszögekre úgy, hogy a sokszög egyetlen belső pontjára sem illeszkedik három vagy annál több átló. Legfeljebb hány háromszögre oszthattuk a sokszöget?

Megoldás
A felbontás során keletkezett háromszögek négyfélék lehetnek aszerint, hogy 3, 2, 1 vagy 0 csúcsuk csúcsa a sokszögnek is.
Előbb belátjuk, hogy az utóbbi két eset nem lehetséges. Tegyük fel, hogy az *ABC* háromszög a felbontás egyik háromszöge, és a *B* és *C* csúcsa a sokszög belsejében van. Az *ABC* háromszög *B* és *C* csúcsánál levő külső szögeinek összege a háromszög külső szögeire vonatkozó tételből adódóan nagyobb 180°-nál, ezért a *BC* oldalnak az *ABC* háromszöggel átellenes oldalán létrejövő háromszöghöz kellene legalább egy, a *B* vagy a *C* csúcsra illeszkedő egyenes. Ilyen egyenes viszont nincs, hiszen ha lenne, akkor lenne olyan belső pont, amelyre legalább három egyenes illeszkedne.
A három sokszögcsúcsú háromszögek oldalai a sokszög oldalai illetve átlói lehetnek. A két sokszögcsúcsú háromszögek négyesével lépnek fel, nevezetesen a sokszög négy csúcsa által meghatározott konvex négyszög átlói hozzák létre őket.
Ha van két szomszédos (egy oldalában közös) három sokszögcsúcsú háromszögünk, akkor egy átló hozzáadásával négy darab két sokszögcsúcsú háromszöget kaphatunk. Ha van két, négyszögekkel elválasztott, három sokszögcsúcsú háromszögünk, akkor az egyik ilyen háromszöget „vihetjük a másik felé” úgy, hogy a közbeeső négyszögekkel egyenként cseréljen helyet, amíg a másik három sokszögcsúcsú háromszöggel szomszédos nem lesz.
A fentiekből következik, hogy az előző bekezdésben leírt két átalakítással véges sok lépésben növelhetjük a felbontásbeli háromszögek számát addig, míg a legkevesebb, azaz 1 vagy 0 három sokszögcsúcsú háromszögünk lesz.
Így, ha $n = 2k$, akkor a felbontásbeli háromszögek mind két sokszögcsúcsúak. Ekkor a sokszöget fel tudjuk bontani $k-1$ darab négyszögre, ezért ebben az esteben a háromszögek száma $4k-4$.
Ha $n = 2k+1$, akkor a felbontásbeli háromszögek között egy darab három sokszögcsúcsú háromszög lesz. Könnyen meggondolható, hogy ekkor a háromszögek száma $4k-3$.