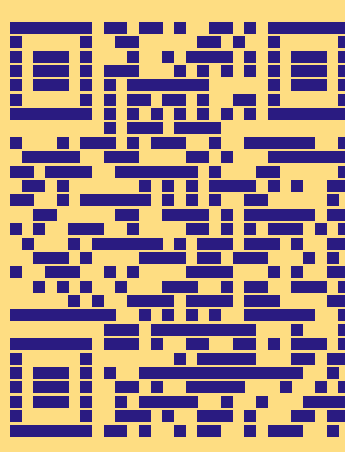




Diszkrét geometria Thurston terekben

Molnár Emil és Szirmai Jenő

Thurston geometriák projektív modelljei

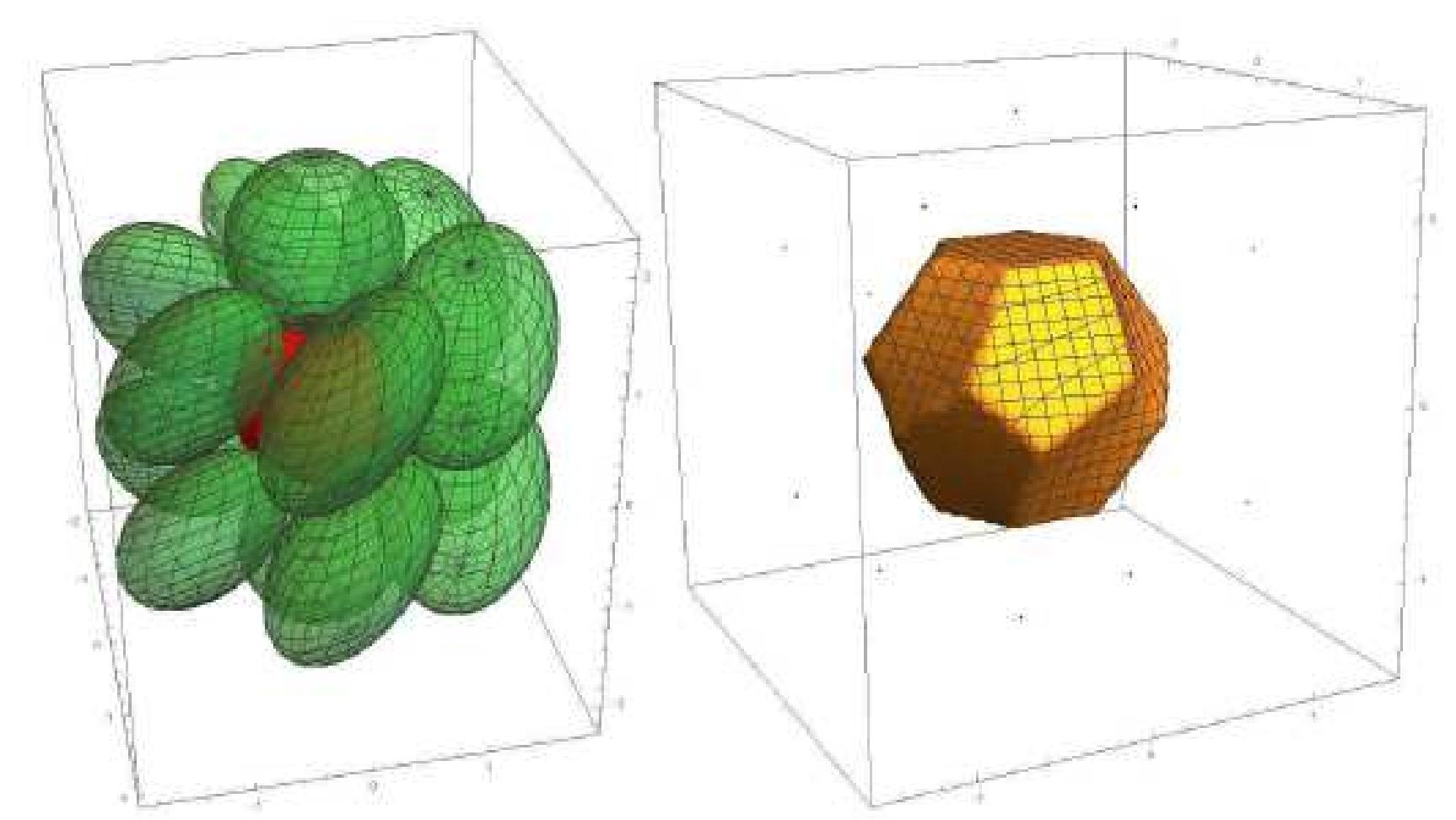
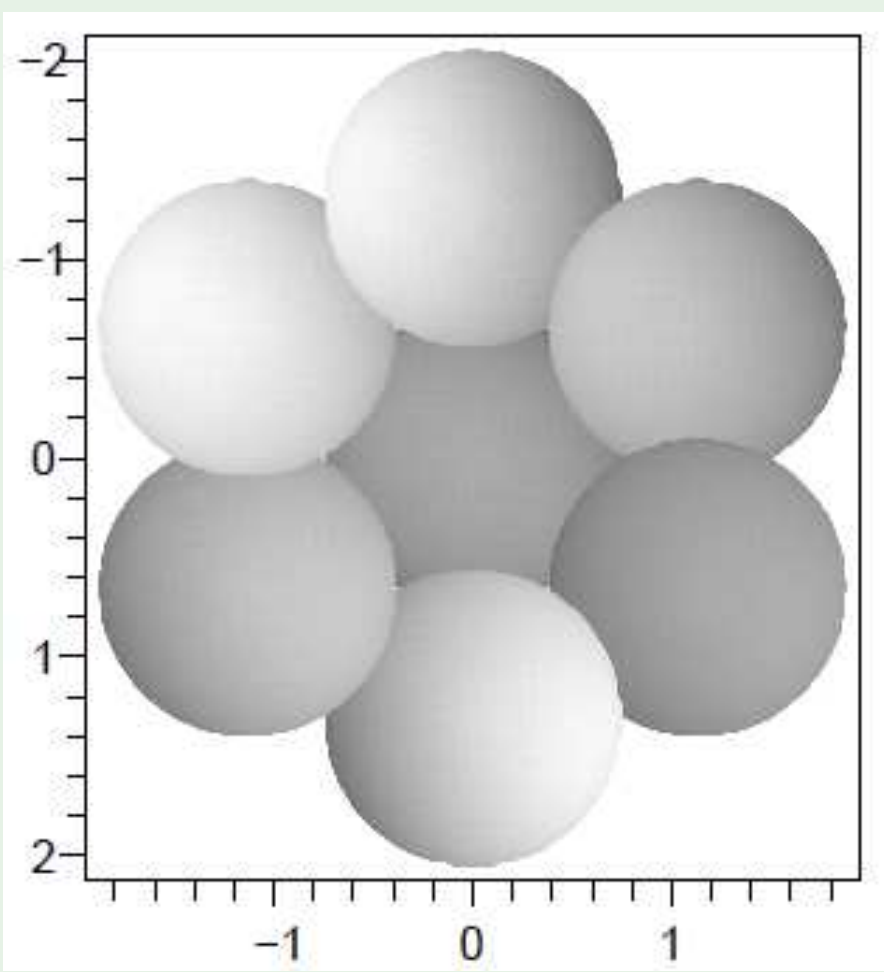
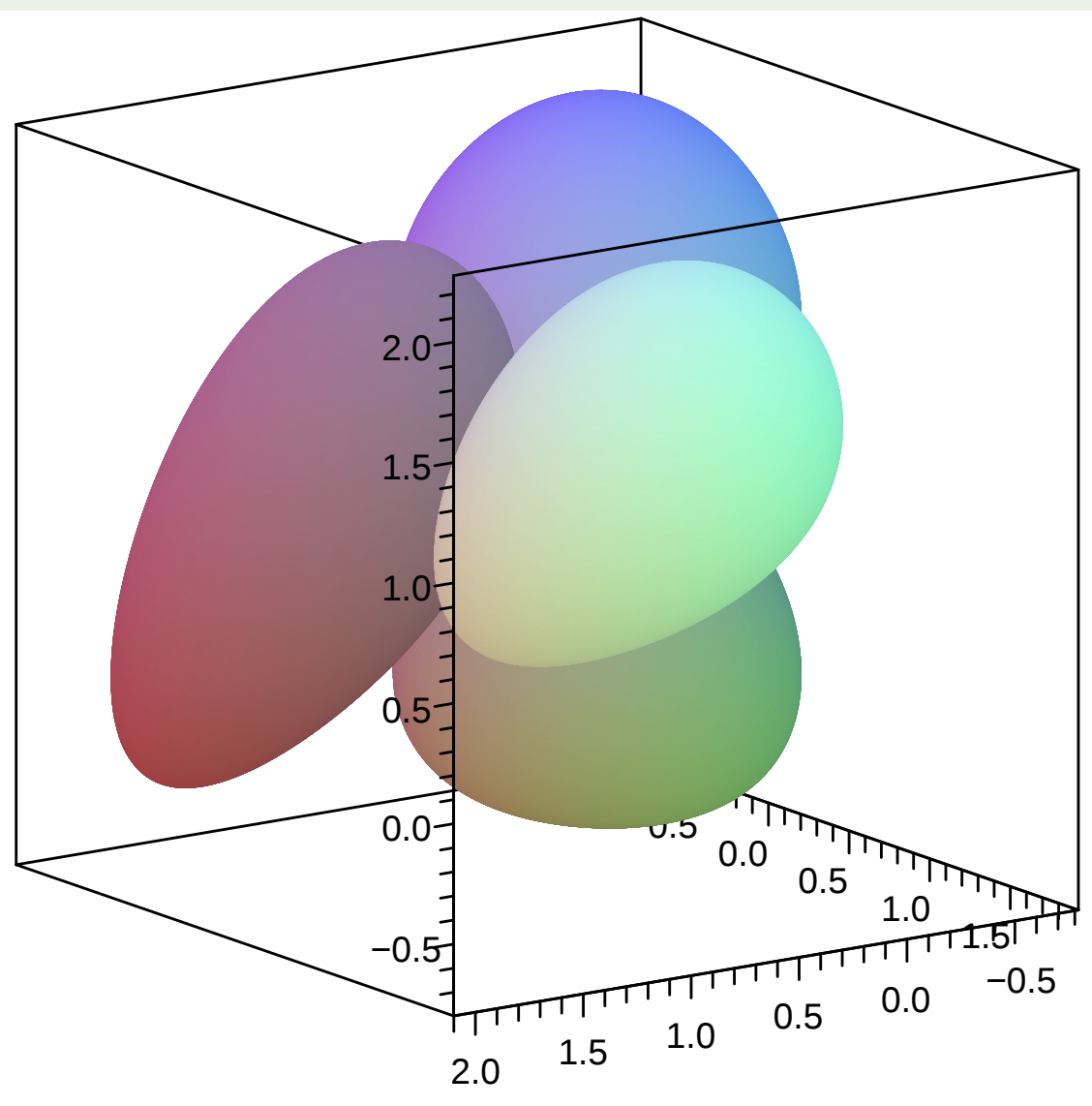
A nyolc Thurston geometriában ($\mathbf{E}^3$, $\mathbf{H}^3$, $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{Sol}$, $\mathbf{Nil}$, $\mathbf{SL}_2\mathbf{R}$) diszkrét matematikai feladatok felvételét és megoldását az tette lehetővé, hogy az első szerző [2] munkájában megmutatta az előző geometriák háromdimenziós $\mathcal{PS}^3$ projektív szférán való modellezhetőségét. A jobb oldali táblázat a projektív interpretációk alapvető információit foglalja össze.

Space X	Signature of polarity $\Pi(\cdot)$ or scalar product $(\cdot, \cdot)$ in V_4	Domain of proper points of X in $\mathcal{PS}^3(V^4(\mathbf{R}), V_4)$	The group $G = \text{Isom X}$ as a special collineation group of $\mathcal{PS}^3$
$\mathbf{S}^3$	(+ + + +)	$\mathcal{PS}^3$	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\cdot)$
$\mathbf{H}^3$	(- + + +)	$\{(x) \in \mathcal{PS}^3 : (x, x) < 0\}$	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\cdot)$
$\mathbf{SL}_2\mathbf{R}$	(- - + +) with slow line fibering	Universal covering of $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{PS}^3 : (x, x) < 0\}$ by fibering transformations	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\cdot)$ and fibres with 4 parameters
$\mathbf{E}^3$	(0 + + +)	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{PS}^3 \setminus \{\omega^\infty\}$ where $\omega^\infty := (0^0)$, $0_0^0 = 0$	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\cdot)$, generated by plane reflections
$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$	(0 + + +) with O-line bundle fibering	$\mathcal{A}^3 \setminus \{O\}$, O is a fixed origin	G is generated by plane reflections and sphere inversions, leaving invariant the O-concentric 2-spheres of $\Pi(\cdot)$
$\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$	(0 - + +) with O-line bundle fibering	$\mathcal{C}^+ = \{X \in \mathcal{A}^3 : (\overline{OX}, \overline{OX}) < 0, \text{ half cone}\}$ by fibering	G is generated by plane reflections and hyperboloid inversions, leaving invariant the O-concentric half-hyperboloids in the half-cone $\mathcal{C}^+$ by $\Pi(\cdot)$
$\mathbf{Sol}$	(0 - + +) and parallel plane fibering with an ideal plane ϕ	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{PS}^3 \setminus \phi$	Coll. of $\mathcal{A}^3$ preserving $\Pi(\cdot)$ and the fibering with 3 parameters
$\mathbf{Nil}$	Null-polarity $\Pi(\cdot)$ with parallel line bundle fibering F with its polar ideal plane ϕ	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{PS}^3 \setminus \phi$	Coll. of $\mathcal{A}^3$ preserving $\Pi(\cdot)$ with 4 parameters

A diszkrét geometria problémái, eredményei általában az n -dimenziós állandó görbületű geometriákra: $\mathbf{E}^n$, $\mathbf{H}^n$, $\mathbf{S}^n$ ($n \geq 2$) korlátozódnak és ezek közül az egyik a klasszikus gömbelhelyezési illetve fedési problémakör. A kérdéskör klasszikus eredményei többek között Fejes Tóth L., id. Böröczky K., Florian A, Fejes Tóth G., Rogers C., Hales T., Molnár J., Heppes A. munkásságához tartoznak. Azonban sok nyitott kérdés is megválaszolásra vár a témával kapcsolatban. Ezek közül a hiperbolikus terek klasszikus gömbjeivel, horoszféráival illetve hiperszféráival kapcsolatos kérdéseket vizsgálták a szerzők többek között az [1], [8] és [3] munkáikban. Ezekben több új jelenségre is fény derült és ezen kérdések is megoldásra várnak, így az n -dimenziós állandó görbületű terekben se zárult le a gömbkitöltések és fedések vizsgálata. Általában a diszkrét geometriai problémák vizsgálhatók a fenti Thurston geometriákban, így a gömbelhelyezések és fedések témaköre is. Ezekből kapott eredményeinkből mutatunk be a továbbiakban néhányat.

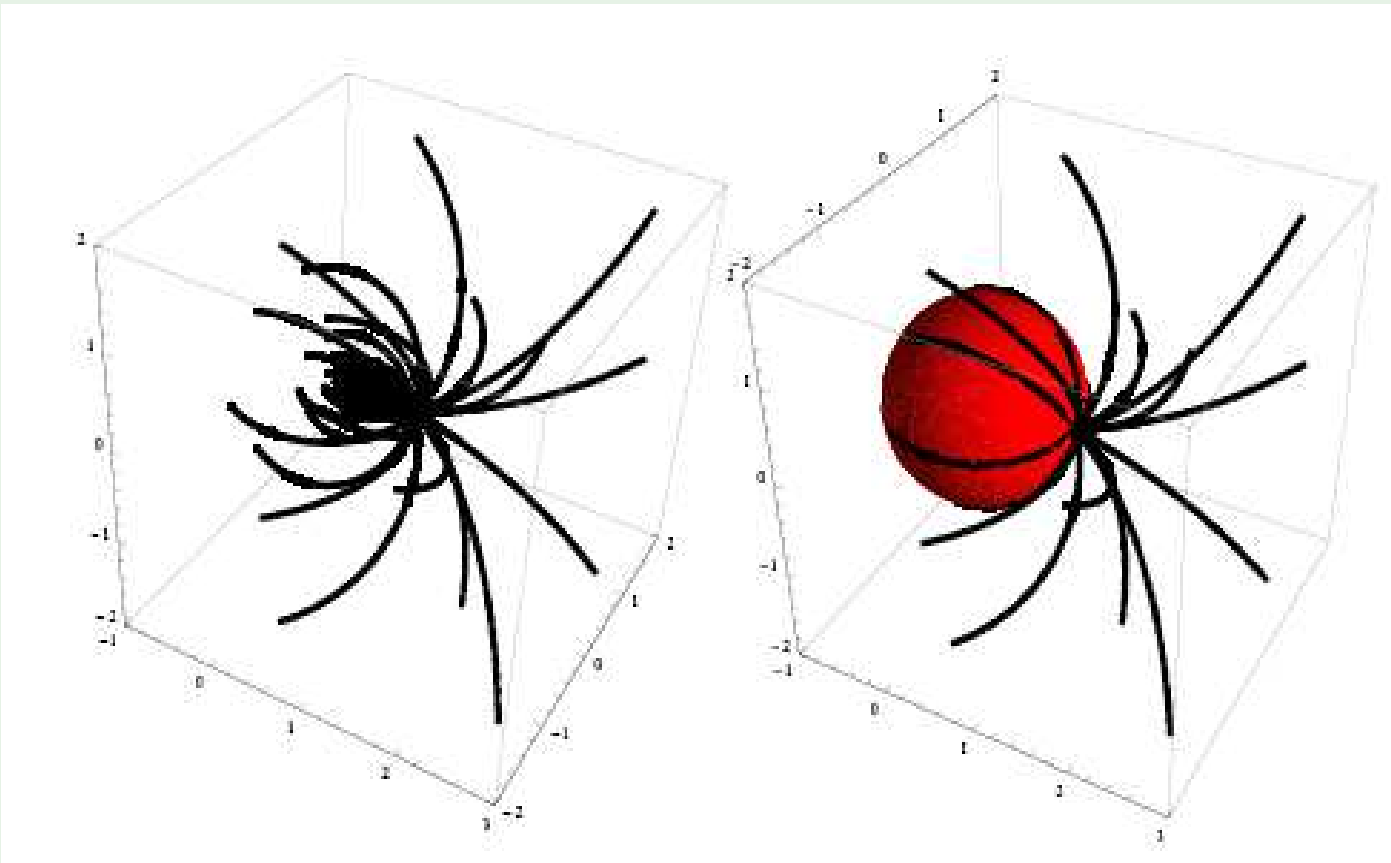
Nil geometria

A Nil geometria W. Heisenberg híres mátrixcsoportjából származtatható. A geodetikus gömbök sugara maximálisan 2π lehet. A tér adott tércsoport szerinti gömbkitöltéseit és fedéseit vizsgáltuk transzlációs és geodetikus távolságfüggvények esetében. Mind az elhelyezéseket mind a fedéseket vizsgálva az euklideszi esetnél optimálisabb eredményeket kaptunk [7]. Most csak a $k = 1$ paraméterű rácsszerű gömbkitöltések esetét mutatjuk az ábráinkon, amelynél a legsűrűbb elrendezés ≈ 0.78085 sűrűségű és az érintési szám 14. Az ábrák a legsűrűbb elrendezés gömbjeit és a Dirichlet-Voronoi celláját mutatják. Megjegyezzük, hogy kongruens transzlációs gömbökkel is tudtunk nagysűrűségű 14-es érintési számú gömbelhelyezést konstruálni.



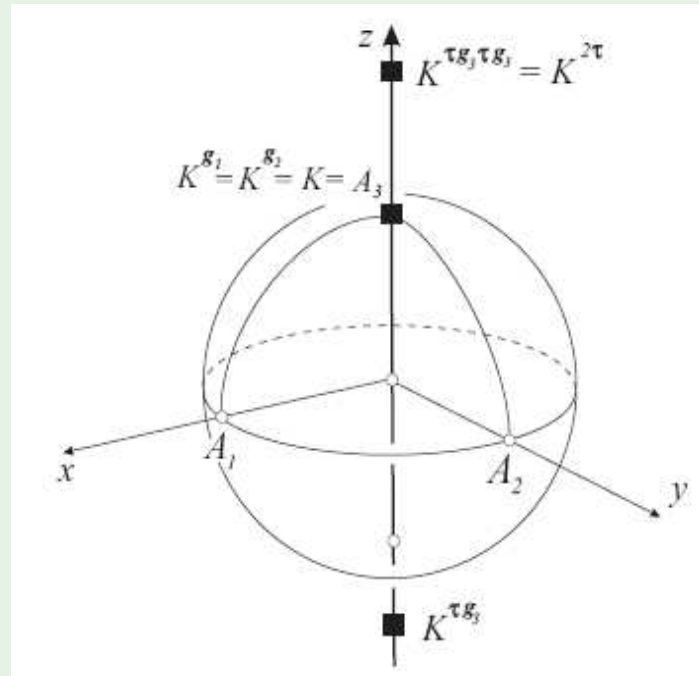
$\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ geometria

Az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ geometria a szférikus sík és a valós számegeyenes direkt szorzataként származtatható és nagy sűrűségű (adott tércsoporthoz tartozó) gömbelhelyezések konstruálhatók benne.



A sejtett legsűrűbb gömbelhelyezés Thurston geometriákban

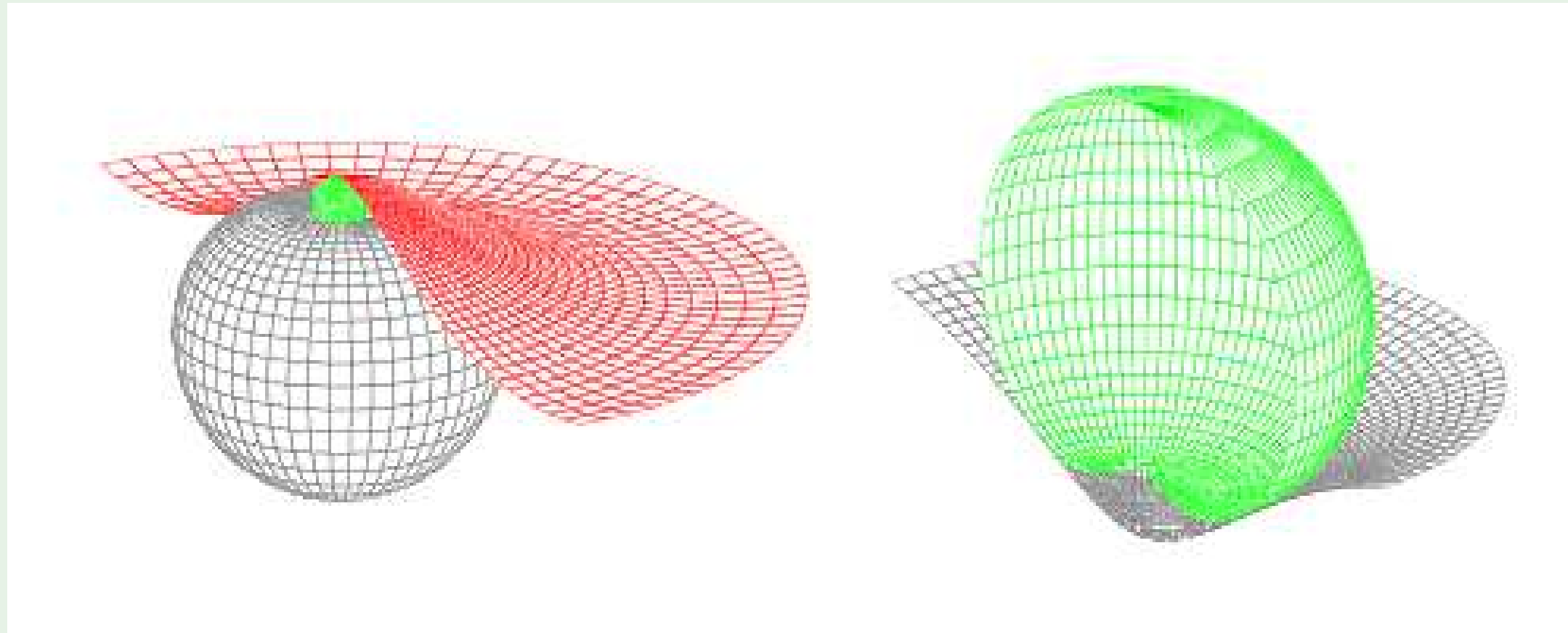
Megjegyezzük, hogy a tércsoportok illetve a rácsok értelmezése eltér a megszokott euklideszi esettől. Az előző ábrák a tér "pókszerű" geodetikusait mutatják. $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ -ben - az állandó görbületű geometriákhoz hasonlóan - a transzlációs és geodetikus görbék egybeesnek. A szférikus geometriához hasonlóan itt is a gömb maximális sugara π lehet.



A sejtett legsűrűbb gömbkitöltés a Thurston geometriákban az $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ geometria **4q.I.2** tércsoportjának $q = 2$ paraméterű esetéhez tartozik, amelynek orbitját (egy részét) illusztrálja a szomszédos ábra.

Az alábbi ábrák a sejtett legsűrűbb gömbkitöltés szomszédos gömbjeinek részeit és a model "alapgömbjét" mutatják [6].

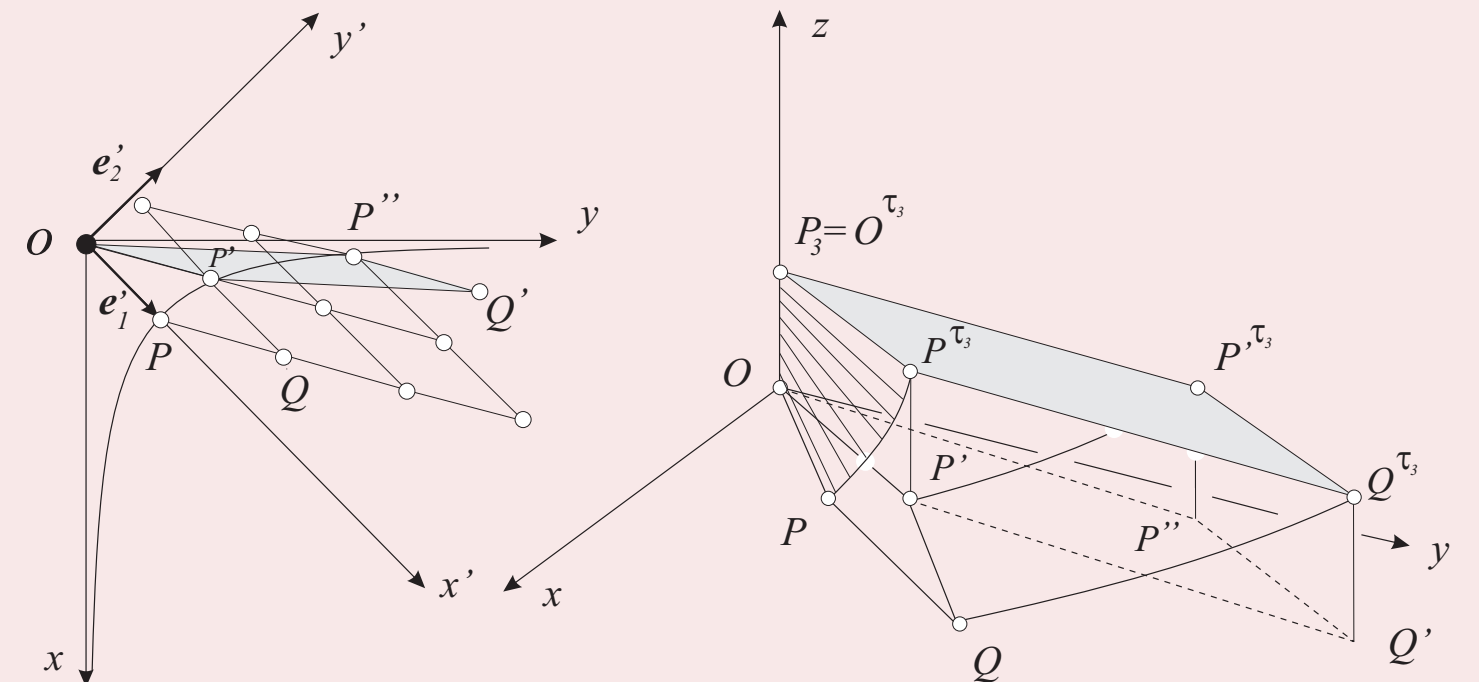
A sejtett optimális gömbelhelyezés sűrűsége Thurston geometriákban $\delta \approx 0.87757$, ez sűrűbb mint a hiperbolikus geometria eddig ismert legsűrűbb elrendezése, amely horoszférák segítségével realizálható, tehát nem klasszikus értelemben vett gömbökkel. Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus térben eddig talált legsűrűbb hagyományos gömbökkel történő gömbkitöltés az ú.n. futballabda sokasághoz kapcsolódik, amely a szerzők nevéhez fűződik [3], sűrűsége ≈ 0.77147 .



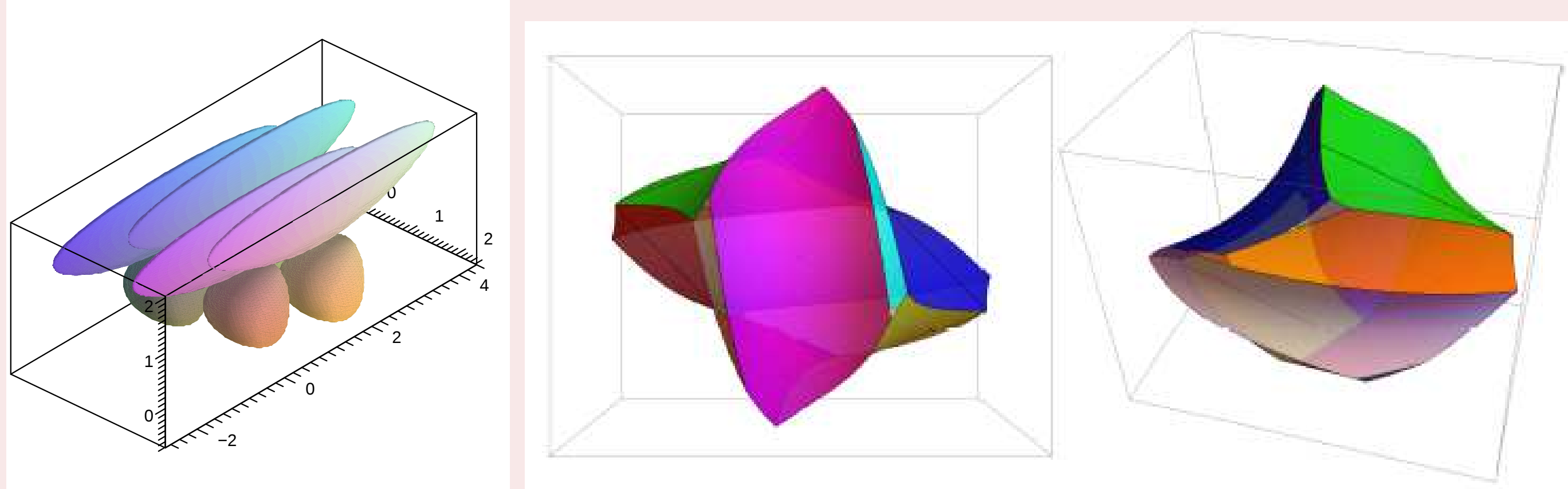
Sol geometria

J. R. Weeks, Thurston korábbi munkatársa írta a Sol geometriáról "Ez a geometria borzalmas...nem találok módot, hogy jól megértsem". Azonban modellünk segítségével lehetőség van a geometria feltérképezésére. A tér a klasszikus Minkowski síkra épített geometria. A geometriában a szerzők definiálták és osztályozták a rácsokat. [4] munkánkban beláttuk, hogy **17 rácsosztály létezik**, de ezen belül több végtelen széria is fellép.

A jobboldali alábbi ábrák az ú.n. fundamentális rácstípust mutatják. A fundamentális rácshoz tartozó transzlációs gömbökkel történő legsűrűbb gömbkitöltést mutatja az alsó baloldali ábra [5].



A gömbkitöltések és fedések vizsgálatánál fontos a megfelelő Dirichlet-Voronoi cella vizsgálata. Az alul lévő jobboldali ábrák az optimális gömbkitöltéshez tartozó rács $D - V$ celláját mutatják.



Irodalom

- [1] R. T. Kozma and J. Szirmai
New Lower Bound for the Optimal Ball Packing Density of Hyperbolic 4-space, *Discrete and Computational Geometry*, **53** (2015), 182-198.
- [2] E. Molnár
The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries, *Beitr. Algebra Geom.*, **38/2** (1997), 261-288.
- [3] E. Molnár and J. Szirmai
Top dense hyperbolic ball packings and coverings for complete Coxeter orthoscheme groups, *manuscript*, (2017), submitted.
- [4] E. Molnár and J. Szirmai
Classification of Sol lattices, *Geom. Dedicata*, **161/1** (2012), 251-275.
- [5] J. Szirmai
The densest translation ball packing by fundamental lattices in Sol space, *Beitr. Algebra Geom.*, **51/2** (2010), 353-373.
- [6] J. Szirmai
A candidate for the densest packing with equal balls in Thurston geometries, *Beitr. Algebra Geom.*, **55/2** (2014), 441-452.
- [7] J. Szirmai
The densest geodesic ball packing by a type of Nil lattices, *Beitr. Algebra Geom.*, **48/2** (2007), 383-398.
- [8] J. Szirmai
Density upper bound for congruent and non-congruent hyperball packings generated by truncated regular simplex tilings, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), (2017), DOI: 10.1007/s12215-017-0316-8.