

Hilbert-geometriák euklideszi tulajdonságokkal

Kozma József



Bevezető

David Hilbert híres negyedik problémája azon geometriák meghatározása, amelyekben az egyenes rendelkezik a „**legrövidebb út**” tulajdonságával. Mára az összes ilyen „**projektív-metrikus**” geometriát elő tudjuk állítani.

Busemann rámutatott [1], hogy a két legfontosabb projektív-metrikus geometria a Minkowski- és a Hilbert-féle, mert ezek olyanok, hogy az egyenesek közti izometriák projektivitások (Minkowski-esetben konkrétan affinitások).

A Minkowski-geometriákat már alaposan kutatták [10], a Hilbert-geometriák kutatása napjainkban kapott új lendületet [11].

Hilbert-geometria

A $d_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ **Hilbert-távolságot** az $\mathbb{R}^n$ korlátos, konvex, nyílt $\mathcal{H}$ tartományán

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } X = Y, \\ \frac{1}{2} |\ln(X, Y; P, Q)|, & \text{ha } X \neq Y, \end{cases}$$

definiálja [5], ahol $\overline{PQ} = \mathcal{H} \cap XY$.

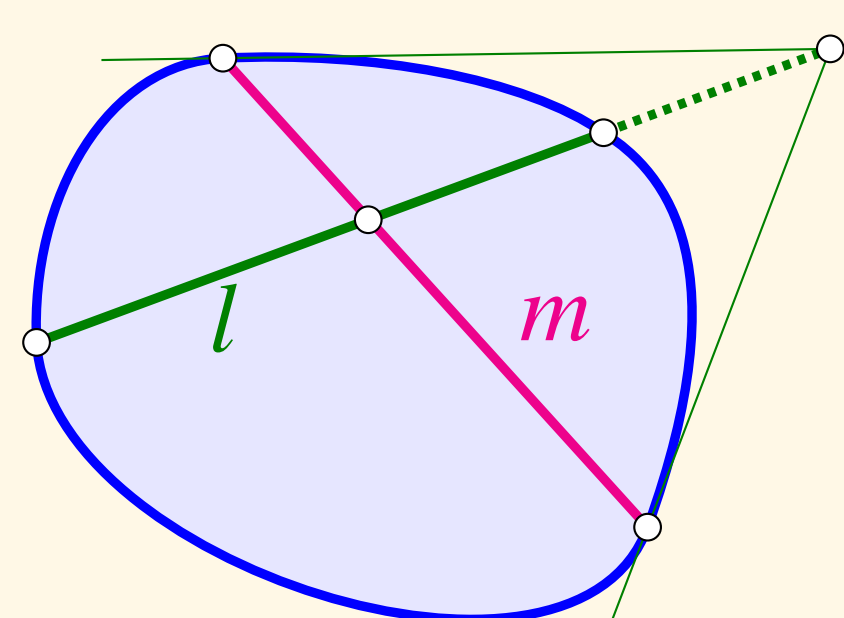
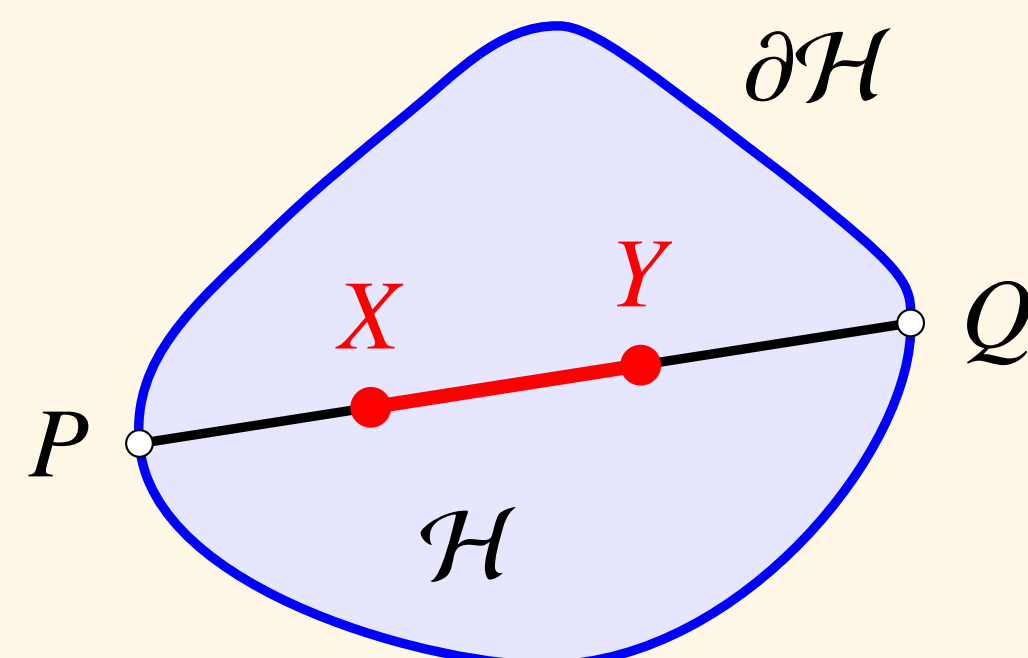
Ha $\mathcal{H}$ **szigorúan konvex**, akkor $d_{\mathcal{H}}$ **egy projektív metrika**, melyre teljesül, hogy (1) izometriái a tér projektív transzformációi, és (2) a tartománytól folytonosan függ, és (3) $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ egy **teljes metrikus tér**. Az utóbbi teret **Hilbert-geometriának** nevezzük. Ez pontosan akkor (Bolyai-féle) hiperbolikus geometria, ha $\mathcal{H}$ egy ellipszis [2].

Hilbert-geometriában a **hiperbolikus osztóviszonyt** használjuk:

$$\langle A, B; C \rangle_{\mathcal{H}} = \begin{cases} -\frac{\sinh d_{\mathcal{H}}(C, A)}{\sinh d_{\mathcal{H}}(B, C)}, & \text{ha } C \in \overline{AB}, \\ \frac{\sinh d_{\mathcal{H}}(C, A)}{\sinh d_{\mathcal{H}}(B, C)}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha az m egyenes és $\partial\mathcal{H}$ metszéspontjaiban a $\mathcal{H}$ támaszegyenesei konkurensak egy l egyenes-sel, mely valamely $P \in \mathcal{H}$ pontban metszi az m egyenest, akkor azt mondjuk, hogy **l merőleges m -re**. Ekkor P az l minden pontjához közelebb van, mint az m bármely másik pontja [2].

Hilbert-geometriában a **merőlegesség** általában nem szimmetrikus, az egyetlen kivétel a hiperbolikus eset [2].

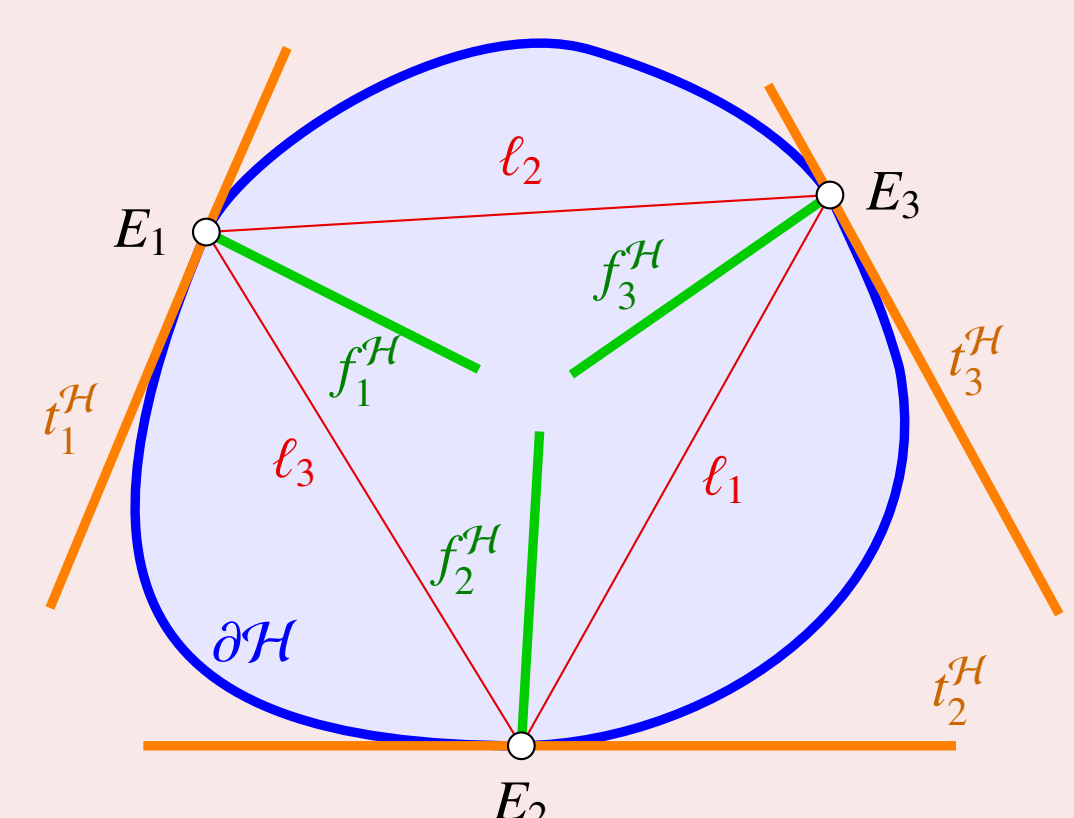


Sejtés (Kurusa Á., 2015)

A háromszögek euklideszi geometriából ismert nevezetes pontjainak létezése a Hilbert-geometriák közül általában csak a hiperbolikus geometriában lehetséges.

Mivel a háromszögek mindig egy síkban vannak, és a metrika sem vezet ki a síkokból, ilyen állítások igazolásához Busemann és Kelly eredménye [2, Lemma 12.1, 226. o.] szerint elegendő a Hilbert-síkokat vizsgálni, és kimutatni, hogy annak $\partial\mathcal{H}$ határa ellipszis. Ehhez hasznos eszköz a John–Löwner-ellipszis [4, Theorem 2.1.], amely az egyetlen, amely tartalmazza, továbbá legalább három pontban érinti $\mathcal{H}$ -t.

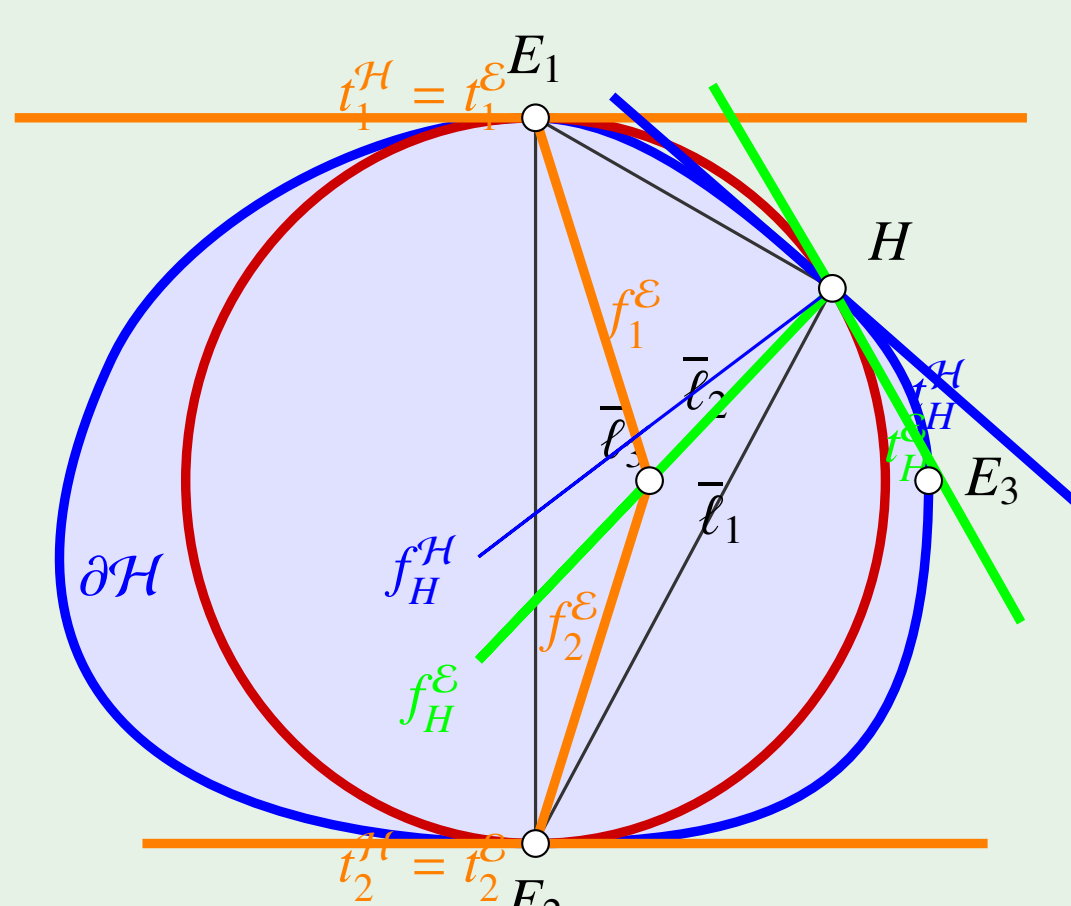
Ellipszis-karakterizáció [9, Theorem 4.2]



A szigorúan konvex $\partial\mathcal{H}$ görbe E_i ($i = 1, 2, 3$) pontjában az érintő $t_i^{\mathcal{H}}$, továbbá $f_i^{\mathcal{H}}$ az az egyenes, amelyet az $\ell_j = E_k E_i$ és $\ell_k = E_i E_j$ egyenesek ($j, k = 1, 2, 3$) harmonikusan választanak el $t_i^{\mathcal{H}}$ -tól. **A $\partial\mathcal{H}$ akkor és csak akkor ellipszis, ha minden $E_1 E_2 E_3$ háromszögre $f_1^{\mathcal{H}}, f_2^{\mathcal{H}}, f_3^{\mathcal{H}}$ konkurens.**

A bizonyításról

Az elegendőséghez a konfigurációt egy projektivitással úgy transzformáljuk, hogy az E_i pontok elhelyezkedése a számításokat könnyebbé tegye: $H, E_1, E_2 \in \partial\mathcal{H}$ és az E_1, E_2 -beli érintő meghatároz egy $\mathcal{E}$ ellipszist is, melyre a feltétel teljesül. Utóbb kiderült, hogy ez a tétel ekvivalens Segre tételének duálisával. [6, 6.15. Tétel].



Ceva-tétel és Menelaosz-tétel

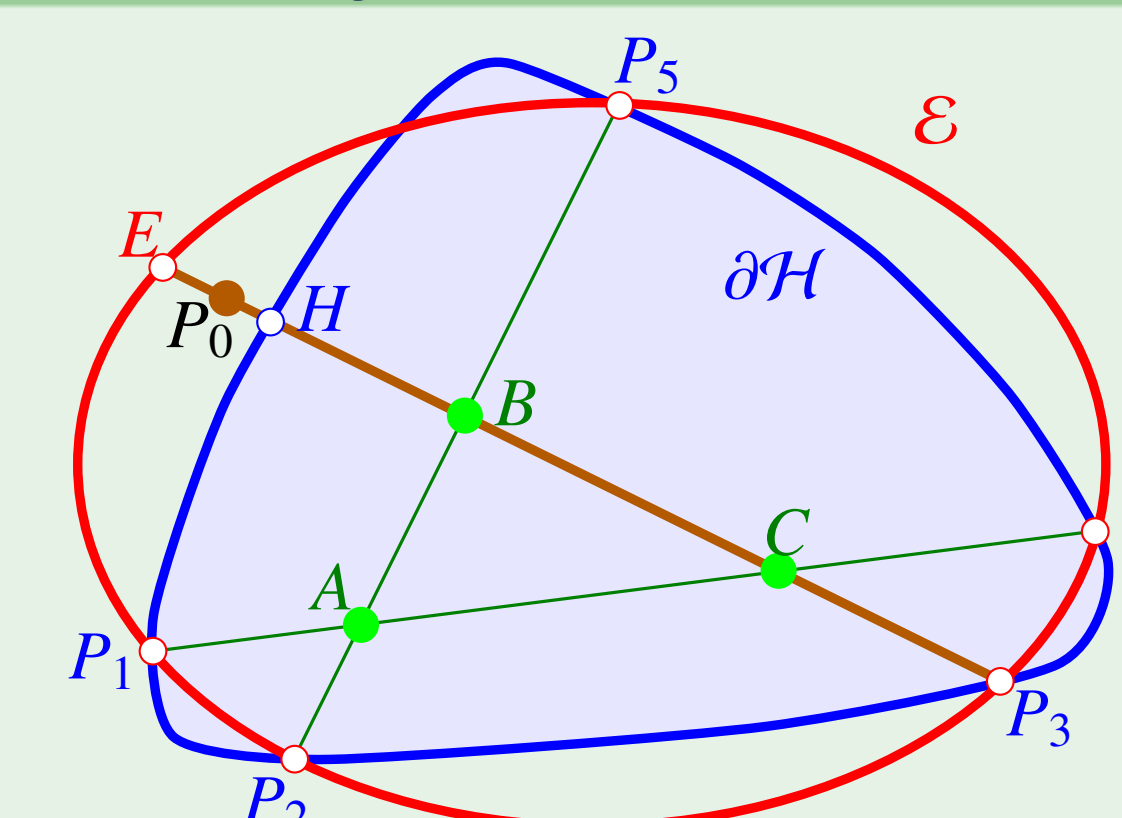
Ha A, B, C egy nem elfajuló háromszög (trigon) csúcsai, akkor a rendre az AB, BC és CA oldalegyeneseken lévő C', A', B' pontok rendezett (C', A', B') ponthármasát **Menelaosz-félének** nevezzük, ha C', A' és B' kollineárisak, illetve **Ceva-félének** mondjuk, ha AA', BB' és CC' konkurensak. Valós számok egy (α, β, γ) hármasát **Menelaosz-félének** nevezzük, ha $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -1$, illetve **Ceva-félének** nevezzük, ha $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = +1$. Az affin Ceva- és Menelaosz-tétel az **affin** osztóviszonyt használva azt állítja, hogy (C', A', B') pontosan akkor Ceva-féle (Menelaosz-féle) ponthármas, ha az affin osztóviszonyok $(\langle A, B; C' \rangle, \langle B, C; A' \rangle, \langle C, A; B' \rangle)$ Ceva-féle (Menelaosz-féle) számhármast alkotnak.

Ismert, hogy a hiperbolikus osztóviszonyt használva a hiperbolikus geometriában is érvényes a Ceva- és Menelaosz-tétel sőt, ha egy Hilbert-geometria minden háromszögének létezik súlypontja, akkor a geometria hiperbolikus [3].

Ceva- és Menelaosz-féle karakterizáció. ([8, Theorem 3.1]).

Ha $\mathcal{H}$ -ban minden ABC trigonhoz létezik olyan (C', A', B') Ceva-triplet (Menelaosz-triplet), hogy az $(\langle A, B; C' \rangle_{\mathcal{H}}, \langle B, C; A' \rangle_{\mathcal{H}}, \langle C, A; B' \rangle_{\mathcal{H}})$ számhármass Ceva (Menelaosz) típusú, akkor a $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ Hilbert-geometria hiperbolikus geometria.

A bizonyításról

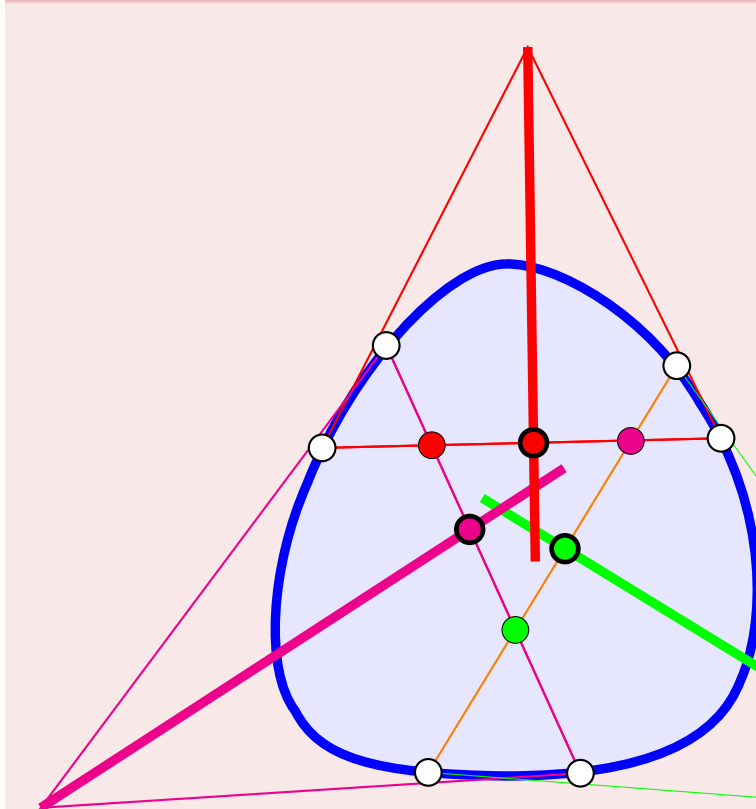


A John-tétel szolgálat egy három pontban érintő ellipszist. Az ennek alkalmas $\mathcal{E}$ zsugorítottjával kapott P_i ($i = 1, \dots, 5$) metszéspontok egyenesein megadható egy ABC trigon, melynek két oldalegyenesén ($P_1 P_4$ és $P_2 P_5$) a $d_{\mathcal{H}}$ és $d_{\mathcal{E}}$ megegyezik, de a harmadikon nem.

Oldalelező merőlegesek és magasságvonalak konkurenciája

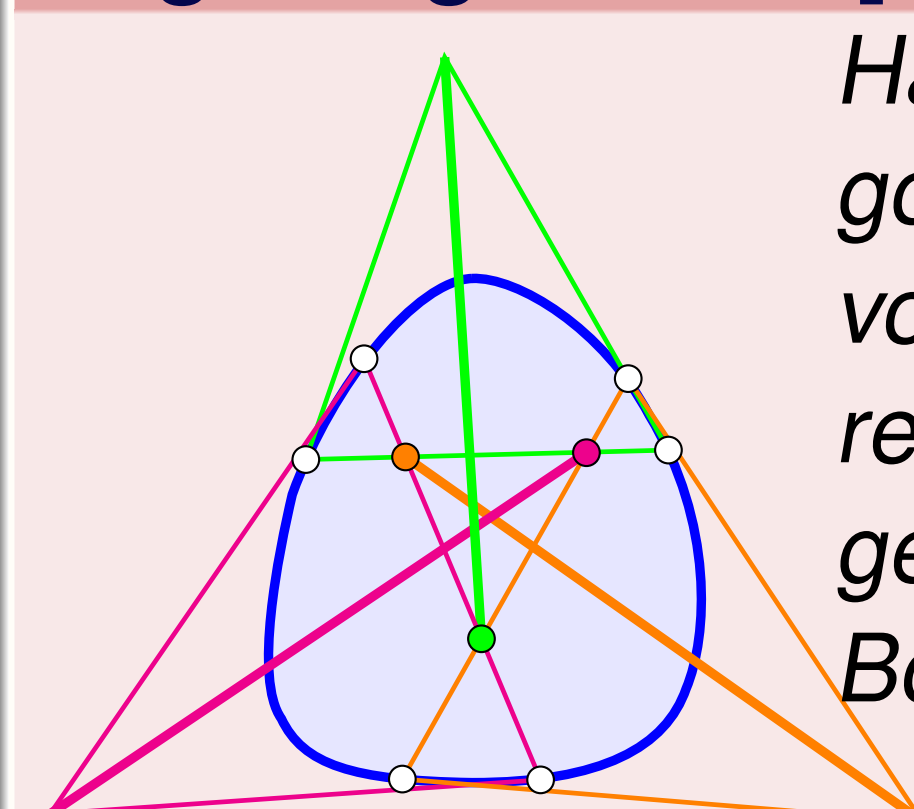
Egy szakasz felezőpontjában a rá merőlegest **szakaszfelező merőlegesnek** hívjuk. Ez általában nem a végpontok ekvidisztáns görbéje! **Egyenesek konkurenciáján** affin kiterjesztéseik konkurenciáját értjük.

Oldalelező merőlegesek [9]



Ha minden trigon oldalelező merőlegei konkurensak, akkor a geometria Bolyai-féle.

Magasságvonalak [9]



Ha minden trigon magasságvonalai konkurensak, akkor a geometria Bolyai-féle.

Analóg karakterizálás a Minkowski-metrikák közt?

Minkowski-geometriában m **merőleges** l -re, ha az $\mathcal{I}$ indukált centrumán átmenő, m -mel párhuzamos m' egyenes és $m' \cap \partial\mathcal{I}$ pontjaiban az érintők párhuzamosak l -l. A merőlegesség nem szimmetrikus, kivéve ha $\partial\mathcal{I}$ egy Radon-görbe [2].

Karakterizációs tételek [7, Theorem 3.1–4.2]

Egy Minkowski-geometria akkor és csak akkor euklideszi, ha az alábbiak legalább egyike teljesül:

- minden trigon a jobb-merőleges oldalelezői konkurensak;
- minden trigon a jobb-merőleges magasságvonalai konkurensak;
- minden trigon a bal-merőleges oldalelezői konkurensak;
- minden trigon a bal-merőleges magasságvonalai konkurensak.

Irodalom

- H. Busemann *Recent Synthetic Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **54**, Springer, New York, 1970.
- H. Busemann and P. J. Kelly *Projective Geometries and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953.
- R. Guo *A Characterization of Hyperbolic Geometry among Hilbert Geometries*, *J. Geom.*, **89** (2008), 48–52.
- M. Henk *Löwner–John Ellipsoids*, *Documenta Mathematica*, Extra Volume ISMP, (2012), 95–106.
- D. Hilbert *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte*, *Math. Ann.*, **46** (1895), 91–96.
- Gy. Kiss and T. Szőnyi *Véges geometriák*, Polygon, Szeged, 2001.
- J. Kozma *Characterization of Euclidean geometry by existence of circumcenter or orthocenter*, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **81:3-4** (2015), 685–698.
- J. Kozma and Á. Kurusa *Ceva's and Menelaus' Theorems Characterize Hyperbolic Geometry Among Hilbert Geometries*, *J. Geometry*, **106** (2014), 465–470.
- J. Kozma and Á. Kurusa *Hyperbolic is the only Hilbert geometry having circumcenter or orthocenter generally*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **57:1** (2016), 243–258.
- H. Martini, K. Swanepoel and G. Weiss *The geometry of Minkowski spaces – a survey. Part I*, *Expositiones Mathematicae*, **19** (2001), 97–142.
- A. Papadopoulos and V. Troyanov *Handbook of Hilbert geometry*, European Math. Soc., Zürich, 2014.