



Hermite-görbék

Tekintsük a $\text{PG}(2, q^2)$ projektív síkot. Az

$$X_1^{q+1} + X_2^{q+1} + X_3^{q+1} = 0$$

kanonikus alakú egyenlethez tartozó varietást nevezzük **Hermite-görbének**, és $\mathcal{H}$ -val jelöljük. A $\mathcal{H}$ görbe pontjai éppen egy unitér (vagy Hermite-féle) polaritás autokonjugált pontjai.

A $\text{PG}(2, q^2)$ sík Hermite-görbéinek

- $q^3 + 1$ pontjuk van, valamint
- a sík bármely egyenesét pontosan 1 vagy $q + 1$ pontban metszik.

Unitálok a projektív síkon

A Hermite-görbék fenti kombinatorikus tulajdonságai vezetnek az unitál fogalmához.

A q^2 -rendű projektív sík $\mathcal{U}$ ponthalmazát **unitálnak** nevezzük, ha $\mathcal{U}$ -nak

- $q^3 + 1$ pontja van, és
- minden egyenes $q + 1$ vagy 1 pontban metszi $\mathcal{U}$ -t.

Eszerint a Hermite-görbék unitálok. Ezeken kívül is léteznek unitálok a $\text{PG}(2, q^2)$ projektív síkon: a Buekenhout-féle parabolikus konstrukcióval kaphatunk olyan unitálokat, amelyek nem Hermite-görbék – ezeket nevezzük **Buekenhout–Metz-unitáloknak**.

Absztrakt unitálok

Az unitálok fogalmát általánosíthatjuk blokkrendszerekre is: ebben a kontextusban **unitálnak** nevezzük a

$$2 - (q^3 + 1, q + 1, 1)$$

blokkrendszereket, azaz az olyan $q^3 + 1$ **pontból** álló halmazokat, és $(q + 1)$ -elemű részhalmazainak olyan családját, melyekre igaz, hogy bármely két különböző pont pontosan egy a családban szereplő részhalmaznak eleme. Ezeket a részhalmazoknak nevezzük **blokkoknak**.

- **Klasszikus unitálnak** nevezzük a $\mathcal{H}$ Hermite-görbével – blokkrendszerként – izomorf unitálokat.

Beágyazás és teljes pont

- Egy absztrakt unitál **be van ágyazva** egy q^2 -rendű projektív síkba, ha az unitál pontjai a sík pontjai, míg blokkjai a sík egyeneseinek részhalmazai.
- Legyen $\mathcal{U}$ egy beágyazott unitál és tekintsük két különböző blokkját, ℓ_1 -et és ℓ_2 -t. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U}$ unitál P pontja **teljes pont** az (ℓ_1, ℓ_2) párra nézve, ha ℓ_1 projekciója P -n keresztül ℓ_2 -re szűrjektív.
- Analóg módon bevezethetjük a teljes pont fogalmát absztrakt unitálokra is: projekció alatt ebben az esetben azt értjük, hogy ℓ_1 minden pontjára vesszük az adott pontot P -vel összekötő egyértelmű blokkot, és tekintjük a blokk metszetét ℓ_2 pontjaival. Ha metszetek uniója éppen ℓ_2 , akkor P teljes pont.
- Nyilván, ha P teljes pont (ℓ_1, ℓ_2) -re nézve, akkor teljes pont (ℓ_2, ℓ_1) -re nézve is.

Teljes pontok és permutációk

Legyen $\mathcal{U}$ egy absztrakt unitál és legyen ℓ_1 , valamint ℓ_2 egy-egy blokkja P , Q és R teljes pontokkal.

- Tekintsük a következő projekciókat P -n, Q -n és R -en keresztül:

$$\varphi_i: \ell_1 \rightarrow \ell_2 \quad (i \in \{P, Q, R\}).$$

- Ekkor a $\varphi_Q^{-1} \circ \varphi_P$, $\varphi_R^{-1} \circ \varphi_P$ és a $\varphi_R^{-1} \circ \varphi_Q$ leképezések mind ℓ_1 -et önmagára képezik mégpedig bijektív módon, így meghatároznak egy-egy **permutációt** ℓ_1 -en:

$$\varphi_Q^{-1} \circ \varphi_P \mapsto \psi_{PQ}; \quad \varphi_R^{-1} \circ \varphi_P \mapsto \psi_{PR}; \quad \varphi_R^{-1} \circ \varphi_Q \mapsto \psi_{QR};$$

- Milyen a struktúrája a $\langle \psi_{PQ}, \psi_{PR}, \psi_{QR} \rangle$ generált részcsoporthnak?

Beágyazhatóság és struktúra

Tekintsük egy $\mathcal{U}$ absztrakt unitált és tegyük fel hogy létezik olyan (ℓ_1, ℓ_2) blokkpár, amely legalább három különböző teljes ponttal rendelkezik. Ekkor ha az előzőleg tekintett **generált részcsoporthban van kettőnél több fixponttal rendelkező nemtriviális elem, akkor $\mathcal{U}$ nem beágyazható.**

A vizsgált unitálokról

Az unitálok illeszkedési mátrix formájában álltak rendelkezésemre, ahol a sorok a pontoknak, az oszlopok a blokkoknak felelnek meg. A beágyazhatóságot különböző rendű unitálok esetén vizsgáljuk.

- 1 **Harmadrendű** (azaz $q = 3$) absztrakt unitálokra, melyeket [Betten et al. 2001] konstruált: **909 darab** 28×63 méretű mátrix.
- 2 **Negyedrendű** ($q = 4$) absztrakt unitálokra, ezeket [Krčadinac et al. 2011] tette nyilvánossá: **1777 darab** 65×208 méretű mátrix.

Megjegyzendő, hogy sok unitál létezik – $q = 6$ esetén is létezik unitál –, azonban nem ismeretes teljes osztályozásuk.

A módszerről

A beágyazhatósági kérdést a [GAP] komputeralgebrai szoftver segítségével vizsgáltam.

- 1 Először minden unitál esetében meghatároztam, mely blokkpárok esetén van legalább három teljes pont.
- 2 Majd a legalább három teljes ponttal rendelkező blokkpárok esetén meghatároztam a projekcióknak megfelelő permutációk által generált részcsoportokat.
- 3 Végül megvizsgáltam a részcsoportok struktúráját.

Eredmények

- Meghatároztam a teljes pontokat a vizsgált unitálokra. A **teljes pontok maximális számának eloszlását** az alábbi táblázat tartalmazza.

	0	1	2	3	4	5	6
$q = 3$	1	48	860				
$q = 4$	6	1465	80	54	6	86	79

- A **harmadrendű unitálok** közül egyik sem rendelkezett olyan blokkpárral, amelynek legalább három teljes pontja lett volna.
- A **negyedrendű unitálok** esetén ahol volt legalább három teljes ponttal rendelkező blokkpár, meghatároztam a generált csoportokat.
- **3 esetben** a generált részcsoporth S_5 , így ezek biztosan **nem beágyazhatók**.

Hivatkozások

- 📄 **Vedran Krčadinac – Anamari Nakić – Mario Osvin Pavčević**
The Kramer–Mesner method with tactical decompositions: some new unitals on 65 points
Journal of Combinatorial Designs 19 (2011), 290–303.
- 📄 **Anton Betten – Dieter Betten – Vladimir D. Tonchev**
Unitals and codes
Discrete Mathematics 267 (2003), 23–33.
- 📄 **Gábor Korchmáros – Alessandro Siciliano – Tamás Szőnyi**
Embedding of Classical Polar Unitals in $\text{PG}(2, q^2)$
Journal of Combinatorial Theory 153 (2018), 67–75.
- 📖 **Kiss György – Szőnyi Tamás**
Véges geometriák
Szeged, 2001., Polygon
- 🌐 **The GAP Group**
GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.8
<https://www.gap-system.org>, 2017