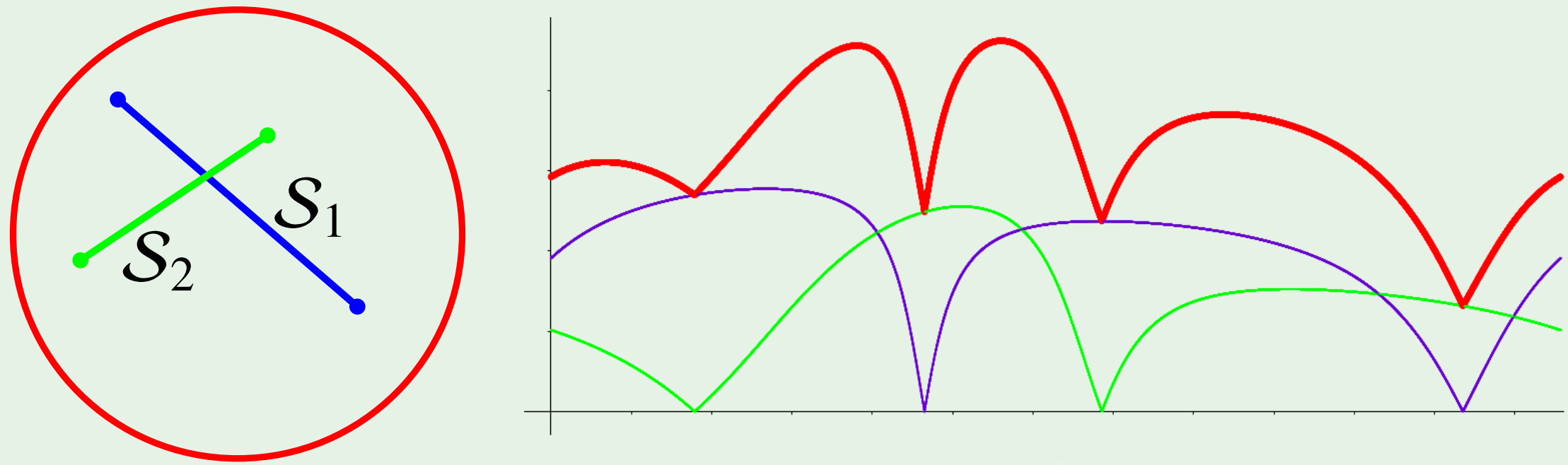


Szakaszok takarási függvénye

Lukács Péter

A takarási szám

A geometriai tomográfia [1] egyik új fogalma a *takarási szám* [4], ami tekinthető a látószög általánosításának. Síkban, szakaszok egy halmazának takarási száma egy adott pontban nem más, mint a halmazban szereplő szakaszok látószögeinek összege.



Két szakasz látószögfüggvényei (zöld és kék) és takarási függvénye (piros) a körön

A *takarási függvény* a sík pontjaiban adja meg a takarási számot. Egy szakasz takarási és látószögfüggvénye természetesen megegyezik.

Szakasz látószögfüggvénye

Ismert, hogy egy S szakaszt meghatároz v_S látószögfüggvényének bármely körívre vett megszorítása [2], és létezik erre szerkesztésen alapuló bizonyítás is, amely a függvény maximum értékét és maximumhelyét használja fel [5]. A takarási függvény kapcsán azonban szükségessé válnak más módszerek is.

Világos, hogy v_S meghatározza az S szakasz egyenesének és a körnek a metszéspontjait, hiszen pontosan ott tűnik el. Ugyanakkor az is megfigyelhető, hogy v_S pontosan ezen pontokban nem differenciálható. Ezt felhasználva új válaszokat adhatunk a kérdésre, hogy *Egy kör belsejében fekvő szakasz hogyan határozható meg a körön adott látószögfüggvényéből?*

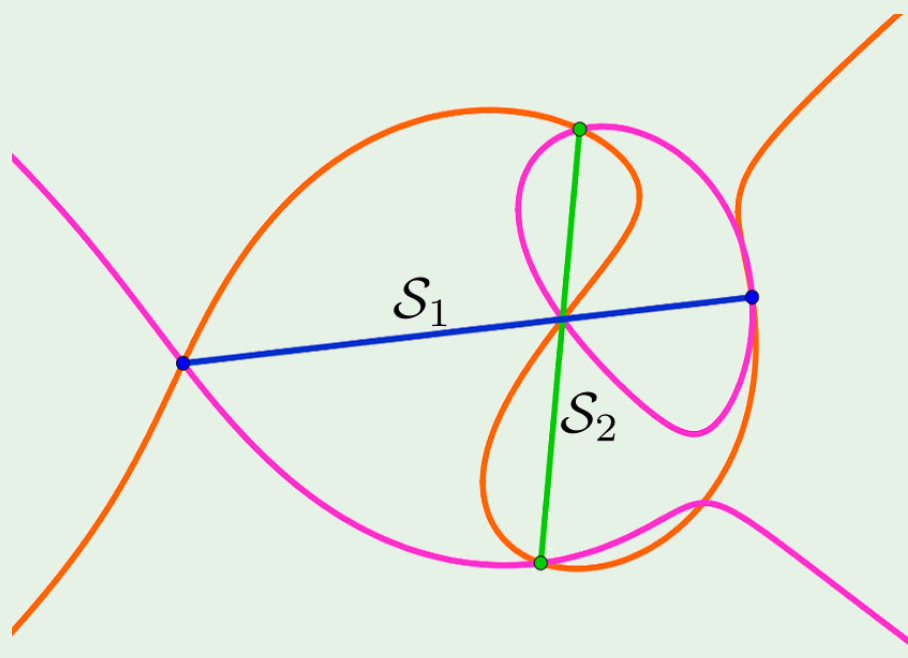
Tétel [5]

Legyen az S szakasz egyenese által a $g: [-\pi, \pi) \rightarrow C$ körből kimetszett két pont $g(s_1)$ és $g(s_2)$, $g(s_3)$, $g(s_4)$ és $g(s_5)$ pedig ezektől különböző pontok a körön.

- 1 $A \dot{v}_S(s_1+)$ és $\dot{v}_S(s_2+)$ értékek meghatározzák az S szakaszt.
- 2 Legfeljebb egy olyan, az S szakasztól különböző, vele egy húron lévő $\hat{S}$ szakasz létezik, amelyre
 - 1 $\dot{v}_S(s_1+) = \dot{v}_{\hat{S}}(s_1+)$ és $v_S(s_3) = v_{\hat{S}}(s_3)$, vagy
 - 2 $v_S(s_4) = v_{\hat{S}}(s_4)$ és $v_S(s_3) = v_{\hat{S}}(s_3)$.
- 3 A $v_S(s_i)$ értékek, ahol $i = 1, \dots, 5$, meghatározzák az S szakaszt.

Ekviptikus és komptikus

A síkban két konvex tartományt azonos szög alatt látó pontok halmazának lezártját *ekviptikusnak*, az alakzatokat kiegészítő szög alatt látó pontjait pedig *komptikusnak* nevezzük. Ezek unióját *Apollóniosz-görbének* hívjuk.

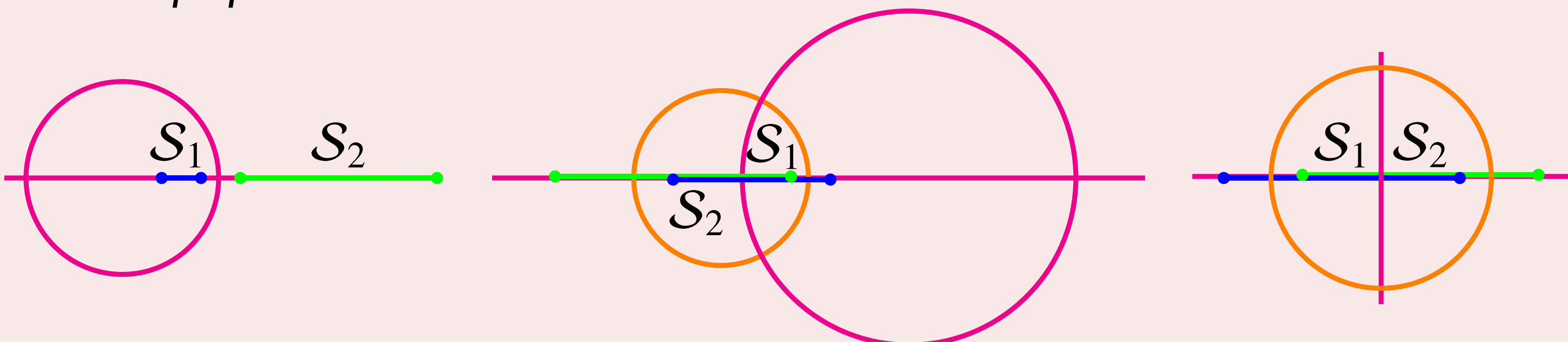


Két szakasz ekviptikusának, és komptikusának uniója két, legfeljebb harmadfokú algebrai görbe [3].

Kollineáris szakaszok Apollóniosz-görbéje [5]

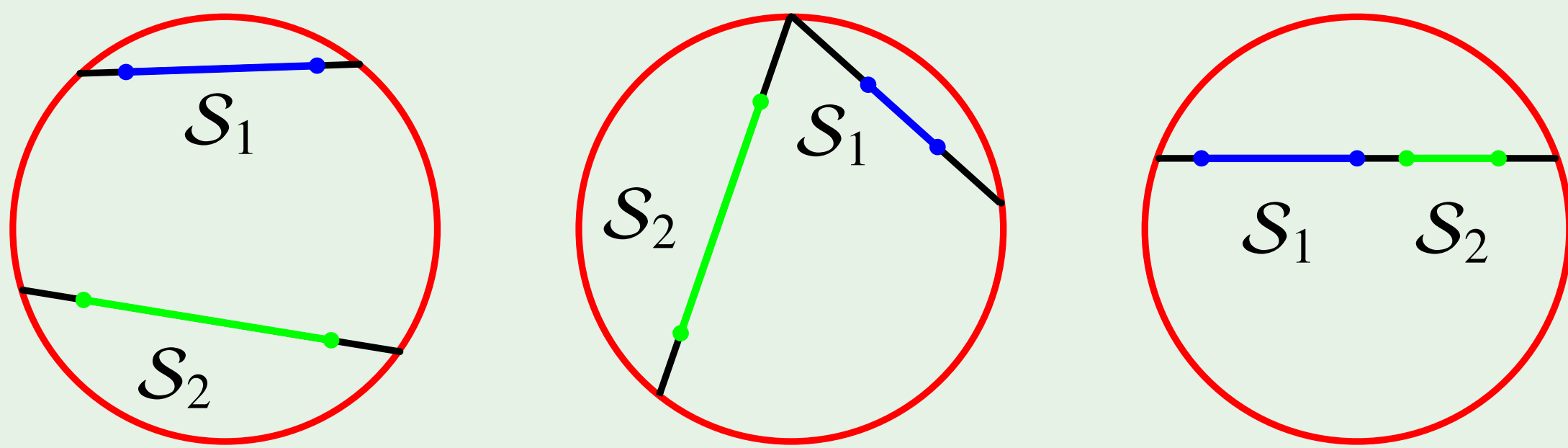
Legyen S_1 és S_2 egy-egy szakasz az f egyenesen.

- 1 Ha S_1 és S_2 különböző hosszúságúak, akkor Apollóniosz-görbéik előállnak az f egyenes és egy-egy (esetleg elfajuló) kör uniójaként, melyek egyike az ekviptikus, másika pedig a komptikus része.
 - 1 Ha egyik tartalmazza a másikat, akkor nincs ekviptikus körük.
 - 2 Ha nem tartalmazzák egymást és van közös pontjuk, akkor az ekviptikus körük áthalad a szakaszok megfelelő közös pontján,
 - 3 Ha diszjunktak, akkor az ekviptikus körük áthalad a szakaszok közelebbi végpontjainak szakaszán.
- 2 Ha S_1 és S_2 azonos hosszúságúak, akkor Apollóniosz-görbéik előállnak az f , és erre merőleges g szimmetriatengelyük, valamint egy esetleg elfajuló C kör uniójaként. Előbbi az ekviptikus, utóbbi a komptikus része.



Takarási függvény

Legyen S_1 és S_2 két szakasz a $g: [-\pi, \pi) \rightarrow C$ körön belül és legyen $\tau_{S_1, S_2} = v_{S_1} + v_{S_2}$ a szakaszok takarási függvénye a C körön. Ez legfeljebb négy és legalább kettő pontban nem differenciálható, amelynek a szakaszok alábbi három elhelyezkedése felel meg:



A legfontosabb kérdés az, hogy

Meghatározza a τ_{S_1, S_2} függvény az S_1 és S_2 szakaszokat?

Erre egyelőre nem ismert a válasz, de vannak részeredmények.

Szimmetria tétel két szakaszra [6]

A τ_{S_1, S_2} a C körön akkor és csak akkor szimmetrikus egy, a kör középpontján áthaladó σ egyenesre, ha a szakaszok egymás vagy önnön maguk tükörképei a σ egyenesre nézve.

A bizonyításról

A bizonyítás a három fő eset alapján történik, aszerint, hogy hány pontban nem deriválható a takarási függvény. Ha két pontban nem deriválható, azaz amikor a két szakasz egy egyenesre esik, akkor a $\dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_1) = \dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_2)$ és $\dot{\tau}_{[a,b],[c,d]}(s_3) = 0$, egyenletrendszert kell megoldani, ahol s_3 a szimmetria tengelyre eső lokális maximum. Ha τ_{S_1, S_2} három pontban nem differenciálható vagyis ha a szakaszok a tengelyen metszik egymást, akkor húronként legfeljebb egy-egy szimmetrikus szakaspár lehet a megoldás, de a nem szimmetrikus párosítás kizárható, az Appolóniosz-görbék segítségével. Ha négy pontban nem differenciálható a függvény, akkor a látószögfüggvényre kapott eredményeket használva kell további aleseteket vizsgálni, a szakaszok elhelyezkedése szerint.

Tétel [6]

Ha két szakasz takarási függvénye szimmetrikus a C körön, és τ_{S_1, S_2} kettő vagy három helyen nem differenciálható, akkor a szakaszok helye meghatározható a takarási függvényből.

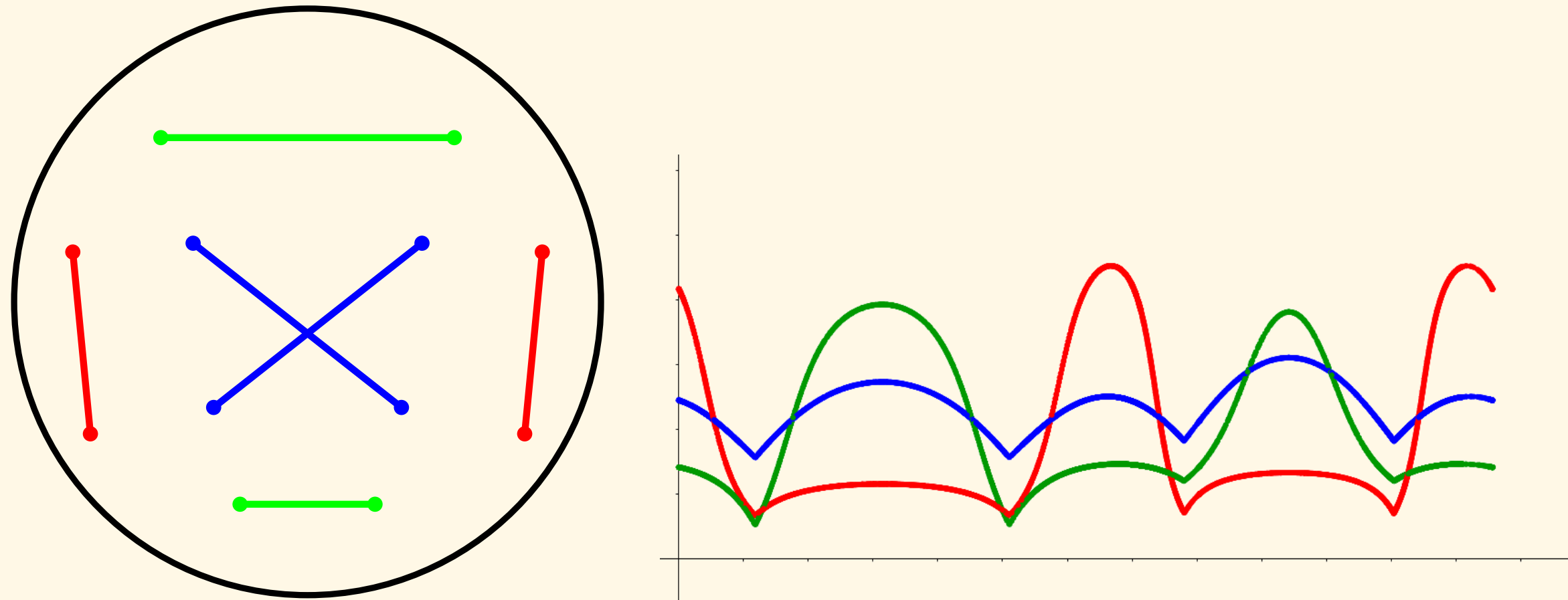
A bizonyításról

Ha a τ_{S_1, S_2} függvény két helyen nem differenciálható, akkor a megfelelő egyenletek felírása után a szakaszok végpontjai kiszámíthatóak. Ha három helyen nem differenciálható, akkor pedig a szakaszokhoz tartozó deriváltakból, a korábbi tétel alapján határozhatóak meg a szakaszok.

Sejtés és alapja

Ha szimmetrikus szakaszok egyenesei négy pontban metszik a kört, akkor az alábbi ábra alapján erős sejtés fogalmazódik meg:

Ha a C körön belül lévő két szakasz τ_{S_1, S_2} takarási függvénye szimmetrikus a C középpontján átmenő valamely egyenesre, és négy helyen nem differenciálható, akkor τ_{S_1, S_2} meghatározza a szakaszokat.



A három lehetséges szakaspár piros, kék és zöld színnel és a rendre hozzájuk tartozó takarási függvények pirossal, késsel és zölddel ábrázolva.

Irodalom

- | | |
|--|--|
| [1] R. J. Gardner
Geometric Tomography, 2nd edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 58, Cambridge University Press, 2006. | [4] Á. Kurusa
Can you see the bubbles in a foam?, <i>Acta Sci. Math. (Szeged)</i> , 58 (2016), 663–694; doi: 10.14232/actasm-015-299-1 . |
| [2] Á. Kurusa J. Kincses
Can you recognise the shape of a figure by its shadows?, <i>Beitr. Algebra Geom.</i> , 36 (1995), 25–35. | [5] P. Lukács
Szakaszok takarási száma, <i>Polygon</i> , 24 (2017), 29–41. |
| [3] Á. Kurusa
Visual distinguishability of segments, <i>Int. Electron. J. Geom.</i> , 6:1 (2013), 56–67. | [6] P. Lukács
Symmetric masking function of segments, <i>kézirat</i> , (2017). |