

Szövetgeometriai Problémák

Simon Domán

Matematika BSc. hallgató
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Témavezető: Dr. Kozma József
Szeged, 2016

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	3
1. Nomogramok	4
2. Geometriai hálózatok	4
2.1. Záródási feltételek	5
3. Kvázicsoportok	8
4. Algebrai hálózatok	10
5. Algebrai Hálózatok II	23
6. Geometriai hálózatok regularitása	24
Hivatkozások	27
Nyilatkozat	28

BEVEZETÉS

A témaválasztásom főbb motivációja, hogy a geometria azon területével szerettem volna foglalkozni, ami szoros kapcsolatban áll az algebrával. Ezért a dolgozatomban olyan geometriai hálózatokat vizsgálók, melyek egy meghatározott műveletre, loopot, kvázicsoportot, csoportot vagy Abel-csoportot alkotnak. Továbbiakban Aczél János Kvázicsoportok–hálózatok–nomogramok című munkáját dolgozom fel, amely során bemutatásra kerülnek a reguláris hálózatok, azon belül is 3 görbesereges hálózatok.

Az első fejezetben röviden összefoglalásra kerülnek a nomogrammok (melyek eme hálózatok alapjai) főbb tulajdonságai. A második fejezet során ismertetem azokat a feltételeket (későbbiekben záródási feltételek), melyek teljesülése esetén a hálózat egy algebrai tulajdonságát kapjuk. Ugyanebben a fejezetben fogalmazom meg azt a tételt, mely szerint ezen tulajdonságok bármelyikének teljesülése esetén, teljesül a többi feltétel is, és a hálózatunk reguláris. A tétel bizonyítását dolgozatom végén mutatom be. Mielőtt azonban rátérnénk az algebrai tulajdonságok vizsgálatára, a harmadik fejezetben tisztázom a dolgozat számára lényegesebb algebrai fogalmakat és tételeket. A tulajdonságok kapcsolata a záródási feltételekkel a negyedik fejezetben kerül tárgyalásra, ami azért fontos, mert ezen azonosságokból és az ötödik fejezet által bevezetett más jellegű algebrai vizsgálatokból, fogjuk tudni bizonyítani az utolsó fejezetben a második fejezet végén bemutatott tételt.

Ezen munkámat a Szegedi Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének Geometria Tanszékén végeztem Dr. Kozma József vezetésével.

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Kozma József tanár úrnak aki a szakdolgozatom kidolgozása alatt útmutatásaival és javaslataival támogatta munkámat.

SZÖVETGEOMETRIAI PROBLÉMÁK

SIMON DOMÁN

1. NOMOGRAMOK

A nomogram többváltozós függvények síkbeli ábrázolására és az egymáshoz tartozó értékek meghatározására szolgáló ábra. Ebben a munkában a nomogrammok görbesereges változatával foglalkozom. Legegyszerűbb példája egy 2-változós függvény szintvonalas ábrázolása.

Gyakran megkönnyíti a nomogramokkal való bánást, ha a görbék egyenesekkel tudjuk helyettesíteni. Ez megvalósítható a változók szerepének felcserélésével vagy a skála beosztásának megváltoztatásával.

Egy általános egyenessereges nomogram 3 egyenesseregből áll, melyek egyike az x , másika az y , a harmadik pedig a z változó értékeihez tartozik, és ezek is vannak hozzájuk írva. Párhuzamos egyenessereges nomogrammoknál mind a 3 egyenessereg párhuzamos egyenesekből áll. Görbesereges nomogramnak általános egyenessereges nomogrammal való helyettesítését anamorfózisnak nevezzük, párhuzamos egyenessereges nomogrammal való helyettesítését párhuzamos anamorfózisnak nevezzük.

Egy párhuzamos anamorfózis abból áll, hogy az x, y, z változók helyébe olyan új u, v, w változókat vezetünk be, melyekkel az x, y és z közti függéskapcsolat $w = u + v$ alakba írható. Ha ezeket az új változókat $u = f(x)$, $v = g(y)$, $w = h(z)$ alakban definiáljuk, az előbbi egyenlet ilyen alakba írható: $h(z) = f(x) + g(y)$, és ennek kell $z = xy$ -nal egyenértékűnek lenni (ahol xy általános kétváltozós függvénykapcsolatot jelent. Az f, g, h függvényeket folytonosnak és szigorúan monotonnak szokás feltételezni.

2. GEOMETRIAI HÁLÓZATOK

Ebben a dolgozatban síkbeli geometria hálózatnak fogunk nevezni a sík egy tartományában 3 görbesereget, melynek görbéi folytonosak, ha a tartomány minden pontján pontosan egy görbe megy át mindegyik seregből, és két különböző seregbeli görbe pontosan egy pontban metszi egymást.

2.1. Definíció. Regulárisnak nevezünk egy geometriai hálózatot, ha kölcsönösen egyértelmű és folytonos módon leképezhető három párhuzamos egyenesseregre.

Mivel mindig elérhető, hogy két görbesereg ilyen módon menjen át két párhuzamos és egymásra merőleges egyenesseregbe, így ezek a derékszögű koordinátarendszer koordinátavonalainak, a harmadik görbe pedig a $z = xy$ függvény szintvonalainak tekinthető. Ebből következően a regularitás azt jelenti, hogy topologikusan ekvivalens azzal a hálózattal, amely a koordinátaegyenesekből és a $w = v + u$ függvény szintvonalaiából (135° -os egyenesekből) áll. Meg lehet mutatni, hogy vannak olyan f, g, h függvények melyek folytonosak szigorúan monotonok, értékkészletük a számegetes, és fennáll

$$h(xy) = f(x) + g(y). \quad (2.1)$$

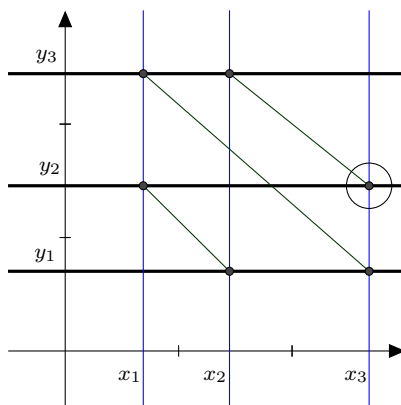
Az alábbiakban geometriai hálózatok regularitására geometriai jellegű feltételeket adunk meg. Ezek lesznek az úgynevezett záródási feltételek.

2.1. ZÁRÓDÁSI FELTÉTELEK

Legyen x_1, x_2, x_3, x_4 tetszőleges x értékek, y_1, y_2, y_3, y_4 pedig tetszőleges y érték, és azt, hogy két különböző x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pár metszéspont ugyanazon z görbén (szintvonalon) van rajta, egyenlőséggel fejezzük ki. Ekkor a feltételek az alábbiak:

Thomsen-feltétel (T):

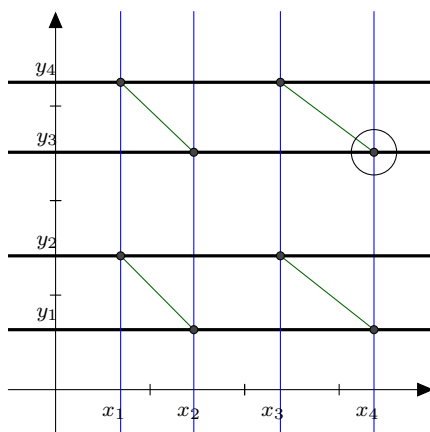
$$(T) \quad x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_3 = x_3y_1 \Rightarrow x_2y_3 = x_3y_2.$$



2.1. ábra. Thomsen-feltétel

Reidemeister-feltétel (R):

$$(R) \quad x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_4 = x_2y_3 \text{ és } x_3y_2 = x_4y_1 \Rightarrow x_3y_4 = x_4y_3.$$



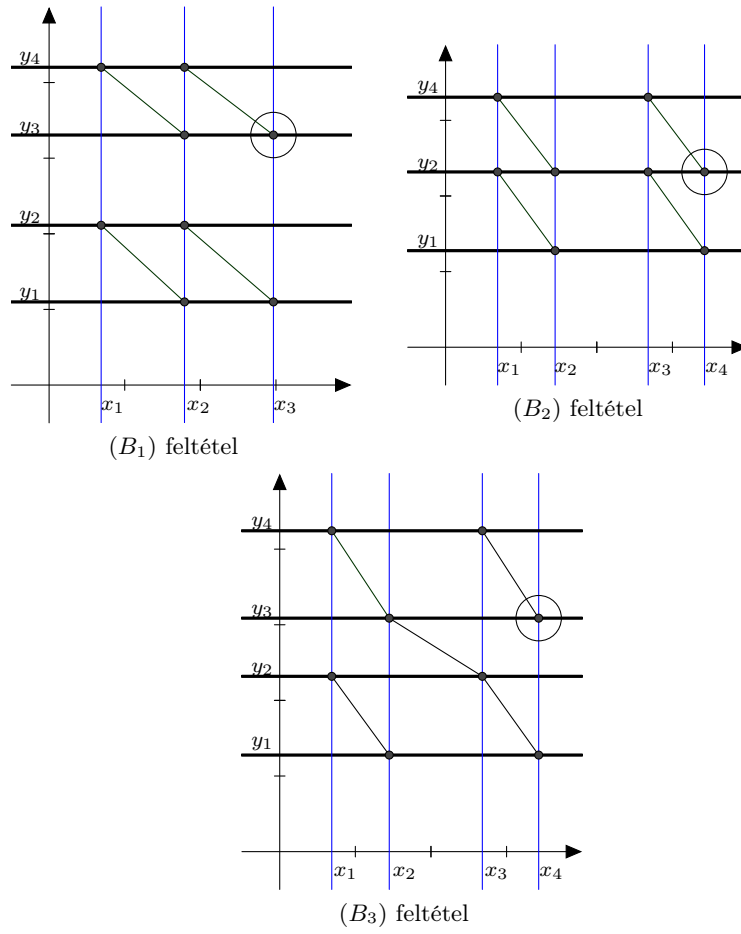
2.2. ábra. Reidemeister-feltétel

Bol-feltételek (B):

$$(B_1) \quad x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_4 = x_2y_3 \text{ és } x_2y_2 = x_4y_1 \Rightarrow x_2y_4 = x_4y_3,$$

$$(B_2) \quad x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_4 = x_2y_2 \text{ és } x_3y_2 = x_4y_1 \Rightarrow x_3y_4 = x_4y_2,$$

$$(B_3) \quad x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_4 = x_2y_3 = x_3y_2 = x_4y_1 \Rightarrow x_3y_4 = x_4y_3.$$

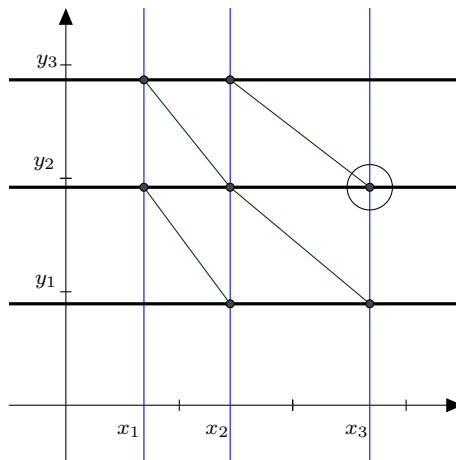


2.3. ábra. Bol-feltételek

Ha mindhárom feltétel teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a (B) Bol-feltétel teljesül. Könnyen belátható, hogy a Bol-feltételek a Reidemeister-feltétel speciális esetei.

Hatszög-feltétel (H) :

$$(H) \quad x_1 y_2 = x_2 y_1 \text{ és } x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_3 y_1 \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2.$$



2.4. ábra. Hatszög-feltétel

Ekkor (T) feltétel része teljesül $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ -ra, így a következménye is:

$$a_2b_3 = a_3b_2. \quad (2.10)$$

Végül a

$$c_1 = X_3, \quad c_2 = a_2 = x_3, \quad c_3 = a_1 = x_4, \quad d_1 = b_3, \quad d_2 = Y_2 = y_3, \quad d_3 = Y_1 = y_4 \quad (2.11)$$

jelöléssel

$$c_1d_2 = X_3Y_2 = X_2Y_3 = x_1y_2 = x_2y_1 = a_3b_2 = a_2b_3 = c_2d_1 \quad (2.12)$$

(2.11), (2.7), (2.4), (2.2), (2.8), (2.9) és újra (2.11) miatt, továbbá

$$c_1d_3 = X_3Y_1 = X_1Y_3 = a_3b_1 = a_1b_3 = c_3d_1 \quad (2.13)$$

(2.11), (2.6), (2.8), (2.9) és (2.11) miatt. A (2.12) és (2.13) képletsorokat nézve (T) első részét kapjuk, tehát második része is teljesül:

$$x_3y_4 = c_2d_3 = c_3d_2 = x_4y_3,$$

ami éppen a (2.3). ■

2.3. Tétel. *Geometriai hálózatoknál a (T) , (R) , (B_1) , (B_2) , (B_3) , (B) és (H) feltételek mindegyike külön-külön szükséges és elégséges feltétele a hálózat regularitásának.*

A tétel bizonyítását algebrai hálózatokra vonatkozó bizonyítandó tételekből fogjuk levezetni a későbbiekben.

3. KVÁZICSOPORTOK

Mielőtt áttérnénk a hálózatok algebrai jellegű vizsgálatára, érdemes pár algebrai fogalmat bevezetni.

3.1. Definíció. *Grupoidnak* nevezünk egy nem üres $\mathbf{G}$ halmazt, ha értelmezve van rajta egy $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{G}$ egyértelmű művelet. Jelölés: $(\mathbf{G}, \cdot)$

3.2. Definíció. Legyen $(\mathbf{G}, \cdot)$ egységelemes grupoid. Ha a grupoid a és b elemére fennáll $a \cdot b = e$, ahol e a grupoid egységeleme, akkor a -t a b *balinverzének*, b -t az a *jobbinverzének* nevezzük.

3.3. Definíció. Egy $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidot *kvázicsoportnak* nevezünk, ha bármely $h = g \cdot x$ és $h = y \cdot g$ alakú egyenlet $\mathbf{G}$ -ben egyértelműen megoldható.

3.4. Definíció. Egy egységelemes kvázicsoportot *loopnak* nevezünk.

3.5. Definíció. Egy $(\mathbf{G}, \cdot)$ loop *Moufang-tulajdonságú*, ha bármely $x, y, z \in \mathbf{G}$ -re teljesül

$$((x \cdot y) \cdot z) \cdot y = x \cdot (y \cdot (z \cdot y)).$$

3.6. Definíció. Egy $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidot *félcsoportnak* nevezünk, ha a $\cdot$ művelet asszociatív.

3.7. Definíció. Egy $(\mathbf{G}, \cdot)$ loopot *csoportnak* nevezünk, ha a $\cdot$ művelet asszociatív.

3.8. Definíció. Ha egy grupoid művelete kommutatív, akkor a grupoidot *Abel-félének* nevezzük. Ilyen értelemben beszélhetünk Abel-féle kvázicsoportról, Abel-féle félcsoportról stb.

3.9. Definíció. A $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidnak a $(\mathbf{H}, \circ)$ grupoidra való egyértelmű φ leképezését *homomorfizmusnak* nevezzük, ha $\mathbf{G}$ bármely két g_1, g_2 elemére

$$(g_1 \cdot g_2)\varphi = g_1\varphi \circ g_2\varphi$$

teljesül.

3.10. Definíció. Ha a φ homomorfizmus $\mathbf{G}$ -nek bijektív leképezése $\mathbf{H}$ -ra, akkor azt mondjuk, hogy φ a $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidnak a $(\mathbf{H}, \circ)$ grupoidra való *izomorfizmus*.

3.11. Definíció. A $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidnak valamely a elemét *balregulárisnak* (*jobbregulárisnak*) nevezzük, ha B_a (J_a) a $\mathbf{G}$ halmaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, ahol:

$$xB_a = ax \quad (xJ_a = xa) \quad x \in \mathbf{G}.$$

Ha az a egyszerre bal- és jobbreguláris, akkor *regulárisnak* nevezzük.

3.12. Definíció. A $(\mathbf{H}, \circ)$ grupoid a $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoid *izotópja*, ha létezik $\mathbf{G}$ -nek $\mathbf{H}$ -ra való olyan α, β, γ három bijektív leképezése, hogy

$$x\alpha \circ y\beta = (xy)\gamma$$

minden $x, y \in \mathbf{G}$ -re teljesül. A rendezett (α, β, γ) hármast a $(\mathbf{G}, \cdot)$ -nek $(\mathbf{H}, \circ)$ -ra való *izotopizmusának* nevezzük. Jelölés: $(\mathbf{G}, \cdot) \approx (\mathbf{H}, \circ)$.

Az izotopizmus az izomorfizmus fogalmának általánosítása.

3.13. Tétel. *Az izotópia ekvivalenciareláció.*

Bizonyítás. (a) $(\mathbf{G}, \cdot) \approx (\mathbf{G}, \cdot)$ teljesül, ha α, β, γ -nak az identikus leképezést választjuk.
 (b) Ha $(\mathbf{H}, \circ) \approx (\mathbf{G}, \cdot)$, akkor $(\mathbf{G}, \cdot) \approx (\mathbf{H}, \circ)$ teljesül, ha az első esetben választjuk (α, β, γ) -t másodikban pedig $(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})$ -t.
 (c) Ha $(\mathbf{G}, \cdot) \approx (\mathbf{H}, \circ)$ és $(\mathbf{H}, \circ) \approx (\mathbf{K}, *)$, akkor $(\mathbf{G}, \cdot) \approx (\mathbf{K}, *)$. Legyen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ről $(\mathbf{H}, \circ)$ -ra, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ pedig $(\mathbf{H}, \circ)$ -ról $(\mathbf{K}, *)$ -ra. Ekkor tetszőleges $x, y \in \mathbf{G}$ elemekre $x\alpha_1 \circ y\beta_1 = (xy)\gamma_1 \in \mathbf{H}$, $(x\alpha_1)\alpha_2 * (y\beta_1)\beta_2 = ((xy)\gamma_1)\gamma_2$, azaz $x(\alpha_1\alpha_2) * y(\beta_1\beta_2) = (xy)(\gamma_1\gamma_2)$, tehát $(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \gamma_1\gamma_2)$ a $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ről $(\mathbf{K}, *)$ -ra izomorfizmus. ■

3.14. Definíció. Legyen $(\mathbf{G}, \cdot)$ és $(\mathbf{G}, *)$ ugyanazon $\mathbf{G}$ halmazon értelmezett két grupoid. Azt mondjuk, hogy $(\mathbf{G}, *)$ a $(\mathbf{G}, \cdot)$ főizotópja, ha létezik $\mathbf{G}$ -nek két olyan ϕ és σ permutációja, hogy minden $x, y \in \mathbf{G}$ -re

$$x\phi * y\sigma = xy.$$

Ilyen értelemben beszélhetünk főloopizotópról (továbbiakban FL-izotóp).

3.15. Tétel. *Grupoid bármely izotópja izomorf a grupoid valamely főizotópjához.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (α, β, γ) a $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidnak $(\mathbf{H}, \circ)$ -ra való izotopizmus. $(\mathbf{G}, *)$ -ot a következő szerint definiáljuk:

$$x * y = (x\gamma\alpha^{-1})(y\gamma\beta^{-1}) \quad x, y \in \mathbf{G}$$

Ez mutatja, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ a $(\mathbf{G}, *)$ -nak főizotópja. Másrészt az egyenlőség az (α, β, γ) izotopizmusnál

$$x\gamma \circ y\gamma = (x * y)\gamma$$

egyenlőségbe megy át, ami mutatja, hogy γ a $(\mathbf{H}, \circ)$ -nak $(\mathbf{G}, *)$ -ra való izomorfizmusa. ■

3.16. Tétel. *Legyen (α, β, γ) a $(\mathbf{G}, \cdot)$ grupoidnak $(\mathbf{H}, \circ)$ -ra való izotopizmus. Az $x \in \mathbf{G}$ akkor és csak akkor balreguláris $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ben, ha $x\alpha$ balreguláris $(\mathbf{H}, \circ)$ -ban. Hasonlóképpen $y \in \mathbf{G}$ akkor és csak akkor jobbreguláris $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ben, ha $y\beta$ jobbreguláris $(\mathbf{H}, \circ)$ -ban.*

Bizonyítás. Legyen x balreguláris, és tekintsük az

$$x\alpha \circ u = z \quad (z \in \mathbf{H}) \tag{3.1}$$

egyenlet. Az x balregularitása miatt van olyan $v \in \mathbf{G}$, amelyre $xv = zy^{-1}$. Ekkor $x\alpha \circ v\beta = z$, tehát $u = v\beta$ az (3.1) egyenlet megoldása. Legyen u_1 és $u_2 \in \mathbf{H}$ két ilyen megoldás, azaz $x\alpha \circ u_1 = x\alpha \circ u_2$. Ekkor

$$(x \cdot u_1\beta^{-1})\gamma = x\alpha \circ u_1 = x\alpha \circ u_2 = (x \cdot u_2\beta^{-1})\gamma.$$

Mivel γ kölcsönösen egyértelmű leképezés, $x \cdot u_1\beta^{-1} = x \cdot u_2\beta^{-1}$ következik. Az x elem balregularitása miatt $u_1\beta^{-1} = u_2\beta^{-1}$. Mivel β is kölcsönösen egyértelmű leképezés, $u_1 = u_2$ adódik. Mivel $(\mathbf{G}, \cdot)$ a $(\mathbf{H}, \circ)$ grupoid izotópja, az x elemre vonatkozó csak akkor állítást már nem kell bizonyítani. A jobbregularitásra vonatkozó állítást ugyanígy kell bizonyítani. ■

3.17. Következmény. *Kvázicsoport bármely izotópja kvázicsoport.*

4. ALGEBRAI HÁLÓZATOK

Ha megnézzük a záródási feltételeket, látszik, hogy ezek teljesen algebrai jellegűek.

4.1. Definíció. Kvázicsoportot alkot, és $(\mathbf{G}, \cdot)$ -tal jelöljük a $z = xy$ eredményű művelettel ellátott $\mathbf{G}$ halmazt, ha teljesülnek a kvázicsoportnál leírtak. *Pontnak* nevezzük $\mathbf{G}$ -beli x, y rendezett elem-párt, és (x, y) -nal jelöljük. 1-görbének nevezzük az (a, y) alakú pontthalmazt, valamilyen rögzített a -re és tetszőleges y -ra. 2-görbének nevezzük az (x, b) alakú pontthalmazt, ahol b szintén rögzített, és x tetszőleges. 3-görbének hívjuk az olyan (x, y) pontok halmazát, amelyekre $xy = c$ (x, y tetszőleges, és c rögzített). Az a, b, c tetszőleges elemei $\mathbf{G}$ -nek, de adott görbék esetén rögzítettek.

4.2. Definíció. Algebrai hálózatnak nevezzük a $(\mathbf{G}, \cdot)$ kvázicsoportban fentiekben definiált módon megadott 1-, 2- és 3-görbék által alkotott három osztályt, valamennyi $\mathbf{G}$ -beli a, b, c -re.

E görbeosztályok görbéi eleget tesznek a geometriai hálózatok értelmezésében szereplő valamennyi feltételnek, kivéve a folytonosság követelményét. Ugyanígy a záródási feltételek képletei értelmesek maradnak. Tekintsük egy $(\mathbf{G}, \cdot)$ kvázicsoport $(\mathbf{H}, \circ)$ izotópját és a hozzá tartozó f, g, h kölcsönösen egyértelmű leképezéseket, ekkor

$$h(xy) = f(x) \circ g(y) \quad (4.1)$$

minden $\mathbf{G}$ -beli x, y -ra teljesül. Mivel a $(\mathbf{G}, \cdot)$ -beli $x = c_1$ 1-görbének a vele izotóp $(\mathbf{H}, \circ)$ kvázicsoportban az $f(x) = c'_1 (= f(c_1))$ 1-görbe felel meg, és hasonlóan $y = c_2$ -nek $g(y) = c'_2$ és $xy = c_3$ -nak $h(xy) = f(x) \circ g(y) = c'_3$, továbbá mivel a záródási feltételek egy kvázicsoporttal együtt annak minden izotópjára is teljesülnek, ezért egy algebrai hálózathoz nemcsak egy kvázicsoportot, hanem az összes vele izotóp kvázicsoportok egész osztályát hozzárendelhetjük.

4.3. Definíció. (a) -reguláris egy algebrai hálózat, ha a hozzárendelt kvázicsoport-osztály tartalmaz Abel-csoportot.

4.4. Definíció. (c) -reguláris egy algebrai hálózat, ha a hozzárendelt kvázicsoport-osztály tartalmaz csoportot.

4.5. Definíció. (m) -reguláris egy algebrai hálózat, ha a hozzárendelt kvázicsoport-osztály tartalmaz Moufang loopot. (m_1) -, illetve (m_2) -reguláris, ha a hozzárendelt kvázicsoport-osztály tartalmaz olyan loopot, melyre teljesül:

$$\begin{aligned} (m_1) \quad & y \cdot (z \cdot (y \cdot x)) = (y \cdot (z \cdot y)) \cdot x \\ (m_2) \quad & ((x \cdot y) \cdot z) \cdot y = x \cdot ((y \cdot z) \cdot y) \end{aligned}$$

minden $x, y, z \in \mathbf{G}$ -re.

4.6. Definíció. (h) -reguláris egy algebrai hálózat, ha a hozzárendelt kvázicsoport-osztály minden loopja hatványasszociatív.

Könnyen belátható, hogy a regularitások erőssége között is vonható erősségük szerint reláció. Most azt bizonyítjuk, hogy a regularitás különböző fokai egy-egy záródási feltétellel egyenértékűek. Tekintsük $(\mathbf{G}, \cdot)$ FL-izotópját, $(\mathbf{G}, \circ)$ -t, amelyet így definiálunk:

$$sv \circ ut = st, \quad (4.2)$$

ahol $u, v \in \mathbf{G}$ rögzített. Mivel adott u, v mellett tetszőleges x, y előállítható egyértelműen: $x = sv, y = ut$ alakban, ezért (4.2) egyértelműen értelmezi $x \circ y$ -t és $(\mathbf{G}, \circ)$ kvázicsoport. Szemléletesen a 4.1. ábra mutatja.

4.7. Tétel. $(a) \Leftrightarrow (T)$.

Bizonyítás.

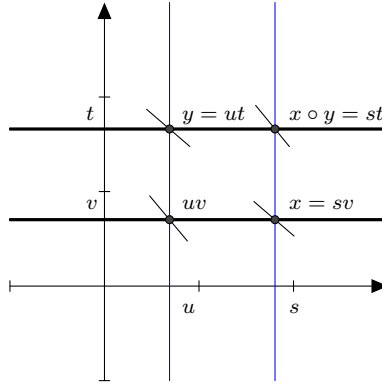
$(T) \Rightarrow (a)$

(T) -ből következik $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden FL-izotópjának kommutativitása: Legyen $x_1 = u, y_1 = v$ adott. Tetszőlegesen megadott $x, y \in \mathbf{G}$ -hez $(\mathbf{G}, \cdot)$, kvázicsoport volta miatt találhatók olyan x_2, y_2, x_3, y_3 értékek (4.2. ábra), hogy

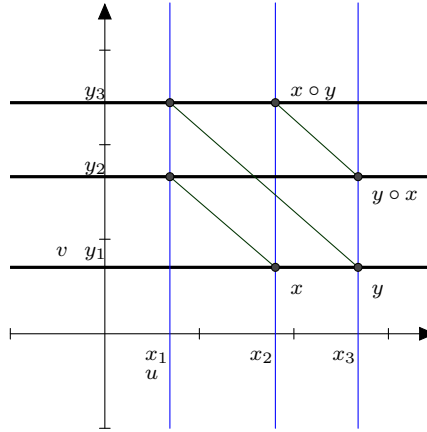
$$x = uy_2 = x_2v \quad \text{és} \quad y = uy_3 = x_3v, \quad (4.3)$$

vagyis $x_1y_2 = x_2y_1$ és $x_1y_3 = x_3y_1$ teljesül, és ezért (T) következmény része is

$$x_2y_3 = x_3y_2. \quad (4.4)$$



4.1. ábra



4.2. ábra

(4.3) és (4.2) miatt $x \circ y = x_2 v \circ u y_3 = x_2 y_3$ és $y \circ x = x_3 v \circ u y_2 = x_3 y_2$, tehát

$$x \circ y = y \circ x. \quad (4.5)$$

Nézzük az asszociativitást. Legyen u helyett most w ($v = y_1$ változatlan) és $sv * wt = st$ általuk megadott $*$ művelet is kommutatív:

$$x * z = z * x \quad (4.6)$$

akkor tetszőleges $x, y \in \mathbf{G}$ -re adott u, v -hez van olyan s, t , hogy $x = sv$, $y = ut$, tehát

$$x \circ y = sv \circ ut = st = sv * wt = x * (wv \circ ut) = x * (q \circ y). \quad (4.7)$$

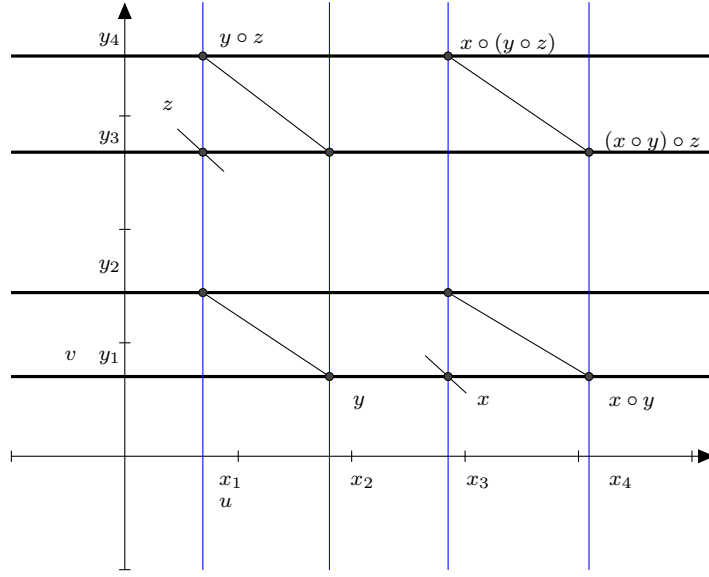
Itt w tetszőlegesen választható, tehát $q = wv$ is, vagyis minden q -hoz értelmezhető olyan $*$ művelet, hogy (4.7) igaz legyen minden $x, y \in \mathbf{G}$ -re. Mármost tetszőleges $p, q, r \in \mathbf{G}$ -re — $*$ -ot úgy választva meg, hogy (4.7) fennálljon — érvényes

$$(p \circ q) \circ r = (q \circ p) \circ r = (q \circ p) * (q \circ r) = (q \circ r) * (q \circ p) = (q \circ r) \circ p = p \circ (q \circ r)$$

((4.5), (4.7), (4.6), (4.7) és ismét (4.5) alkalmazásával) tehát $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden $(\mathbf{G}, \circ)$ FL-izotópja nemcsak kommutatív, de asszociatív is, mely kvázicsoportokat Abel-csoportoknak nevezünk, tehát minden FL-izotópja Abel-csoport. 3.15. Tétel miatt (T) -ből következik, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden loop-izotópja is Abel-csoport.

(a) $\Rightarrow$ (T)

A hálózathoz rendelt, izotóp kvázicsoportokból álló osztály azon kvázicsoportjára, mely (a) szerint



4.3. ábra

Abel-csoport, a (T) feltétel teljesül, ugyanis

$$\begin{aligned} (x_1 y_2 = x_2 y_1 \text{ és } x_1 y_3 = x_3 y_1) &\Rightarrow \\ x_1 y_3 (x_1 y_2)^{-1} &= x_3 y_1 (x_2 y_1)^{-1} \Rightarrow \\ y_3 y_2^{-1} &= x_3 x_2^{-1} \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2, \end{aligned}$$

(hisz Abel-csoportokban $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$, $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} x^{-1} = x^{-1} y^{-1}$, stb). És, mint említésre került, ha (T) egy kvázicsoportra teljesül, akkor annak minden izotópjára, tehát az algebrai hálózathoz rendelt osztály minden kvázicsoportjára is. ■

4.8. Következmény. Ha (T) egy $y_1 \in \mathbf{G}$ -re és minden $x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbf{G}$ -re teljesül, akkor minden $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbf{G}$ -re is teljesül.

4.9. Tétel. $(c) \Leftrightarrow (R)$.

Bizonyítás.

$(R) \Rightarrow (c)$

Rögzítsük $x_1 = u$, $y_1 = v$ -t (4.3. ábra), akkor a kvázicsoport tulajdonság miatt teszőleges x, y, z -hez van olyan $x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$, hogy

$$y = u y_2 = x_2 v, \quad (4.8)$$

ez meghatározza $(x_2$ -t és y_2 -t),

$$x = x_3 v, \quad z = u y_3, \quad (4.9)$$

(ezek meghatározzák x_3 -at és y_3 -at) és

$$x_2 y_3 = u y_4, \quad x_3 y_2 = x_4 v \quad (4.10)$$

(ezek meghatározzák x_4 -et és y_4 -et). De (4.8) és (4.10) éppen (R) feltételrész, tehát teljesül a következmény-rész is

$$x_3 y_4 = x_4 y_3. \quad (4.11)$$

(4.9), (4.8), (4.2), (4.10), (4.9), (4.2) egymás utáni alkalmazásával

$$(x \circ y) \circ z = (x_3 v \circ u y_2) \circ z = x_3 y_2 \circ z = x_4 v \circ u y_3 = x_4 y_3,$$

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (x_2 v \circ u y_3) = x \circ x_2 y_3 = x_3 v \circ u y_4 = x_3 y_4,$$

tehát (4.11) valóban azt mondja ki, hogy $\circ$ asszociatív. Mivel $(\mathbf{G}, \circ)$ kvázicsoport, és az asszociatív kvázicsoportok éppen a csoportok, ezért a bizonyítás ebbe az irányba kész. Ha u, v -t nem vesszük rögzítettnek, $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden FL-izotópja csoport, és mivel csoport izomorfja is csoport, ezért (T) -ből

következik, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden loopizotópja csoport.

$$(R) \Leftarrow (c)$$

Hálózathoz rendelt osztály azon kvázicsoportjára, mely (c) szerint csoport, az (R) feltétel teljesül, ugyanis

$$(x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_4 = x_2y_3 \text{ és } x_3y_2 = x_4y_1) \Rightarrow \\ x_3y_2(x_1y_2)^{-1}x_1y_4 = x_4y_1(x_2y_1)^{-1}x_2y_3 \Rightarrow x_3y_4 = x_4y_3,$$

(mivel csoportokban $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$) Ha pedig (R) egy kvázicsoportra teljesül, akkor teljesül minden izotópjára, tehát az algebrai hálózathoz rendelt osztály minden kvázicsoportjára is. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

4.10. Következmény. Ha (R) egy-egy $y_1 \in \mathbf{G}$ -re és minden $x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbf{G}$ -re teljesül, akkor minden $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbf{G}$ -re is teljesül.

4.11. Tétel. $(m) \Leftrightarrow (B)$, illetve részletebben:

$$(m_1) \Leftrightarrow (B_1), (m_2) \Leftrightarrow (B_2)$$

$$(B_1) \text{ és } (B_2) \Rightarrow (B_3)$$

$$((m_1) \text{ és } (m_2)) \Leftrightarrow (m)$$

Bizonyítás.

$$((m_1) \text{ és } (m_2)) \Rightarrow (m)$$

Cél bebizonyítani, hogy ha $(\mathbf{G}, \cdot)$ loop (azaz olyan kvázicsoport, melyben minden $x \in \mathbf{G}$ -re

$$ex = xe = x \tag{4.12}$$

teljesül), akkor (m_1) és (m_2) fennállásából a 3.5. Definíció egyenlete következik. Jelölje y^{-1} -gyel y balinverzét, vagyis a

$$y^{-1}y = e \tag{4.13}$$

egyenlet megoldását. (m_1) -ből $z = y^{-1}$, $yx = w$ -vel (4.13) és (4.12) miatt

$$y \cdot (y^{-1} \cdot w) = w \tag{4.14}$$

érvényes minden y, w -re. Másrészt (m_2) -ből $x = y^{-1}$ -gyel ismét (4.13) és (4.12) miatt $z \cdot y = y^{-1} \cdot ((y \cdot z) \cdot y)$ és ha ezen egyenlet mindkét oldalát balról y -nal megszorozzuk (4.14)-at figyelembe véve $((y \cdot z) \cdot y = w$ -vel), akkor $y \cdot (z \cdot y) = (y \cdot z) \cdot y$ -t kapunk és így (m_2) a 3.5. Definíció egyenletébe megy át.

$$(m) \Rightarrow (m_1), (m) \Rightarrow (m_2)$$

Cél megmutatni, hogy ha a $(\mathbf{G}, \cdot)$ loopban 3.5. Definíció egyenlete fennáll, akkor (m_1) és (m_2) is érvényes. Legyen $x = e$ -vel, ekkor 3.5. Definíció egyenletéből $(y \cdot z) \cdot y = y \cdot (z \cdot y)$ -t kapunk, így 3.5. Definíció egyenletéből (m_2) azonnal következik. 3.5. Definíció egyenletéből $x = y^{-1}$ és $z \cdot y = w$ helyettesítéssel (4.13) és (4.12) miatt

$$w = y^{-1} \cdot (y \cdot w) \tag{4.15}$$

következik. A 3.5. Definíció egyenletéből már levezetett (m_2) $y = z^{-1}$, $x \cdot z^{-1} = r$ helyettesítéssel (4.13) és (4.12) miatt

$$(r \cdot z) \cdot z^{-1} = r \tag{4.16}$$

egyenletet ad minden $r, z \in \mathbf{G}$ -re. (4.15)-et jobbról $(y \cdot w)^{-1}$ -gyel szorozva (4.16) révén $(r = y^{-1}, z = y \cdot w)$ $w \cdot (y \cdot w)^{-1} = y^{-1}$ egyenletet, és ezt balról w^{-1} -gyel szorozva (4.15) miatt

$$(y \cdot w)^{-1} = w^{-1} \cdot y^{-1} \tag{4.17}$$

egyenletet kapunk. (m_2) -ben x, y, z helyébe rendre x^{-1}, y^{-1}, z^{-1} -t írva, és utána (4.17)-et használva

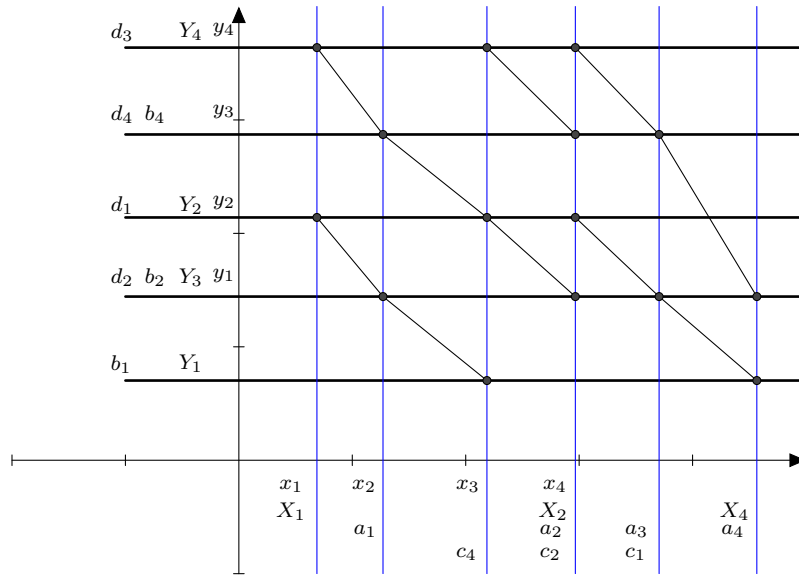
$$((y \cdot x)^{-1} \cdot z^{-1}) \cdot y^{-1} = x^{-1} \cdot ((z \cdot y)^{-1} \cdot y^{-1}),$$

majd

$$(z \cdot (y \cdot x))^{-1} \cdot y^{-1} = x^{-1} \cdot (y \cdot (z \cdot y))^{-1},$$

végül

$$(y \cdot (z \cdot (y \cdot x)))^{-1} = ((y \cdot (z \cdot y)) \cdot x)^{-1},$$



4.4. ábra

ami a balinverznek az egyértelműsége miatt éppen az (m_1) -et adja, és ezzel az állítást bizonyítottuk.

(B_1) és $(B_2) \Rightarrow (B_3)$

Tegyük fel, hogy tetszőleges x_j -kre és y_j -kre (B_1) és (B_2) teljesül, és kérdés az, hogy tetszőleges $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ esetén teljesül-e (B_3) , vagyis

$$x_1y_2 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_4 = x_2y_3 = x_3y_2 = x_4y_1 \quad (4.18)$$

egyenletből következik-e

$$x_3y_4 = x_4y_3. \quad (4.19)$$

Vezessük be (4.4. ábra) a

$$X_1 = x_1, X_2 = x_4, Y_2 = y_2, Y_3 = y_1, Y_4 = y_4 \quad (4.20)$$

jelöléseket, akkor (4.18) egyenletből

$$X_1Y_4 = X_2Y_3, \quad (4.21)$$

és definiáljuk Y_1 -et és X_4 -et

$$X_1Y_2 = X_2Y_1 \text{ illetve } X_2Y_2 = X_4Y_1 \quad (4.22)$$

egyenletekkel. (4.21) és (4.22) épp (B_1) feltevés része, tehát teljesül a követelmény rész is:

$$X_2Y_4 = X_4Y_3. \quad (4.23)$$

Vezessünk be új jelöléseket

$$a_1 = x_2, a_2 = X_2 = x_4, a_4 = X_4, b_1 = Y_1, b_2 = Y_3 = y_1, b_4 = y_3. \quad (4.24)$$

(4.18), (4.20), (4.22) és (4.18) miatt teljesül

$$a_1b_2 = x_2y_1 = x_1y_2 = X_1Y_2 = X_2Y_1 = a_2b_1 \text{ és } a_1b_4 = x_2y_3 = x_4y_1 = a_2b_2,$$

és definiáljuk a_3 -at

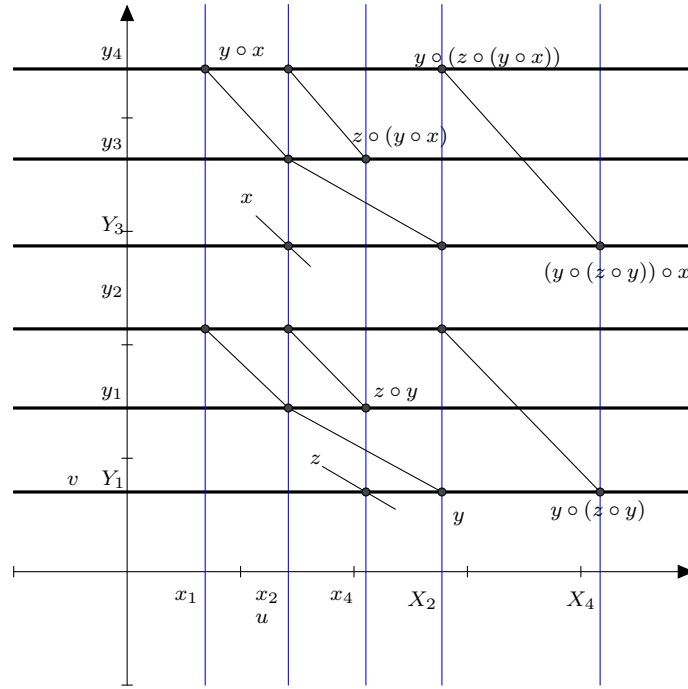
$$a_3b_2 = a_4b_1 \quad (4.25)$$

egyenlettel. Így (B_2) feltevés része teljesül, tehát a következmény rész is

$$a_3b_4 = a_4b_2. \quad (4.26)$$

Végül a

$$\begin{aligned} c_1 &= a_3, c_2 = a_2 = X_2 = x_4, c_4 = x_3, \\ d_1 &= Y_2 = y_2, d_2 = b_2 = Y_3 = y_1, d_3 = Y_4 = y_4, d_4 = b_4 = y_3 \end{aligned} \quad (4.27)$$



4.5. ábra

jelölésekkel a (4.27), (4.25), (4.24), (4.22) és újra (4.27) miatt kapjuk

$$c_1 d_2 = a_3 b_2 = a_4 b_1 = X_4 Y_1 = X_2 Y_2 = c_2 d_1,$$

továbbá az (4.27), (4.26), (4.24), (4.23) és (4.27) miatt kapjuk

$$c_1 d_4 = a_3 b_4 = a_4 b_2 = X_4 Y_3 = X_2 Y_4 = c_2 d_3$$

és (4.27), (4.18) miatt pedig kapjuk

$$c_2 d_2 = x_4 y_1 = x_3 y_2 = c_4 d_1.$$

Tehát (B_1) feltevés része ismét teljesül, így a következmény rész is:

$$c_2 d_4 = c_4 d_3,$$

vagyis (4.27) szerint valóban teljesül (4.19) és ezzel az állítás ezen részét is be bizonyítottuk. (B) definíciója $((B_1), (B_2)$ és (B_3) együttes teljesülése) miatt ennek a résznek a feltevése másképp azt jelenti, hogy

$$((B_1) \text{ és } (B_2)) \Leftrightarrow (B).$$

$$(B_1) \Rightarrow (m_1)$$

Rögzítsük (4.5. ábra) $x_2 = u$, $Y_1 = v$ -t, akkor tetszőlegesen megadott x , y , z -hez van olyan x_1 , y_1 , y_2 , y_3 , x_4 , y_4 , X_2 , Y_3 , X_4 , hogy

$$x = u Y_3, \quad z = x_4 v \quad (4.28)$$

(ezek meghatározzák Y_3 , x_4 -et),

$$y = u y_1 = x_2 y_1 = X_2 Y_1 = X_2 v \quad (4.29)$$

(ez meghatározza y_1 , X_2 -t), továbbá

$$z \circ y = x_4 v \circ u y_1 = x_4 y_1 = x_2 y_2 = u y_2, \quad (4.30)$$

$$y \circ (z \circ y) = X_2 v \circ u y_2 = X_2 y_2 = X_4 Y_1 = X_4 v \quad (4.31)$$

(ez X_4 -et értelmezi), valamint (4.29) kiegészítésül

$$y = x_2 y_1 = X_2 Y_1 = x_1 y_2 \quad (4.32)$$

(ez x_1 -et értelmezi), és (4.2), (4.28) és (4.29) figyelembe vételével

$$y \circ x = X_2 v \circ u Y_3 = X_2 Y_3 = x_1 y_4 = x_2 y_3 = u y_3 \quad (4.33)$$

(ez végül y_3 és y_4 -et értelmezi). (4.32), (4.33), (4.30) szerint (B_1) feltétel része fennáll

$$x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad \text{és} \quad x_1 y_4 = x_2 y_3 x_2 y_2 = x_4 y_1,$$

tehát a következmény része is:

$$x_2 y_4 = x_4 Y_3,$$

akkor pedig, figyelembe véve (4.28), (4.33), (4.2)-at is

$$z \circ (y \circ x) = x_4 v \circ u y_3 = x_4 y_3 = x_2 y_4 = u y_4$$

és (4.29), (4.2) összefüggéssel

$$y \circ (z \circ (y \circ x)) = X_2 v \circ u y_4 = X_2 y_4. \quad (4.34)$$

Másrészt (4.32), (4.33), (4.31) miatt

$$x_1 y_1 = X_2 Y_1, \quad \text{és} \quad x_1 y_4 = X_2 Y_3, \quad \text{és} \quad x_2 y_2 = X_4 Y_1,$$

vagyis ismét teljesül (B_1) feltétel része, tehát igaz a következmény része:

$$X_2 y_4 = X_4 Y_3.$$

De akkor (4.31), (4.28), (4.2) és (4.34) miatt

$$(y \circ (z \circ y)) \circ x = X_4 v \circ u Y_3 = X_4 Y_3 = X_2 y_4 = y \circ (z \circ (y \circ x)),$$

ez éppen azt jelenti, hogy a $(\mathbf{G}, \circ)$ loop rendelkezik az (m_1) tulajdonsággal. Bizonyítás ezen részével is végeztünk. Mivel pedig (B_2) úgy áll elő (B_1) -ből, hogy az x_j -k és y_j -k szerepét felcseréljük (geometriailag ez a vízszintes és a függőleges tengely felcserélését jelenti) és hasonló felcserélés

$$x \circ y = s v \circ u t = s t$$

egyenletet átviszi

$$y \circ x = t' v \circ u s' = t' s'$$

egyenletbe, (4.6. ábra szemléletesen mutatja, hogy a vízszintes és a függőleges tengelyek szerepe felcserélődik az $x \circ y$ -ről $y \circ x$ -re való áttéréssel) tehát az (m_1) -nek $(\mathbf{G}, \circ)$ -ben megfelelő (éppen bebizonyított)

$$y \circ (z \circ (y \circ x)) = (y \circ (z \circ y)) \circ x$$

egyenletet átviszi

$$((x \circ y) \circ z) \circ y = x \circ ((y \circ z) \circ y)$$

egyenletbe, ami éppen az (m_2) -nek megfelelő egyenlet $(\mathbf{G}, \circ)$ -re, ezért az előző bizonyításból következik

$$(B_2) \Rightarrow (m_2),$$

és így az eddig bebizonyítottak miatt

$$(B) \Rightarrow (m)$$

is. Ha u és v -t végigfuttatjuk $\mathbf{G}$ -n, akkor látjuk, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden FL-izotópjában teljesül (m_1) , illetve 3.5. Definíció, mivel ezek izomorf loopokra is öröklődnek, ezért (B_1) -ből, illetve (B_2) -ből, illetve (B) -ből következik, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden loop-izotópja kielégíti (m_1) -et, illetve (m_2) -t, illetve 3.5. Definíciót, tehát Moufang-loop.

$$(m_1) \Rightarrow (B_1)$$

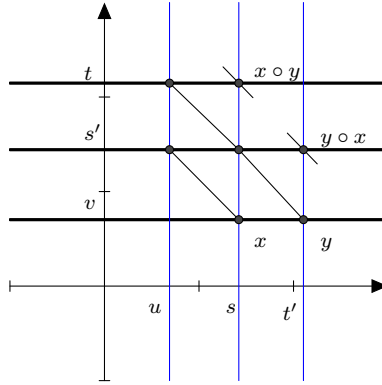
A felcserélhetőség miatt $(m_2) \Rightarrow (B_2)$ esetre nem szükséges bebizonyítani. Előzőekben láttuk, hogy (m_1) -ből következett (4.14). Másrészt (m_1) -ből $z = y^{-1}$ (vagyis $zy = e$) és $yx = e$ -vel $yz = e$ (a balinverz egyúttal jobbinverz is), tehát $y = z^{-1}$, amivel (4.14)

$$z^{-1} \cdot (z \cdot w) = w \quad (4.35)$$

egyenletbe megy át. Tehát a hálózat azon kvázicsoportjára, melyben (m_1) teljesül, egyúttal ez is igaz. Akkor viszont (B_1) is áll e kvázicsoportban

$$x_1 y_2 = x_2 y_1, \quad (4.36)$$

$$x_1 y_4 = x_2 y_3 \quad (4.37)$$



4.6. ábra

és

$$x_2 y_2 = x_4 y_1 \quad (4.38)$$

együttes fennállásából következik

$$x_2 y_4 = x_4 y_3. \quad (4.39)$$

Valóban, (4.36) egyenletet balról x_1^{-1} -gyel szorozva (4.35) miatt $y_2 = x_1^{-1} \circ (x_2 \circ y_1)$, és (4.38) egyenletből (m_1) figyelembe vételével

$$x_4 y_1 = x_2 y_2 = x_2 (x_1^{-1} \cdot (x_2 \cdot y_1)) = (x_2 \cdot (x_1^{-1} \cdot x_2)) \cdot y_1.$$

Az $x_4 y_1 = z$ egyenletnek x_4 -re a megoldása

$$x_4 = x_2 \cdot (x_1^{-1} \cdot x_2),$$

tehát (m_1) , (4.37) és (4.35) felhasználásával

$$x_4 y_3 = (x_2 \cdot (x_1^{-1} \cdot x_2)) \cdot y_3 = x_2 \cdot (x_1^{-1} \cdot (x_2 \cdot y_3)) = x_2 \cdot (x_1^{-1} \cdot (x_1 \cdot y_4)) = x_2 y_4,$$

és ez éppen (4.39), tehát (B_1) e kvázicsoportban valóban teljesül. De akkor teljesül minden izotópjában, tehát az algebrai hálózathoz rendelt osztály minden kvázicsoportjában is. Ezzel 4.11. Tétel bizonyítását befejeztük. ■

4.12. Következmény. *Abel-csoporttal, ill. csoporttal, ill. Moufang-looppal, ill. (m_1) -et, ill. (m_2) -t kielégítő looppal izotóp minden loop Abel-csoport, ill. csoport, ill. Moufang-loop, ill. kielégíti (m_1) -et, ill. (m_2) -t*

4.13. Tétel. $(h) \Leftrightarrow (H)$.

Bizonyítás.

$$(H) \Rightarrow (h)$$

Tetszőleges

$$x_1 = u, \quad y_1 = v \quad (4.40)$$

x, y mellett x_2, y_2, x_3, y_3 választható úgy, hogy

$$x = u y_2 = x_2 v \quad (4.41)$$

(ez meghatározza x_2, y_2 -t), és akkor

$$x \circ x = x_2 v \circ u y_2 = x_2 y_2 = u y_3 = x_3 y_1, \quad (4.42)$$

(ami megadja x_3, y_3 -at), (4.40), (4.41) és (4.42) szerint teljesül (H) feltétel része is (vö. a 4.7. ábrával):

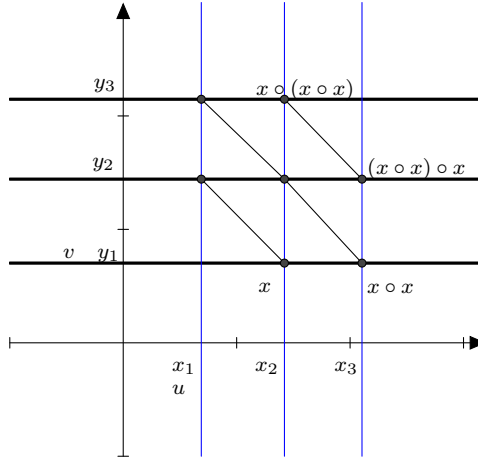
$$x_1 y_2 = x_2 y_1 \quad \text{és} \quad x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_3 y_1, \quad (4.43)$$

tehát áll a következmény rész is:

$$x_2 y_3 = x_3 y_2. \quad (4.44)$$

Mivel 4.41 és (4.42) egyenletből (4.2) miatt

$$(x \circ x) \circ x = x_3 v \circ u y_2 = x_3 y_2 \quad (4.45)$$



4.7. ábra

és

$$x \circ (x \circ x) = x_2 v \circ u y_3 = x_2 y_3, \quad (4.46)$$

ezért (4.44) egyenletből

$$(x \circ x) \circ x = x \circ (x \circ x), \quad (4.47)$$

vagyis, mivel u és v tetszőleges, minden FL-izotóp hatványasszociatív, és mivel (4.47) átöröklődik az izomorf loopokra, ezért $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden loopizotópja hatványasszociatív lesz, amivel ezt a részt be is bizonyítottuk.

$(h) \Rightarrow (H)$

Elég azt feltételezni, hogy minden $(\mathbf{G}, \circ)$ FL-izotópra teljesül (4.47) és bizonyítani, hogy akkor az osztály minden kvázicsoportjára érvényes (H) . Ezt az állítást a (4.40)–(4.47) képletek felhasználásával bizonyítjuk, csak most adott $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ mellett, melyek (H) feltevés részét kielégítik. Továbbá (4.40) azon u és v meghatározására szolgál, melyekkel (4.2) egyenletet felírjuk, tehát az adott kvázicsoport FL-izotópját kiválasztjuk. (4.41) x -et definiálja ($yy_2 = x_2v$ (4.40) és (4.43), azaz (H) feltevés része miatt). A (4.42) pedig (4.2) és (4.43) miatt igaz. Végül jobbról balra olvasva (4.45) és (4.46) is fennáll (4.2), (4.41) és (4.42) miatt, és így (4.47)-ből következik (4.44), vagyis érvényes (H) következmény része is, és ezzel a Tételt be is bizonyítottuk. ■

4.14. Definíció. (i) -tulajdonságú egy algebrai hálózat, ha a hozzárendelt kvázicsoport-osztály minden loop-izotópjára teljesül, hogy

$$x^{-1}x = e \Rightarrow xx^{-1} = e.$$

4.15. Tétel. (H) akkor és csak akkor teljesül minden $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbf{G}$ -re, ha a hálózathoz tartozó osztály minden loopjában minden $x \in \mathbf{G}$ -re az x^{-1} balinverz egyúttal jobbinverz is:

$$x^{-1}x = e \Rightarrow xx^{-1} = e.$$

Röviden

$$(i) \Leftrightarrow (H).$$

Bizonyítás.

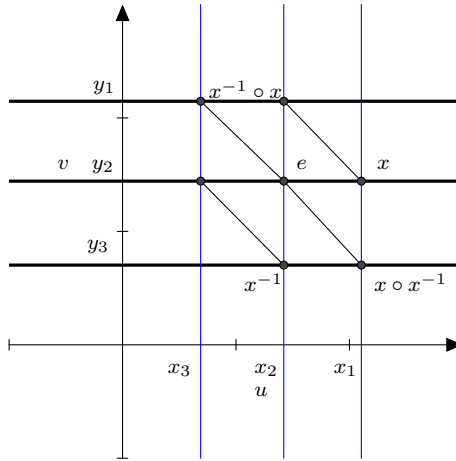
$(i) \Rightarrow (H)$

Tetszőleges $x_2 = u, y_2 = v$ mellett (4.7. ábra) x_1, y_1, x_3, y_3 választható úgy, hogy

$$x = x_1v = uy_1 \quad (4.48)$$

(ez megadja x_1, y_1 -et) és

$$uv = x_1y_3 = x_3y_1 \quad (4.49)$$



4.8. ábra

(ez x_3, y_3 -at adja meg). (4.48) és (4.49) azt mutatja, hogy (H) feltevésrésze teljesül, fennáll tehát a következmény is

$$uy_3 = x_3v. \quad (4.50)$$

A (4.2) egyenlettel definiált $(\mathbf{G}, \circ)$ FL-izotópnak, mint a 4.7. Tétel bizonyítása előtt láttuk,

$$uv = e \quad (4.51)$$

egységeleme. x^{-1} -et, mely ebben a loopban lesz majd x kétoldali inverze (tehát $(\mathbf{G}, \circ)$ -ban és nem $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ban, amely nem is szükségképpen loop), így definiáljuk:

$$x^{-1} = x_3v = uy_3,$$

ami (4.50) miatt jogos. Erre az x^{-1} -re valóban igaz (4.48), (4.2), (4.49) és (4.51) miatt

$$x^{-1} \circ x = x_3v \circ uy_1 = x_3y_1 = uv = e$$

és

$$x \circ x^{-1} = x_1v \circ uy_3 = x_1y_3 = uv = e.$$

Az $y \circ x = e$ egyenletnek csak egy y megoldása lévén, ez éppen az általunk definiált x^{-1} , és arra $x \circ x^{-1} = e$ -t is kaptunk, tehát bármely FL-izotópra érvényes a 4.14. Definíció. Mivel pedig ez a tulajdonság izomorf loopokra öröklődik, ezért a hálózathoz rendelt osztály minden loopjában érvényes marad, amivel ezt a részt be is bizonyítottuk.

(i) $\Rightarrow$ (H)

Abból, hogy minden Fl-izotóp bármely elemének balinverze egyenlő a jobbinverzzel, már következik (H). Legyen $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ adott, hogy (H) feltevés része teljesüljön:

$$x_1y_1 = x_2y_1 \text{ és } x_1y_3 = x_2y_2 = x_3y_1, \quad (4.52)$$

$$u = x_2, v = y_2, x = x_1v = uy_1, \quad (4.53)$$

és értelmezzük

$$y = x_3v, z = uy_3 \quad (4.54)$$

egyenletet akkor (4.2) és (4.52) miatt $e = uv = x_1y_3 = x_3y_1$ és (4.54), (4.53), (4.2) miatt

$$y \circ x = x_3v \circ uy_1 = x_3y_1 = e, x \circ z = x_1v \circ uy_3 = x_1y_3 = e,$$

tehát y balinverze, z jobbinverze x -nek $(\mathbf{G}, \circ)$ -ben. (i) miatt $z = y$, tehát (4.54) és (4.53) szerint

$$x_2y_3 = x_3y_2,$$

vagyis (H) következmény része is teljesül és ezzel kész a bizonyítás. ■

4.16. Következmény. $(h) \Leftrightarrow (i)$.

4.17. Definíció. Ha tudjuk, hogy $x^{-1}x = xx^{-1} = x^0 = e$, akkor az x^n *hatványozást* az alábbi rekurzív módon tudjuk definiálni:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= xx^n & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ x^n &= (x^{-1})^{-n} & (n = -1, -2, \dots), \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.18. Definíció. (e) -tulajdonságú egy algebrai hálózat, ha a hozzárendelt kvázicsport-osztály minden loop-izotópjára teljesül:

$$x^m x^n = x^{m+n} \text{ minden egész } m, n\text{-re.} \quad (4.56)$$

4.19. Lemma. (H) ekvivalens azzal, hogy minden $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbf{G}$ -re

$$(H') \quad (x_1 y_1 = x_2 y_1 \text{ és } x_2 y_3 = x_3 y_2 \text{ és } x_2 y_2 = x_3 y_1) \Rightarrow x_1 y_3 = x_2 y_2.$$

Bizonyítás.

$$(H) \Rightarrow (H')$$

Legyen (H') első része érvényes

$$x_1 y_2 = x_2 y_1, \quad x_2 y_2 = x_3 y_1, \quad x_2 y_3 = x_3 y_2, \quad (4.57)$$

és definiáljuk y'_3 -at úgy, hogy

$$x_1 y'_3 = x_2 y_2. \quad (4.58)$$

De akkor $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y'_3$ -ra (H) feltevés része érvényes

$$x_1 y_2 = x_2 y_1 \text{ és } x_1 y'_3 = x_2 y_2 = x_3 y_1,$$

tehát áll a következmény rész is:

$$x_2 y'_3 = x_3 y_2.$$

Ezt (4.57) egyenlettel összehasonlítva azt kapjuk, hogy $y'_3 = y_3$, tehát (4.58) szerint

$$x_1 y_3 = x_2 y_2,$$

ami éppen (H') következmény része.

$$(H') \Rightarrow (H)$$

A bizonyítás ezen részét ugyanúgy kell végigvezetni, mint az előbbieken. ■

4.20. Tétel. $(e) \Leftrightarrow (H)$

Bizonyítás. Mivel (H) már (h) -ből is következik, melyek (e) speciális esetei, ezért csak a $(H) \Rightarrow (e)$ -t kell bizonyítani, melyet négy részletben teszünk.

A) (H) -ből következik $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden $(\mathbf{G}, \circ)$ FL-izotópjának minden elemére, hogy

$$x^m \circ x^n = x^{m+n} \text{ minden } m \geq 0, n \geq 0\text{-ra.} \quad (4.59)$$

Ezt m és n szerint haladó teljes indukcióval bizonyítjuk: (4.59) érvényes $m = 0$ mellett tetszőleges n -re és $n = 0$ mellett tetszőleges m -re a (4.55) egyenleteknek $(\mathbf{G}, \circ)$ -ben megfelelő értelmezése és a (4.12) loop-tulajdonság miatt

$$x^0 \circ x^n = e \circ x^n = x^n = x^{0+n}, \quad x^m \circ x^0 = x^m \circ e = x^{m+0}.$$

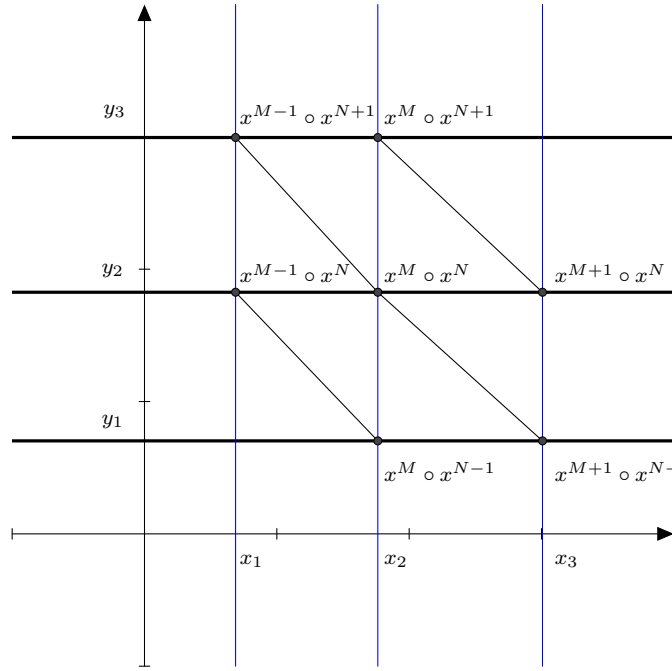
(4.59) érvényes $m = 1$ mellett is tetszőleges n -re (4.55) miatt

$$x^1 \circ x^n = x \circ x^n = x^{n+1}.$$

Azt bizonyítjuk, hogy amennyiben (4.59) igaz $m = M - 1$ és $m = M$ mellett minden n -re és $m = M + 1$ mellett $n = N - 1$ -re, akkor

$$m = M + 1, \quad n = N$$

egyenletre is igaz. Ebből valóban következik minden nemnegatív m, n -re: $m = 0$ és $m = 1$ mellett minden n -re érvényes; $m = 2, n = 0$ -ra is érvényes, ebből következik, hogy $m = 2, n = 1$ -re is érvényes ($M = 1, N = 1$), akkor pedig $m = 2, n = 2$ -re is ($M = 1, N = 2$) és így tovább, ha pedig már M -ig tartó minden m mellett minden n -re igaz, akkor $m = M + 1$ esetén is igaz lévén $n = 0$ -ra, ebből $n = 1$ -re is igaz ($M = M, N = 1$) ebből $n = 2$ -re ($N = 2$) és így tovább, ha pedig $m = M + 1$ mellett már $N - 1$ -ig minden n -re, akkor N -re is stb.



4.9. ábra

Ez a következőképpen hajtható végre: $u, v, x^{M-1}, x^M, x^{M+1}, x^N, x^{N+1}$ adott, az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned} x^{M+1} \circ x^N &= x^{M+N-1} = x^M \circ x^{N-1}, \\ x^{M-1} \circ x^{N+1} &= x^{M+N} = x^M \circ x^N = x^{M+1} \circ x^{N-1}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

és

$$x^M \circ x^{N+1} = x^{M+N+1}. \quad (4.61)$$

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ meghatározható úgy, hogy

$$x^{M-1} = x_1 v, \quad x^M = x_2 v, \quad x^{M+1} = x_3 v, \quad (4.62)$$

(ami meghatározza x_1, x_2, x_3 -at), és

$$x^{N-1} = u y_1, \quad x^N = u y_2, \quad x^{N+1} = u y_3, \quad (4.63)$$

(ami meghatározza y_1, y_2, y_3 -at). Akkor (4.2) és (4.60) miatt (4.9. ábra)

$$x_1 y_2 = x_1 v \circ u y_2 = x^{M-1} \circ x^N = x^M \circ x^{N-1} = x_2 v \circ u y_1 = x_2 y_1;$$

$$x_1 y_3 = x_1 v \circ u y_3 = x^{M-1} \circ x^{N+1} = x^M \circ x^N =$$

$$x_2 v \circ u y_2 = x_2 y_2 = x^{M+1} \circ x^{N-1} = x_3 v \circ u y_1 = x_3 y_1,$$

tehát (H) feltevés része teljesül, így érvényes a következmény is:

$$x_2 y_3 = x_3 y_2,$$

vagyis (4.62), (4.63), (4.2) és (4.61) miatt

$$x^{M+1} \circ x^N = x_3 v \circ u y_2 = x_3 y_2 = x_2 y_3 = x_2 v \circ u y_3 = x_2 v \circ u y_3 = x^M \circ x^{N+1} = x^{M+N+1}$$

és ez volt az állítás (a (4.44)-nak megfelelő egyenlőség érvényes $m = M + 1, n = N$ -re). Mivel u és v változtatásával bármely FL-izotópot előállíthatjuk, ezért ezzel A) be van bizonyítva.

B) (H) -ből következik minden FL-izotóp minden elemére, hogy

$$x^m \circ x^n = x^{m+n} \quad \text{minden } m < 0, n < 0\text{-ra.}$$

4.55. Definíció miatt ez azonnal következik A)-ból, ha x -et x^{-1} -gyel helyettesítjük.

C) (H) -ból következik minden FL-izotóp minden elemére, hogy

$$x^m \circ x^n = x^{m+n} \quad \text{minden } m < 0, n \geq 0\text{-ra.}$$

Azt kell bebizonyítanunk, hogy minden FL izotóp minden elemére

$$x^{-r} \circ x^n = x^{-r+n} \quad (r > 0, n \geq 0). \quad (4.64)$$

Ez is egy r és n szerint haladó teljes indukcióval bizonyítjuk: (4.64) igaz $r = -1$ és $r = 0$ mellett minden $n = 0$ -ra A) miatt, továbbá $n=0$ mellett minden r -re $x = e$ miatt. Azt igazoljuk, hogy

$$x^{-R+1} \circ x^n = x^{-R+n+1} \quad (4.65)$$

$$x^{-R} \circ x^n = x^{-R+n} \quad (4.66)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$) és

$$x^{-R-1} \circ x^N = x^{-R+N-1} \quad (4.67)$$

egyenletből következik

$$x^{-R-1} \circ x^{N+1} = x^{-R+N} \quad (4.68)$$

is. Ezzel mi minden pozitív (nemnegatív) r , n -re igazoljuk (4.64) egyenletet. Teljes indukció végrehajtásához adott $u, v, x^{-R-1}, x^{-R+1}, x^{N-1}, x^N, x^{N+1}$ mellett válasszuk $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ -at úgy, hogy

$$\begin{aligned} x^{-R-1} &= x_1 v, \quad x^{-R} = x_2 v, \quad x^{-R+1} = x_3 v, \quad x^{N-1} = u y_1, \\ x^N &= u y_2, \quad x^{N+1} = u y_3, \end{aligned}$$

akkor (4.2) és (4.67), (4.66), (4.65) miatt

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= x_1 v \circ u y_2 = x^{-R-1} \circ x^N = x^{-R+N-1} = \\ &= x^{-R} \circ x^{N-1} = x_2 v \circ u y_1 = x_2 y_1; \\ x_2 y_3 &= x_2 v \circ u y_3 = x^{-R} \circ x^{N+1} = x^{-R+N+1} = \\ &= x^{-R+1} \circ x^N = x_3 v \circ u y_2 = x_3 y_2; \\ x_2 y_2 &= x_2 v \circ u y_2 = x^{-R} \circ x^N = x^{-R+N} = \\ &= x^{-R+1} \circ x^{N-1} = x_3 v \circ u y_1 = x_3 y_1 \end{aligned}$$

tehát teljesül (H') feltételrésze és így a következmény is

$$x_1 y_3 = x_2 y_2,$$

és ezért

$$x^{-R-1} \circ x^{N+1} = x_1 v \circ u y_3 = x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_2 v \circ u y_2 = x^{-R} \circ x^N = x^{-R+N}$$

, ami éppen a bizonyítandó (4.68) egyenlőség. A bizonyítás $r = -1$ -nél is érvényes, mert $R = 0$ -ra (4.65) és (4.66) triviális, míg $R = 0, N = 1$ esetén 4.14. Definíció miatt érvényes (4.67), akkor pedig a fenti meg gondolás már (4.68) összefüggést adja. Tehát (4.67) érvényes $N = 2$ -re is; újra (4.68) miatt $N = 3$ -ra is fennáll (4.67) és így tovább. Így a bizonyítás C) része is kész. ■

D) (H) -ból következik minden FL-izotóp minden elemére, hogy

$$x^m \circ x^n = x^{m+n} \quad \text{minden } m \geq 0, n < 0\text{-ra.}$$

Ez az állítás C)-ból x -nek x^{-1} -gyel való helyettesítésével következik, mivel a 4.15. Tétel értelmében (H) -ból (i), vagyis minden FL-izotópra 4.14. Definíció teljesül és így $(x^{-1})^{-1} = x$. Most már (4.56)-at minden FL-izotópra és minden egész m, n -re bebizonyítottuk, és mivel nyilván ez a tulajdonság is öröklődik izomorf loopokra, ezért a hálózathoz rendelt osztály minden loopjára érvényes marad (4.55), amivel a 4.20. Tétel bizonyítását be is fejeztük. ■

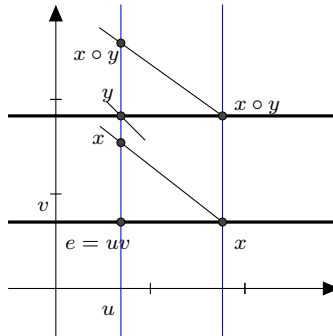
4.21. Következmény. $(h) \Leftrightarrow (e)$

5. ALGEBRAI HÁLÓZATOK II

Megismertük az algebrai hálózatok egyféle definícióját, de más módon is lehet definiálni őket. Lehet egy hálózathoz a kvázicsoport-osztályból csak loop-ot rendelni. Ez azt jelenti, hogy a hálózathoz $(\mathbf{G}, \cdot)$ helyett annak FL-izotópját $(\mathbf{G}, \circ)$ -t rendeljük hozzá. Ha ábrázolni szeretnénk, ez azt jelentené, hogy a függőleges tengelyt u -val jelölnénk a vízszintest v -vel eltoljuk, hogy az origo az $e = uv$ pontba, az egységelembe, kerüljön. Ez kapcsolatba hozható a hálózatok egy másik absztrakt tárgyalásával.

5.1. Definíció. Folytonossági feltevés nélkül legyen $\mathbf{H}$ egy nem üres halmaz. Három részhalmaz-osztályát 1-görbéknek, 2-görbéknek és 3-görbéknek, a részhalmazokat pedig görbéknek, a $\mathbf{H}$ elemeit pontoknak nevezzük, és $\mathbf{H}$ -t 3-hálózatként, ha teljesülnek, hogy $\mathbf{H}$ minden pontját pontosan egy i -görbe ($i = 1, 2, 3$) tartalmazza, és pontosan egy közös eleme van egy i -görbének és egy j -görbének, ha $i \neq j$.

A három görbék halmaza közül, bármely görbék halmaza kölcsönösen egyértelmű módon leképezhető valamely másik görbék halmazára. Ebből következik, hogy mindhárom halmaz kölcsönösen egyértelmű módon leképezhető ugyanazon $\mathbf{G}$ halmazra. Ekkor értelmezhetünk műveletet is, ha az $x \in \mathbf{G}$ -hez rendelt 1-görbe és az $y \in \mathbf{G}$ -hez rendelt 2-görbe közös pontját tartalmazó 3-görbéhez rendelt $z \in \mathbf{G}$ elemet értelmezzük $z = xy$ -nak. Erre a műveletre nézve $\mathbf{G}$ kvázicsoportot alkot. Generáljunk loop-ot úgy, hogy kiválasztjuk, hogy $\mathbf{G}$ melyik eleme legyen az egységelem, illetve $\mathbf{H}$ melyik pontja az egységpont. Ekkor az 1-, 2- és 3-görbék közül kiválasztjuk azt az egyet-egyet, melyek átmennek az egységponton, és kölcsönösen egyértelmű leképezéssel elérhetjük, hogy ezen görbék ugyanazon $\mathbf{G}$ -beli elemhez tartozzanak. Ezek után a $\circ$ művelet $x \circ y$ eredményét úgy definiálva, hogy az x -hez rendelt 1-görbe és y -hoz rendelt 2-görbe közös pontját tartalmazó 3-görbéhez tartozó $\mathbf{G}$ -beli elemet adjuk. Szemléletesen:



5.1. ábra

A kitüntetett 1-görbe — a továbbiakban "tengely" — pontjait azonosítjuk az őket tartalmazó 2- vagy 3-görbéhez újonnan rendelt $\mathbf{G}$ -beli elemmel. Az x és y elemet megkeressük a tengelyen és az x -hez rendelt (és ezért most már x -et tartalmazó) 3-görbének a kitüntetett 2-görbével közös pontján átmenő 1-görbe és az y -hoz tartozó 2-görbe közös pontján átmenő 3-görbének a tengellyel közös pontja lesz $x \circ y$ (5.1. ábra).

5.2. Definíció. A $(\mathbf{G}, \cdot)$ helyett a $z = xy$ egyenlet $y = x \setminus z$ vagy $x = z / y$ megoldásából származó $\setminus$ vagy $/$ művelettel ellátott $(\mathbf{G}, \setminus)$ vagy $(\mathbf{G}, /)$, továbbá ezen három művelet tényezőinek felcserélésével adódó újabb 3 kvázicsoportokat az eredeti $(\mathbf{G}, \cdot)$ -tal *parasztofikusnak* nevezzük.

Geometriailag a parasztofikus kvázicsoportokra való áttérésnek a hálózat 1-, 2- és 3-görbéinek felcserélése felel meg. Ezen felcseréléseknél a záródási feltételek öröklődnek, csak az i - és j -görbék felcserélésénél (B_i) átmeny (B_j) -be ($i, j = 1, 2, 3$). Alábbiakban (H) átvitelét bizonyítom $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ből $(\mathbf{G}, \setminus)$ -be.

5.3. Tétel. Ha (H) teljesül $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ban minden x_j, y_i -re ($i, j = 1, 2, 3$), akkor $(\mathbf{G}, \setminus)$ -ben is

$$(x_1 \setminus y_2 = x_2 \setminus y_1 \text{ és } x_1 \setminus y_3 = x_2 \setminus y_2 = x_3 \setminus y_1) \Rightarrow x_2 \setminus y_3 = x_3 \setminus y_2$$

tetszőleges x_i, y_j -re ($i, j = 1, 2, 3$).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ -ban (H) teljesül minden x_j , y_j -re és tekintsünk tetszőleges x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , x_3 , y_3 -at, melyek

$$x_1 \setminus y_2 = x_2 \setminus y_1 \quad (5.1)$$

és

$$x_1 \setminus y_3 = x_2 \setminus y_2 = x_3 \setminus y_1 \quad (5.2)$$

összefüggést kielégítik. Igazolnunk kell, hogy

$$x_2 \setminus y_3 = x_3 \setminus y_2 \quad (5.3)$$

is teljesül. Jelöljük a (5.1) egyenlet két oldalának közös értékét z_1 -gyel, a (5.2) összefüggésbeli közös értéket z_2 -vel és

$$x_3 \setminus y_2 = z_3 \quad (5.4)$$

-mal. A $\setminus$ művelet értelmezése folytán akkor

$$y_1 = x_2 z_1 = x_3 z_2, \quad y_2 = x_1 z_1 = x_2 z_2 = x_3 z_3$$

és

$$y_3 = x_1 z_2 \quad (5.5)$$

vagy

$$X_1 = x_3, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_1, \quad Y_1 = z_1, \quad Y_2 = z_2, \quad Y_3 = z_3 \quad (5.6)$$

jelöléssel

$$X_1 Y_2 = X_2 Y_1 \quad \text{és} \quad X_1 Y_3 = X_2 Y_2 = X_3 Y_1,$$

ami éppen (H) feltétel része. Teljesül tehát (H) következmény része is

$$X_2 Y_3 = X_3 Y_2,$$

vagyis (5.5) és (5.6) összefüggéssel

$$x_2 z_3 = x_1 z_2 = y_3,$$

tehát a $\setminus$ művelettel

$$z_3 = x_2 \setminus y_3,$$

ami (5.4) összefüggéssel egybevetve éppen a bizonyítandó (5.3) összefüggést adja, amivel végeztünk is a tétel bizonyításával. $\blacksquare$

Hasonló módon bizonyítható mindegyik záródási feltétel öröklődése mindegyik parasztrifikusra.

6. GEOMETRIAI HÁLÓZATOK REGULARITÁSA

Most visszatérnénk a 2.3. Tétel bizonyítására. A 2.2 Tétel értelmében elég bebizonyítani, hogy (T) szükséges, (H) elégséges a regularitáshoz. Az 4.7 Tétel szerint (T) azzal ekvivalens, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ -nak legyen olyan izotópja, mely Abel-csoport, (2.1) pedig azt mutatja, hogy a számegeyesnek az xy eredményű művelettel ellátott szakasza izotóp a közönséges összeadással mint művelettel ellátott valós számegeyesessel. Mivel az utóbbi Abel-csoportot alkot, a bizonyítás ezen része kész is. A 4.20. Tétel (H) azzal ekvivalens, hogy $(\mathbf{G}, \cdot)$ minden loop izotópja erősen hatványasszociatív. Mivel a feltevés szerint geometriai hálózatoknál a $z = xy$ függvény folytonos, ezért az FL-izotópbeli művelet is folytonos függvény. Egy ilyen FL-izotóp erős hatványasszociativitásából már le lehet vezetni (2.1) összefüggést.

6.1. Tétel. *Ha az (a, b) véges vagy végtelen valós számköz a folytonos xy műveletre nézve loop-ot alkot, melynek egységeleme e és amely erősen hatványasszociatív, vagyis a 4.17. Definícióval megadott hatványozásra (4.56) teljesül, akkor ez a loop izomorf a valós számok összeadási csoportjával, tehát létezik olyan folytonos leképezés, mely ezt az izomorfiát létrehozza.*

Bizonyítás. Az állítást több részállításra bontva bizonyítjuk.

A) $z = xy$ szigorúan monoton nő mindkét változóban.

Ugyanis például tetszőleges

$$y < z \quad (6.1)$$

összefüggésre

$$ey = y < z = ez,$$

és ha volna olyan x , hogy

$$xy \geq xz, \quad (6.2)$$

akkor $z = xy$ folytonossága miatt volna e és x közt olyan x_0 (ha (6.1) összefüggésben az egyenlőségjel érvényes, akkor $x_0 = x$), hogy

$$x_0 y = x_0 z,$$

de a kvázicsoporthulajdonság miatt ebből $y = z$, ellentétben a feltett (6.1) összefüggéssel. Hasonlóan bizonyítjuk az első változóban való növekedést.

B) *Ha n végigfut az egész számokon, és $x > e$, akkor x^n nő n -nel, ha pedig $x < e$, akkor x^n fogy n -nel.*

Ugyanis például $x > e$ esetén (4.55) értelmében és A) miatt

$$x^n + 1 = xx^n > ex^n = x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

és

$$ex = x > e = x^{-1}x,$$

tehát ugyancsak A) miatt

$$x^{-1} < e,$$

és akkor $n = -m < 0$ -ra szintén (4.55) és A) miatt

$$x^n = (x^{-1})^m = x^{-1}(x^{-1})^{m-1} < e(x^{-1})^{m-1} = x^{n+1}.$$

B)-ből következik, hogy $x^n > x$, ha $x > e$, $n > 1$, és $x^n < x$, ha $x < e$, $n > 1$, viszont $x^n < x^{-1} < e$, ha $x > e$, $n < -1$, és $x^n > x^{-1} > e$, ha $x < e$, $n < -1$.

C) x^n (rögzített pozitív egész n esetén) folytonos szigorúan növekvő függvénye x -nek. xy feltett folytonossága és A)-ban bizonyított szigorú növekedése miatt $x^2 = x$ folytonos és szigorúan nő x -ben, ha pedig már x^n folytonos, és szigorúan nő x -ben, akkor $x^{n+1} = xx^n$ is.

D) x^n (rögzített pozitív egész n esetén) felvesz minden értéket az (a, b) intervallumon, ha x befutja (a, b) -t.

Legyen y tetszőlegesen előírt valós szám (a, b) -ben, például $y < e$, akkor B) szerint

$$y^n < y,$$

másképpen nyilván (vessük össze (4.55) összefüggéssel)

$$e^n = e > y.$$

x^n -nek C)-ben bizonyított folytonossága miatt van olyan x , hogy éppen

$$x^n = y \quad (6.3)$$

C) miatt minden $y \in (a, b)$ -re és minden pozitív egész n -re pontosan egy olyan x érték van, amely (6.3) összefüggésnek eleget tesz, ezt n -edik gyöknek nevezzük:

$$x = \sqrt[n]{y}.$$

Ezt visszahelyettesítve (6.3) összefüggésbe

$$(\sqrt[n]{y})^n = y \quad (6.4)$$

egyenletet kapunk.

E) *HA $c > e$, akkor $\sqrt[n]{c} > n$.*

Ugyanis ha $\sqrt[n]{c} \leq e$ lenne, akkor B) miatt $c = (\sqrt[n]{c})^n \leq e$ volna, a feltevéssel ellentétben.

F) *Minden $x \in (a, b)$ -re és minden egész m , k -ra $(x^m)^k = x^{mk}$. $k = 0, 1$ -re az állítás magától értetődik. Ha viszont k -ra már igaz, akkor (4.55) és (4.56) miatt*

$$(x^m)^{k+1} = x^m(x^m)^k = x^m x^{mk} = x^{m+mk} = x^{m(k+1)}.$$

Ezzel F)-et minden nemnegatív k -ra bebizonyítottuk. Negatív k -ra is könnyű a bizonyítás, de erre nem lesz szükségünk.

G) *Minden $c \in (a, b)$ -re, minden egész m -re és minden pozitív egész n, k -ra*

$$(\sqrt[n]{c})^m = (\sqrt[nk]{c})^{mk}.$$

Ugyanis

$$\sqrt[nk]{c} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{c}} \quad (6.5)$$

mert ha

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{c}} = x,$$

akkor a gyökvonás értelmezése szerint

$$\sqrt[n]{c} = x^k \quad \text{és} \quad c = (x^k)^n = x^{kn}.$$

F)-et is figyelembe véve tehát $x = \sqrt[n]{c}$, amivel (6.5) összefüggést igazoltuk. Akkor pedig (6.5), (6.4) és F) miatt

$$(\sqrt[n]{c})^{mk} = ((\sqrt[k]{\sqrt[n]{c}})^k)^m = (\sqrt[n]{c})^m.$$

Ezután értelmezhetjük az izomorfíát létrehozó F függvényt.

H) Az F függvénynek racionális számokra való

$$F\left(\frac{m}{n}\right) = (\sqrt[n]{c})^m \quad (n > 0) \quad (6.6)$$

($c > e$ állandó rögzített eleme (a, b) -nek) értelmezése egyértelmű, és kielégíti

$$F\left(\frac{k}{n} + \frac{m}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right)F\left(\frac{m}{n}\right) \quad (6.7)$$

egyenletet. F szigorúan növekvő a racionális számok körében. Az egyértelműség G)-ből, (6.7) viszont a (6.6) értelmezéséből és (4.56)-ból következik. Végül B) és E) miatt

$$F\left(\frac{m+1}{n}\right) = (\sqrt[n]{c})^{m+1} > (\sqrt[n]{c})^m = F\left(\frac{m}{n}\right),$$

tehát F valóban szigorúan nő racionális argumentumokra.

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow \infty} F(m) = b, \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(m) = a.$$

A két állítás bizonyítása nagyon hasonló, így elég csak az első bebizonyítani. Mivel $F(m)$ B) szerint nő m -mel, tehát van (véges vagy végtelen) határérték, és mivel $e < F(m) \in (a, b)$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(m) = b'$$

is e -től jobbra az (a, b) szakaszon vagy annak határán van. Ha b' az (a, b) szakaszon lenne, akkor a (6.7) miatt érvényes

$$F(2m) = F(m)F(m)$$

egyenlőségéből határátmenettel

$$b' = b' \quad \text{és} \quad b' > b'$$

(az utóbbi egyenlőtlenség B) miatt áll fenn), ami nem lehetséges. Tehát $b' = \lim_{x \rightarrow \infty} F(m) = b$, és ugyanígy $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(m) = a$ az (a, b) szakasz határán vannak, és nem tartoznak már (a, b) -hez, tehát nemcsak I)-t bizonyítottuk, hanem azt is, hogy a 2.10. Tételben szereplő (a, b) számköz (intervallum) mindkét oldalról nyitott.

J) $\lim_{x \rightarrow \infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = e$. Ugyanis az $F\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat H) miatt fogyó, és E) miatt minden tagja nagyobb, mint e , tehát

$$e' = \lim_{x \rightarrow \infty} F\left(\frac{1}{n}\right) \geq e.$$

Ha $e' > e$ volna, akkor a (6.7) miatt érvényes

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = F\left(\frac{1}{2n}\right)F\left(\frac{1}{2n}\right)$$

egyenlőségéből $n \rightarrow \infty$ határátmenettel, és B) miatt

$$e' = e'e' > e',$$

aminek lehetetlensége bizonyítja J)-t. Ezek után tetszőleges irracionális p -re is értelmezzük $F(p)$ -t. Legyenek r_n és R_n p -nek olyan alsó és felső közelítő törtjei, hogy

$$r_n \leq r_{n+1} < p < Rn + 1 \leq R_n \quad \text{és} \quad R_n - r_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Akkor H) miatt a $F(r_n) < F(R_n) = F(r_n + \frac{1}{n}) = F(r_n)F(\frac{1}{n})$, tehát $F(r_n)$ -nek van határértéke, $F(r_n) \rightarrow c$ és mivel xy folytonos, és J) szerint $F(\frac{1}{n}) \rightarrow e$, ezért $F(R_n)$ határértéke $ce = c$. $F(r_n)$ -nek és $F(R_n)$ -nek ezt a közös határértékét fogjuk $F(p)$ -ként értelmezni.

K) Az így kiterjesztett értelmezésű $F(p)$ szigorúan növekedő és folytonos. Ha ugyanis $p_1 < p_2$ tetszőlegesen, akkor van p_1 -nek olyan felső R , és p_2 -nek olyan alsó r közelítő törtje, hogy $R < r$ és így

$$F(p_1) \leq F(R) < F(r) \leq F(p_2),$$

tehát F valóban szigorúan monoton. De folytonos is, mert ha $p \rightarrow q$, és például $p > q$, akkor $F(q)$ értelmezése miatt megadhatjuk q és R_n felső közelítő törtjét úgy, hogy $F(R_n)$ eltérése $F(q)$ -től kisebb legyen, mint egy előírt kis ε

$$0 < F(R_n) - F(q) < \varepsilon$$

(ha q történetesen racionális, akkor válasszuk $R_n = q + 1/n$ -nek és megint

$$0 < F(R_n) - F(q) = F(q)F\left(\frac{1}{n}\right) - F(q) < \varepsilon$$

lesz); ha $p < R_n$, akkor

$$0 < F(p) - F(q) < F(R_n) - F(q) < \varepsilon,$$

ami éppen azt jelenti, hogy F folytonos.

L) F kielégíti minden valós p , q -ra a

$$F(p+q) = F(p)F(q) \quad (6.8)$$

egyenletet, továbbá minden $x \in (a, b)$ -re létezik F inverze $F^{-1}(x)$, és az kielégíti minden $x, y \in (a, b)$ -re a

$$xy = F(F^{-1}(x) + F^{-1}(y)) \quad (6.9)$$

egyenleteket. Ugyanis F folytonossága miatt (6.8) határátmenettel következik (6.7) összefüggésből, továbbá I) és K) miatt F minden (a, b) -beli értéket pontosan egyszer vesz fel, tetszőleges $x \in (a, b)$ -hez tehát pontosan egy olyan p valós szám van, hogy

$$F(p) = x.$$

Ez értelmezi F inverzét:

$$p = F^{-1}(x).$$

Ha most már $F(p) = x$ és $F(q) = y$, akkor (6.8) átmegy (6.9) összefüggésbe. L) éppen azt fejezi ki, hogy az (a, b) szakasz és az xy eredményű művelet által megadott loop izomorf a valós számok összeadáscsoportjával, így tehát a 6.1. Tételt bebizonyítottuk. ■

Végül, mint azt ennek a fejezetnek az elején láttuk, geometriai hálózatoknál (H)-ból következik, hogy (4.2) képlettel értelmezett FL-izotóp folytonos hatványasszociatív loop, és így a 6.1. Tétel szerint

$$x \circ y = F(F^{-1}(x) + F^{-1}(y)),$$

(4.2) szerint pedig

$$xy = xv \circ uy = F(F^{-1}(xv) + F^{-1}(uy)),$$

ami a nyilván szintén folytonos és szigorúan monoton $h(z) = F^{-1}(z)$, $f(x) = F^{-1}(xv)$, $g(y) = F^{-1}(uy)$ függvényekkel (melyek csakúgy, mint F , minden valós értéket felvesznek), (2.1) összefüggésbe megy át:

$$h(xy) = f(x) + g(y).$$

Ezzel a 2.3. Tétel bizonyítását is befejeztük.

HIVATKOZÁSOK

- [1] ACZÉL JÁNOS, *Kvázicsoportok-hálózatok-nomogramok*, Matematikai Lapok **15**, (1964), 114-162.
- [2] KERTÉSZ ANDOR, *Kvázicsoportok*, Mat. Lapok **15**, (1964), 87-113.
- [3] CSÁKÁNY BÉLA, *Algebra*, Tankönyvkiadó (1995)
- [4] KURUSA ÁRPÁD, *Local geometric loops*, Radovi Math.

NYILATKOZAT

Alulírott Simon Domán kijelentem, hogy a szakdolgozatban/diplomamunkában foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat/diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.