

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS SZÁMELMÉLETI TÉTELÉRŐL; ERGODELMÉLET VS. RAMSEY TÉTELEK

N. Hegyvári

Eötvös/Rényi

2025.02,21.

Szeged, Bolyai Intézet

Az 1970-es évektől igen gyümölcsözően használható kombinatorikus számelméletben az ergodelmélet, melyet H. Fürstenberg, V. Bergelson és mások indítottak el.

Nevezetes tétel

TÉTEL [Fürstenberg; Szemerédi tétel második bizonyítása]

Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ sorozat felső sűrűsége pozitív, akkor A tetszőleges hosszú számtani sorozatot tartalmaz

Az előadásban egy Bergelsontól származó tétel nem ergodelméleti bizonyításáról lesz szó...

Az 1970-es évektől igen gyümölcsözően használható kombinatorikus számelméletben az ergodelmélet, melyet H. Fürstenberg, V. Bergelson és mások indítottak el.

Nevezetes tétel

TÉTEL [Fürstenberg; Szemerédi tétel második bizonyítása]

Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ sorozat felső sűrűsége pozitív, akkor A tetszőleges hosszú számtani sorozatot tartalmaz

Az előadásban egy Bergelsontól származó tétel nem ergodelméleti bizonyításáról lesz szó...

... és egy gráfelméleti tételről, amely alkalmazható a számelméletben.

ELŐZMÉNYEK

TÉTEL[Erdős-Sárközy] Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ és

$$\bar{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} > 0$$

($A(n) = |A \cap [1, n]|$). Ekkor $A - A$ halmaz korlátos hézagú

KÖVETKEZMÉNY: $A - A$ tetszőleges számtani sorozatot tartalmaz.

Az $D(A) = A - A$ halmazról sok kérdést lehet felvetni

ELŐZMÉNYEK

TÉTEL[Erdős-Sárközy] Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ és

$$\overline{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} > 0$$

($A(n) = |A \cap [1, n]|$). Ekkor $A - A$ halmaz korlátos hézagú

KÖVETKEZMÉNY: $A - A$ tetszőleges számtani sorozatot tartalmaz.

Az $D(A) = A - A$ halmazról sok kérdést lehet felvetni

DEFINÍCIÓ: *Bohr halmaz*

ELŐZMÉNYEK

TÉTEL[Erdős-Sárközy] Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ és

$$\overline{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} > 0$$

($A(n) = |A \cap [1, n]|$). Ekkor $A - A$ halmaz korlátos hézagú

KÖVETKEZMÉNY: $A - A$ tetszőleges számtani sorozatot tartalmaz.

Az $D(A) = A - A$ halmazról sok kérdést lehet felvetni

DEFINÍCIÓ: *Bohr halmaz*

$$B(S, \varepsilon) = \{m \in \mathbb{Z} : \max_{s \in S} \|sm\| < \varepsilon\}$$

ELŐZMÉNYEK

TÉTEL[Erdős-Sárközy] Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ és

$$\overline{d}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} > 0$$

($A(n) = |A \cap [1, n]|$). Ekkor $A - A$ halmaz korlátos hézagú

KÖVETKEZMÉNY: $A - A$ tetszőleges számtani sorozatot tartalmaz.

Az $D(A) = A - A$ halmazról sok kérdést lehet felvetni

DEFINÍCIÓ: *Bohr halmaz*

$$B(S, \varepsilon) = \{m \in \mathbb{Z} : \max_{s \in S} \|sm\| < \varepsilon\}$$

$$(\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|)$$

1. TÉTEL (Bogolyubov) Tegyük fel, hogy $\overline{d}(A) > 0$. Minden $\varepsilon > 0$ létezik $B(S, \varepsilon)$, hogy

$$B(S, \varepsilon) \subset D(DA) = A - A + A - A$$

1.TÉTEL (Bogolyubov) Tegyük fel, hogy $\overline{d}(A) > 0$. Minden $\varepsilon > 0$ létezik $B(S, \varepsilon)$, hogy

$$B(S, \varepsilon) \subset D(DA) = A - A + A - A$$

2.TÉTEL (Kříž) Van olyan A , $\overline{d}(A) > 0$, hogy $D(A) = A - A$ nem tartalmaz Bohr-halmazt.

1.TÉTEL (Bogolyubov) Tegyük fel, hogy $\overline{d}(A) > 0$. Minden $\varepsilon > 0$ létezik $B(S, \varepsilon)$, hogy

$$B(S, \varepsilon) \subset D(DA)) = A - A + A - A$$

2.TÉTEL (Kříž) Van olyan A , $\overline{d}(A) > 0$, hogy $D(A) = A - A$ nem tartalmaz Bohr-halmazt.

3.TÉTEL (Følner). Ha $\overline{d}(A) > 0$, akkor létezik B Bohr-halmaz, hogy $B \setminus (A - A)$ nulla sűrűségű.

BERGELSON TÉTELE

TÉTEL

Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$, $\overline{d}(A) > 0$.

BERGELSON TÉTELE

TÉTEL

Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$, $\overline{d}(A) > 0$. Bármely k pozitív egészhez létezik végtelen B halmaz, melyre

$$A - A \supseteq B + B + \cdots + B,$$

(k tagú összeg)

BERGELSON TÉTELE

TÉTEL

Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$, $\overline{d}(A) > 0$. Bármely k pozitív egészhez létezik végtelen B halmaz, melyre

$$A - A \supseteq B + B + \cdots + B,$$

(k tagú összeg)

A bizonyítás ergodelméleti.

BERGELSON TÉTELE

TÉTEL

Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$, $\overline{d}(A) > 0$. Bármely k pozitív egészhez létezik végtelen B halmaz, melyre

$$A - A \supseteq B + B + \cdots + B,$$

(k tagú összeg)

A bizonyítás ergodelméleti.

KÖVETKEZMÉNY: $A - A$ tetszőleges hosszú számtani sorozatot tartalmaz.

III. BIZONYÍTÁS; FÖLNER TÉTEL

III. BIZONYÍTÁS; FÖLNER TÉTEL

DEFINÍCIÓ:

Legyen $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ és $C \subseteq \mathbb{N}$; $C \neq \emptyset$.

$$FS_f(C) := \left\{ \sum_{c_i \in X} w_i c_i : X \subseteq C, |X| < \infty; w_i \in [1, f(i)] \cap \mathbb{N} \right\}.$$

Továbbá

$$FP(C) := \left\{ \prod_{c_i \in X} c_i : X \subseteq C; X \neq \emptyset, |X| < \infty \right\}.$$

III. BIZONYÍTÁS; FÖLNER TÉTEL

DEFINÍCIÓ:

Legyen $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ és $C \subseteq \mathbb{N}$; $C \neq \emptyset$.

$$FS_f(C) := \left\{ \sum_{c_i \in X} w_i c_i : X \subseteq C, |X| < \infty; w_i \in [1, f(i)] \cap \mathbb{N} \right\}.$$

Továbbá

$$FP(C) := \left\{ \prod_{c_i \in X} c_i : X \subseteq C; X \neq \emptyset, |X| < \infty \right\}.$$

TÉTEL[H.-Ruzsa] Legyen $A \subset \mathbb{N}$, tegyük fel, hogy $\overline{d}(A) > 0$. Legyen $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ Ekkor létezik egy végtelen $C \subset \mathbb{N}$, hogy o

$$A - A \supseteq FS_f(C) \cup FP(C).$$

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ az $A(x)$ számláló függvényt definiáljuk az

$$A(x) = \sum_{a \in A; |a| \leq x} 1$$

segítségével.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ az $A(x)$ számláló függvényt definiáljuk az

$$A(x) = \sum_{a \in A; |a| \leq x} 1$$

segítségével.

Az A halmaz felső sűrűsége legyen $\overline{d}(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ az $A(x)$ számláló függvényt definiáljuk az

$$A(x) = \sum_{a \in A; |a| \leq x} 1$$

segítségével.

Az A halmaz felső sűrűsége legyen $\overline{d}(A) = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$.

TÉTEL[H] Legyen $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ és tegyük fel, hogy $\overline{d}(A) = \gamma > 0$. Ekkor bármely $M \in \mathbb{N}$ esetén létezik egy végtelen $B \subseteq \mathbb{Z}^n$, hogy

$$A - A \supseteq B \hat{+} B \hat{+} \dots \hat{+} B = \hat{M}B,$$

ahol $\hat{+}$ azt az összeadást jelenti, ahol az összeadandók páronként különbözőek

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Tekintsük az $\{x_i\}_{i=1}^{M^n}$; $\underline{x}_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$; $0 \leq x_{ij} \leq M-1$ vektorokat. Azt mondjuk, hogy

$$\underline{u} \equiv \underline{v} \pmod{M}$$

akkor és csak akkor, ha minden $1 \leq j \leq n$ esetén

$$u_j \equiv v_j \pmod{M}.$$

Az A halmaz elemeit beosztjuk aszerint, hogy az M hosszú hiperkocka mely pontjával kongruensek. Azaz legyen

$$A_i := \{\underline{a} \in A : \underline{a} \equiv \underline{x}_i \pmod{M}\}; \quad 1 \leq i \leq M^n.$$

Ekkor valamely i -re nyilván teljesül, hogy $\overline{d}(A_i) = \rho > 0$.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Legyen

$$A' = A_i - \underline{x}_i \subseteq L := \{\underline{u} : \underline{u} \equiv \underline{0} \pmod{M}\}.$$

Mivel

$$A' - A' = (A_i - \underline{x}_i) - (A_i - \underline{x}_i) = A_i - A_i \subseteq A - A,$$

ezért elég lesz $A' - A'$ -ben keresni nagy összeghalmazt.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Legyen

$$A' = A_i - \underline{x}_i \subseteq L := \{\underline{u} : \underline{u} \equiv \underline{0} \pmod{M}\}.$$

Mivel

$$A' - A' = (A_i - \underline{x}_i) - (A_i - \underline{x}_i) = A_i - A_i \subseteq A - A,$$

ezért elég lesz $A' - A'$ -ben keresni nagy összeghalmazt.

LEMMA: Legyen $X \subset \mathbb{Z}^n$. Tegyük fel, hogy $\overline{d}(X) = \mu > 0$. Ekkor létezik egy véges U halmaz, melyre $U + (X - X) \supseteq \mathbb{Z}^n$.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

A lefedési lemma miatt, mivel $\overline{d}(A_i) = \rho > 0$, létezik egy $U \subseteq \mathbb{Z}^n$, hogy

$$A' - A' + U = \mathbb{Z}^n,$$

továbbá $s := |U| \leq \frac{2}{\rho}$.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

A lefedési lemma miatt, mivel $\overline{d}(A_i) = \rho > 0$, létezik egy $U \subseteq \mathbb{Z}^n$, hogy

$$A' - A' + U = \mathbb{Z}^n,$$

továbbá $s := |U| \leq \frac{2}{\rho}$.

Legyen χ a $\mathbb{Z}^n$ összes M -esének egy s -színeezése, azaz legyen:

$$\chi : (\mathbb{Z}^n)^M \mapsto \{1, 2, \dots, s\},$$

és színezzünk egy M -est az i -edik színre,

$$\chi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_M) = i,$$

ha

$$\underline{x}_i \hat{+} \underline{x}_i \hat{+} \dots \hat{+} \underline{x}_i \in A' - A' + \underline{u}_i.$$

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

(A színezés nem feltétlenül egyértelmű, ha több eltoltban is benne van, válasszuk a legkisebb i -t.)

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

(A színezés nem feltétlenül egyértelmű, ha több eltoltban is benne van, válasszuk a legkisebb i -t.)

Ismeretes, hogy egy megszámlálható halmaz M -eseinek az s színezései esetén létezik egy végtelen monokromatikus részhalmaz, azaz olyan, amelynek bármely M -ese egyszínű (ez az ú.n. végtelen Ramsey-tétel).

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

(A színezés nem feltétlenül egyértelmű, ha több eltoltban is benne van, válasszuk a legkisebb i -t.)

Ismeretes, hogy egy megszámlálható halmaz M -eseinek az s színezései esetén létezik egy végtelen monokromatikus részhalmaz, azaz olyan, amelynek bármely M -ese egyszínű (ez az ú.n. végtelen Ramsey-tétel).

Azaz létezik egy i és egy $B' \subseteq \mathbb{Z}^n$ végtelen halmaz, hogy bármely $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_M\} \in B'^M$ halmazra

$$\underline{x}_i \hat{+} \underline{x}_i \hat{+} \dots \hat{+} \underline{x}_i \in A' - A' + \underline{u}_i.$$

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

(A színezés nem feltétlenül egyértelmű, ha több eltoltban is benne van, válasszuk a legkisebb i -t.)

Ismeretes, hogy egy megszámlálható halmaz M -eseinek az s színezései esetén létezik egy végtelen monokromatikus részhalmaz, azaz olyan, amelynek bármely M -ese egyszínű (ez az ú.n. végtelen Ramsey-tétel). Azaz létezik egy i és egy $B' \subseteq \mathbb{Z}^n$ végtelen halmaz, hogy bármely $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_M\} \in B'^M$ halmazra

$$\underline{x}_i \hat{+} \underline{x}_i \hat{+} \dots \hat{+} \underline{x}_i \in A' - A' + \underline{u}_i.$$

Végül legyen

$$B := B' - \frac{\underline{u}_i}{M}.$$

Jegyezzük meg, hogy $B \subseteq \mathbb{Z}^n$, mivel $\underline{u}_i \equiv \underline{0} \pmod{M}$.

KOMBINATORIKUS BIZONYÍTÁS

Így

$$\begin{aligned} A' - A' + \underline{u}_i &\supseteq B' \hat{+} B' \hat{+} \dots \hat{+} B' = \hat{M}B' = \\ &= \left(B + \frac{\underline{u}_i}{M}\right) \hat{+} \left(B + \frac{\underline{u}_i}{M}\right) \dots \hat{+} \left(B + \frac{\underline{u}_i}{M}\right) = \hat{M} \left(B + \frac{\underline{u}_i}{M}\right) = \hat{M}B + \underline{u}_i. \end{aligned}$$

Ezért

$$A' - A' \supseteq B \hat{+} B \hat{+} \dots \hat{+} B = \hat{M}B. \quad \square$$

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

A LEMMA BIZONYÍTÁSA: Vegyünk $\mathbb{Z}^n$ -ből egy olyan maximális U kollekciót, amelyre ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $u_1 \neq u_2$, esetén

$$(u_1 + X) \cap (u_2 + X) = \emptyset$$

teljesül.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

A LEMMA BIZONYÍTÁSA: Vegyünk $\mathbb{Z}^n$ -ből egy olyan maximális U kollekciót, amelyre ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $u_1 \neq u_2$, esetén

$$(u_1 + X) \cap (u_2 + X) = \emptyset$$

teljesül. Ekkor U véges pl. $|U| < 2/\mu$.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

A LEMMA BIZONYÍTÁSA: Vegyünk $\mathbb{Z}^n$ -ből egy olyan maximális U kollekciót, amelyre ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $u_1 \neq u_2$, esetén

$$(u_1 + X) \cap (u_2 + X) = \emptyset$$

teljesül. Ekkor U véges pl. $|U| < 2/\mu$.

Valóban, létezik x , hogy $|X \cap G_z| > \frac{3}{4}\mu \text{vol}(G_z)$ (G_z a z sugarú gömb).

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

A LEMMA BIZONYÍTÁSA: Vegyünk $\mathbb{Z}^n$ -ből egy olyan maximális U kollekciót, amelyre ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $u_1 \neq u_2$, esetén

$$(u_1 + X) \cap (u_2 + X) = \emptyset$$

teljesül. Ekkor U véges pl. $|U| < 2/\mu$.

Valóban, létezik x , hogy $|X \cap G_z| > \frac{3}{4}\mu \text{vol}(G_z)$ (G_z a z sugarú gömb).

Így bármely k diszjunkt eltolt esetén

$$k \frac{3}{4} \mu \text{vol}(G_z) < \text{vol}(G_{z+u_{\max}}) \leq \text{vol}(G_z) + \text{vol}(G_{u_{\max}}).$$

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

A LEMMA BIZONYÍTÁSA: Vegyünk $\mathbb{Z}^n$ -ből egy olyan maximális U kollekciót, amelyre ha $u_1, u_2 \in U$, akkor $u_1 \neq u_2$, esetén

$$(u_1 + X) \cap (u_2 + X) = \emptyset$$

teljesül. Ekkor U véges pl. $|U| < 2/\mu$.

Valóban, létezik x , hogy $|X \cap G_z| > \frac{3}{4}\mu \text{vol}(G_z)$ (G_z a z sugarú gömb).

Így bármely k diszjunkt eltolt esetén

$$k \frac{3}{4} \mu \text{vol}(G_z) < \text{vol}(G_{z+u_{\max}}) \leq \text{vol}(G_z) + \text{vol}(G_{u_{\max}}).$$

Ebből

$$k \leq \frac{4}{3\mu} \left(1 + \frac{\text{vol}(G_{u_{\max}})}{\text{vol}(G_z)} \right) \leq \frac{2}{\mu},$$

ha z elég nagy.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

ÁLLÍTÁS: $U + (X - X) \supseteq \mathbb{Z}^n$.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

ÁLLÍTÁS: $U + (X - X) \supseteq \mathbb{Z}^n$.

Ha létezne $v \in \mathbb{Z}^n$, $v \notin U + (X - X)$, akkor bármely $u \in U$; $x, x' \in X$
 $v \neq u + x - x'$, vagy másként $v + x' \neq u + x$, azaz

$$(v + X) \cap (U + X) = \emptyset,$$

ellentmondásban U maximalitásával.

A LEMMA BIZONYÍTÁSA

ÁLLÍTÁS: $U + (X - X) \supseteq \mathbb{Z}^n$.

Ha létezne $v \in \mathbb{Z}^n$, $v \notin U + (X - X)$, akkor bármely $u \in U$; $x, x' \in X$
 $v \neq u + x - x'$, vagy másként $v + x' \neq u + x$, azaz

$$(v + X) \cap (U + X) = \emptyset,$$

ellentmondásban U maximalitásával.

TÉTEL Bármely k -ra $A - A$ tartalmaz egy k hosszúságú számtani sorozatot.

BIZONYÍTÁSA

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ az a halmaz, melyre $A - A + U = \mathbb{Z}^n$.

BIZONYÍTÁSA

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ az a halmaz, melyre $A - A + U = \mathbb{Z}^n$.

Legyen $K \subseteq \mathbb{Z}^n$ egy olyan kocka, melynek élhossza $d > 3 \max u_i$.

Legyen L az a rács, amelyik kezdő cellája K . Nyilván minden cella tartalmaz $A - A$ -beli pontot. Tekintsük e pontot $(\bmod K)$, azaz $a - a' \equiv r \pmod{K}$.

BIZONYÍTÁSA

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ az a halmaz, melyre $A - A + U = \mathbb{Z}^n$.

Legyen $K \subseteq \mathbb{Z}^n$ egy olyan kocka, melynek élhossza $d > 3 \max u_i$.

Legyen L az a rács, amelyik kezdő cellája K . Nyilván minden cella tartalmaz $A - A$ -beli pontot. Tekintsük e pontot $(\text{mod } K)$, azaz $a - a' \equiv r \pmod{K}$.

BIZONYÍTÁSA

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ az a halmaz, melyre $A - A + U = \mathbb{Z}^n$.

Legyen $K \subseteq \mathbb{Z}^n$ egy olyan kocka, melynek élhossza $d > 3 \max u_i$.

Legyen L az a rács, amelyik kezdő cellája K . Nyilván minden cella tartalmaz $A - A$ -beli pontot. Tekintsük e pontot $(\text{mod } K)$, azaz $a - a' \equiv r \pmod{K}$.

Tekintsük azokat a cellákat, amelyeknek egy kitüntetett csúcsa egy egyenesre esik. Ezek egy számtani sorozatot alkotnak.

Színezzük e cellákat d^n féle színnel, aszerint, hogy a cellában hova esik $A - A$ egy pontja (nem feltétlen egyértelmű). A van der Waerden tétel miatt létezik e cellákból álló monokromatikus "számtani sorozat", és emiatt a K -ban egy rögzített r_0 , hogy

$$\{xd + r_0\}_{x=0}^{k-1} \subseteq A - A$$

.

BIZONYÍTÁSA

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ az a halmaz, melyre $A - A + U = \mathbb{Z}^n$.

Legyen $K \subseteq \mathbb{Z}^n$ egy olyan kocka, melynek élhossza $d > 3 \max u_i$.

Legyen L az a rács, amelyik kezdő cellája K . Nyilván minden cella tartalmaz $A - A$ -beli pontot. Tekintsük e pontot $(\text{mod } K)$, azaz $a - a' \equiv r \pmod{K}$.

Tekintsük azokat a cellákat, amelyeknek egy kitüntetett csúcsa egy egyenesre esik. Ezek egy számtani sorozatot alkotnak.

Színezzük e cellákat d^n féle színnel, aszerint, hogy a cellában hova esik $A - A$ egy pontja (nem feltétlen egyértelmű). A van der Waerden tétel miatt létezik e cellákból álló monokromatikus "számtani sorozat", és emiatt a K -ban rögzített r_0 , hogy

$$\{xd + r_0\}_{x=0}^{k-1} \subseteq A - A$$

.

(A Heles-Jewett tétel is adott volna egy számtani sorozatot)

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

DEFINÍCIÓ: Legyen G egy lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA group), és μ Haar-mérték rajta. Legyen $A \subseteq G$ egy Borel-mérhető halmaz,

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

DEFINÍCIÓ: Legyen G egy lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA group), és μ Haar-mérték rajta. Legyen $A \subseteq G$ egy Borel-mérhető halmaz,

Teljesítse továbbá a *véges index tulajdonságot*: minden $H_m := \{mg : g \in G\}$ ($m \in \mathbb{N}$) csoportnak véges legyen az indexe.

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

DEFINÍCIÓ: Legyen G egy lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA group), és μ Haar-mérték rajta. Legyen $A \subseteq G$ egy Borel-mérhető halmaz,

Teljesítse továbbá a *véges index tulajdonságot*: minden $H_m := \{mg : g \in G\}$ ($m \in \mathbb{N}$) csoportnak véges legyen az indexe.

Itt tényleg el kell majd különíteni a Bergelson tétel két részének a bizonyítását (összeghalmaz A – A -ban és számtani sorozat létezése)

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

DEFINÍCIÓ: Legyen G egy lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA group), és μ Haar-mérték rajta. Legyen $A \subseteq G$ egy Borel-mérhető halmaz,

Teljesítse továbbá a *véges index tulajdonságot*: minden $H_m := \{mg : g \in G\}$ ($m \in \mathbb{N}$) csoportnak véges legyen az indexe.

Itt tényleg el kell majd különíteni a Bergelson tétel két részének a bizonyítását (összeghalmaz A – A -ban és számtani sorozat létezése)

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

DEFINÍCIÓ: Legyen G egy lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA group), és μ Haar-mérték rajta. Legyen $A \subseteq G$ egy Borel-mérhető halmaz,

Teljesítse továbbá a *véges index tulajdonságot*: minden $H_m := \{mg : g \in G\}$ ($m \in \mathbb{N}$) csoportnak véges legyen az indexe.

Itt tényleg el kell majd különíteni a Bergelson tétel két részének a bizonyítását (összeghalmaz $A - A$ -ban és számtani sorozat létezése)

PÉLDA[Ruzsa] $G := \mathbb{Z}_m^\alpha$, α tetszőleges számosság, G -t ellátva a szokásos szorzattopológiával.

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

Révész bevezetett egy sűrűség fogalmat lokálisan kompakt Abel-csoportokban:

DEFINÍCIÓ: Legyen G egy lokálisan kompakt Abel-csoport (LCA group), és μ Haar-mérték rajta. Legyen $A \subseteq G$ egy Borel-mérhető halmaz,

Teljesítse továbbá a *véges index tulajdonságot*: minden $H_m := \{mg : g \in G\}$ ($m \in \mathbb{N}$) csoportnak véges legyen az indexe.

Itt tényleg el kell majd különíteni a Bergelson tétel két részének a bizonyítását (összeghalmaz $A - A$ -ban és számtani sorozat létezése)

PÉLDA[Ruzsa] $G := \mathbb{Z}_m^\alpha$, α tetszőleges számosság, G -t ellátva a szokásos szorzattopológiával.

Mivel G -ben minden elem rendje véges, nem lehet akármilyen hosszú számtani sorozatot találni benne.

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

TÉTEL [H.-Révész]

$$\overline{\Delta}(A) := \inf_{F \subset G; |F| < \infty} \sup_{V \in \mathcal{B}_0} \frac{\mu(A \cap F)}{\mu(F + V)}.$$

Let G be an LCAF group with cardinality $\mathfrak{a}$ and let $A \subset G$ be a subset with $\overline{\Delta}(A) > 0$. For every $k \in \mathbb{N}$ there exists a $B \subset G$ with cardinality $\mathfrak{b}$ such that

$$A - A \supset B \hat{+} B \hat{+} \dots \hat{+} B = k \hat{+} B,$$

where $k \hat{+} B$ is the restricted set addition, i.e. $B \hat{+} B \hat{+} \dots \hat{+} B = k \hat{+} B := \{b_1 + b_2 + \dots + b_k : b_i, b_j \in B; b_i \neq b_j, 1 \leq i < j \leq k\}$.

EGY TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁS

TÉTEL:

Let G be an LCAF group with cardinality α and let $A \subset G$ be a subset with $\overline{\Delta}(A) > 0$. Let $M_G = \sup\{\text{ord}(g) : g \in G\}$ and assume that

- 1.) M_G is finite. Then $A - A$ contains an arithmetic progression with length $w_r^*(M_G)$ for some $r \in$,
- 2.) $M_G = \infty$, then for every k , $A - A$ contains an arithmetic progression with length k ,

ahol $k = w^*(n)$ az "inverz van der Waerden függvény: r színezve $1, 2, \dots, n$ -et van legalább k hosszú számtani sorozat.

VÉGÜL EGY 'MATCHING' PROBLÉMÁRÓL

VÉGÜL EGY 'MATCHING' PROBLÉMÁRÓL

Előzmény:

VÉGÜL EGY 'MATCHING' PROBLÉMÁRÓL

Előzmény:

Kommunikációs probléma: k játékos, $A_1, A_2, \dots, A_k$ egészekből álló halmaz, úgy, hogy $FS(A_i) = \{\sum_{x \in B} x : B \subseteq A_i; |B| < \infty\} = \mathbb{N} + c_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

A_i -t csak az i -edik játékos ismeri.

VÉGÜL EGY 'MATCHING' PROBLÉMÁRÓL

Előzmény:

Kommunikációs probléma: k játékos, $A_1, A_2, \dots, A_k$ egészekből álló halmaz, úgy, hogy $FS(A_i) = \{\sum_{x \in B} x : B \subseteq A_i; |B| < \infty\} = \mathbb{N} + c_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

A_i -t csak az i -edik játékos ismeri.

Minimális kommunikációval döntsük el, hogy egy $p \in \mathbb{N}^k$ esetén $p \in FS(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$.

VÉGÜL EGY 'MATCHING' PROBLÉMÁRÓL

Előzmény:

Kommunikációs probléma: k játékos, $A_1, A_2, \dots, A_k$ egészekből álló halmaz, úgy, hogy $FS(A_i) = \{\sum_{x \in B} x : B \subseteq A_i; |B| < \infty\} = \mathbb{N} + c_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

A_i -t csak az i -edik játékos ismeri.

Minimális kommunikációval döntsük el, hogy egy $p \in \mathbb{N}^k$ esetén $p \in FS(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$.

(Bizonyítottuk, hogy $\ll \log \log \|p\|$).

VÉGÜL EGY 'MATCHING' PROBLÉMÁRÓL

Egy gráfelméleti tétel:

TÉTEL:

Let $X_1, \dots, X_s$ be disjoint finite sets and $Y_1, \dots, Y_t$ be disjoint finite sets too. Let

$$U = \bigcup_{i=1}^s X_i, \quad V = \bigcup_{j=1}^t Y_j,$$

with $|U| = |V|$ and suppose that $1 \leq |X_i| \leq \sqrt{|U|}$ for $i = 1, 2, \dots, s$ and $1 \leq |Y_j| \leq \sqrt{|V|}$ for $j = 1, 2, \dots, t$. Then there exists a bipartite graph $G(U, V)$ fulfilling the following conditions:

- (A) there are no two edges $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ for which $x_1, x_2 \in X_i; y_1, y_2 \in Y_j$ for some i and j ;
- (B) $G(U, V)$ is a matching.