



Szegedi Geometria Nap

2017. október 6.

1 Bevezetés

Egy *illeszkedési struktúra* egy $\mathcal{S} = (P, \mathcal{B}, I)$ hármas, ahol P a pontok, $\mathcal{B}$ a blokkok halmaza, $I \subseteq P \times \mathcal{B}$ pedig egy *illeszkedési reláció*. Bizonyos esetekben a blokkokat azonosítjuk a hozzájuk illeszkedő pontokból álló pontthalmazokkal.

Legyen v, b, r, k, λ pozitív egész, és tekintsük a következő feltételeket: (1) $|P| = v$; (2) $|\mathcal{B}| = b$; (3) minden pont pontosan r számú blokkhoz tartozik; (4) minden blokk pontosan k számú pontot tartalmaz; (5) bármely két pont pontosan λ számú blokkhoz tartozik.

Az (1)–(5) feltételeknek eleget tevő illeszkedési struktúrát *blokkrendszernek* nevezzük. Másrészt, az (5) feltétel elhagyásával, az (1)–(4) feltételeknek megfelelő illeszkedési struktúrát *kombinatorikus konfiguráció-nak* nevezzük. Egy ilyen konfiguráció *típusát* a (v_r, b_k) szimbólummal jelöljük. Ha egy kombinatorikus (vagy *absztrakt*) konfiguráció még azt a feltételt is teljesíti, hogy (6) bármely két különböző pont legfeljebb egy blokkhoz illeszkedik, akkor ezt *linedílis* (sic!) konfigurációnak nevezzük.

A blokkrendszerek elmélete a 19. század közepéig nyúlik vissza. 1850-ben vetette fel Kirkman a következő problémát: ”Egy leányinternátusban 15 fiatal leány lakik, akik hármasával sorbaállva végzik napi sétájukat. Hogyan érhető el, hogy mindegyik leány hetenként éppen egyszer kerüljön mindegyik másik leánnyal egyazon hármas sorba?” Egy lehetséges sétarendet az alábbi, hét részre particionált mátrix szemléltet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 4 & 7 & | & 1 & 10 & 13 & | & 1 & 5 & 11 & | & 1 & 8 & 14 & | & 1 & 6 & 15 & | & 1 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 5 & 8 & 2 & 11 & 14 & 2 & 6 & 12 & 2 & 9 & 15 & 2 & 4 & 13 & 2 & 7 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 3 & 12 & 15 & 3 & 6 & 9 & 3 & 7 & 13 & 3 & 4 & 10 & 3 & 8 & 11 & 3 & 5 & 14 \\ 10 & 11 & 12 & 6 & 10 & 14 & 4 & 8 & 12 & 4 & 9 & 14 & 6 & 7 & 11 & 5 & 9 & 10 & 6 & 8 & 13 \\ 13 & 14 & 15 & 9 & 11 & 13 & 5 & 7 & 15 & 8 & 10 & 15 & 5 & 12 & 13 & 7 & 12 & 14 & 4 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Bizonyos absztrakt konfigurációkat *geometriai konfiguráció* formájában is realizálhatunk, ami azt jelenti, hogy a pontokat a sík (esetleg magasabb dimenziós tér) pontjaiként reprezentáljuk, a blokkok pedig adott típusú geometriai alakzatok lesznek. Ilyen értelemben beszélhetünk pl. *pont-egyenes*, *pont-kör*, *pont-kúpszelet*, stb. konfigurációkról. Az első és a harmadik esetben tipikusan a *valós projektív síkba*, a második esetben az *inverzív síkba* beágyazva tekintjük ezeket a konfigurációkat (*véges geometriai* példákat kizárunk a vizsgálódásainkból).

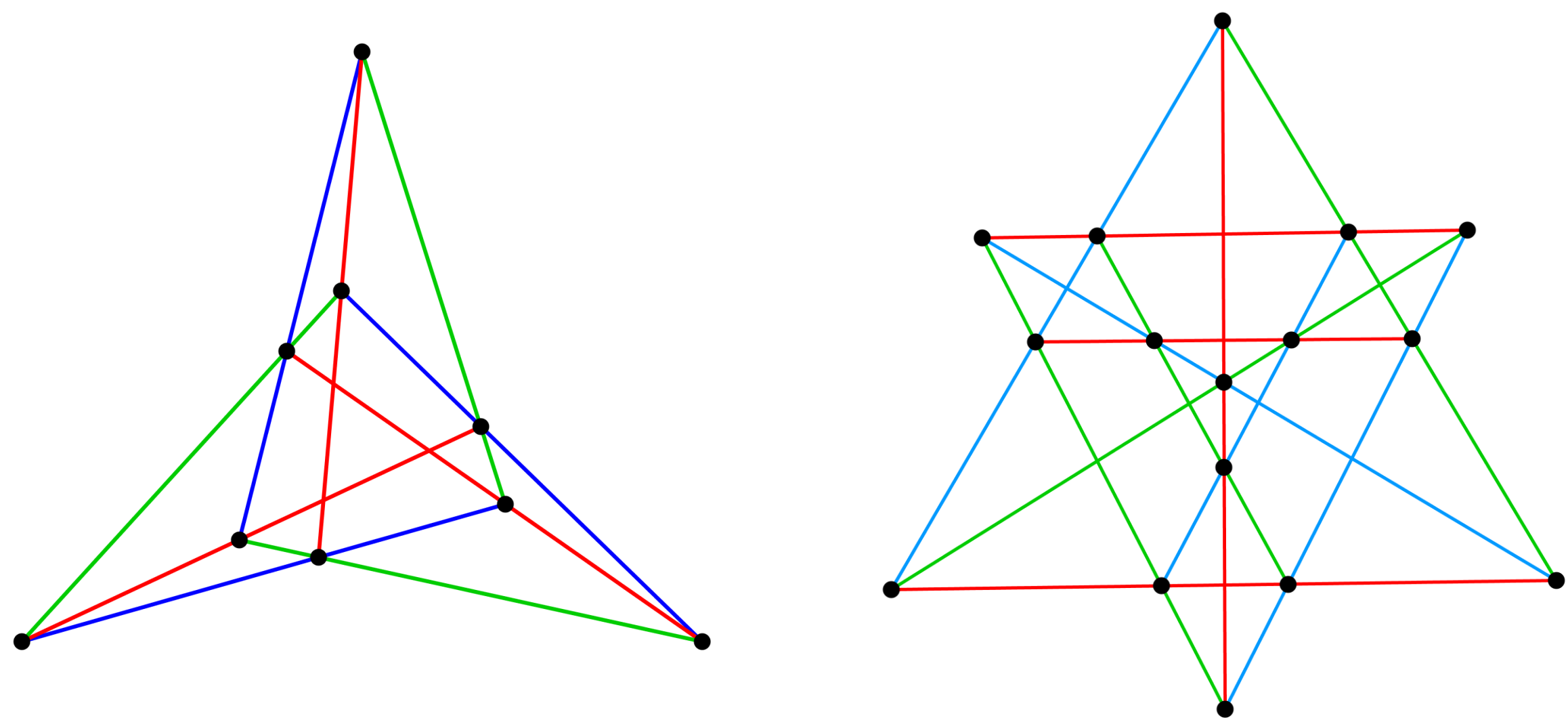
Nyilvánvalóan minden geometriai konfiguráció tekinthető kombinatorikus konfigurációnak is; a fordított állítás azonban nem igaz: nem minden kombinatorikus konfigurációnak létezik valamilyen, a fenti értelemben vett geometriai realizációja. Például, a Kirkman-pbléma megoldása (több, páronként nem-izomorf) $(15_7, 35_3)$ típusú konfigurációhoz vezet, és ráadásul, ezek lineális konfigurációk is; azonban tudjuk, hogy ezek nem reprezentálhatók a valós projektív síkban pont-egyenes konfigurációként (Korchmáros Gábor, 1980).

2 Feloldható konfigurációk

Ebben a munkában (a feloldható blokkrendszerek általánosításaként) bevezetjük a feloldható konfiguráció fogalmát.

Definíció. Legyen $r, k \geq 2$ és $v \geq 4$ pozitív egész, és tekintsünk egy (v_r, b_k) típusú $\mathcal{C} = (P, \mathcal{B})$ konfigurációt, ahol P és $\mathcal{B}$ a pontok, illetve blokkok halmaza. $\mathcal{B}$ egy diszjunkt blokkokból álló részhalmazát *parallel osztálynak* nevezzük, ha ezek a blokkok együttesen lefedik a pontok P halmazát. A $\mathcal{B}$ halmaz *feloldásán* egy parallel osztályokra való partícióját értjük. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ egy *feloldható konfiguráció*, ha létezik legalább egy feloldása.

A feloldhatóságot két, korábbról ismert geometriai konfiguráció példáján szemléltetjük; ezek: a klasszikus (9_3) Papposz-konfiguráció, illetve egy Zacharias nevéhez fűződő illeszkedési tételből származó $(16_3, 12_4)$ konfiguráció. (A – nem geometriai értelemben – parallel osztályokat mindkét esetben a színezés jelöli; ezek egyúttal itt egybeesnek az adott szimmetrikus reprezentációhoz tartozó szimmetriacsoportok – C_3 , illetve D_3 – szerinti egyenes-orbitokkal).



Ezek a példák a fenti definíció egy közvetlen következményeként adódó szabály is megfigyelhető:

- Egy (v_r, b_k) konfiguráció bármely feloldásában pontosan r számú parallel osztály van.

A feloldhatóság, illetve a blokkrendszerek definíciójából szintén közvetlenül adódik az alábbi állítás.

- Egy konfiguráció duálisa csak akkor feloldható, ha nem képez blokkrendszert.

Ez a tulajdonság is indokolja, hogy a blokkrendszert nem képező feloldható konfigurációkat egy önmagában is érdekes osztályként kezeljük. Azokat a konfigurációkat, amelyeknek a duálisa feloldható, *duálisan feloldható* konfigurációknak nevezzük. Egy (blokkrendszert nem képező) konfiguráció feloldhatóságából nem következik a duális feloldhatóság (a fenti példák közül azonban mindkettő duálisan is feloldható – a Papposz-konfiguráció esetében ez az öndualitás miatt van).

A dualitással némiképpen rokon fogalom adódik a feloldható konfigurációk esetén. Minden feloldható konfigurációhoz hozzárendelhető ugyanis egy olyan séma, amely a fenti $(15_7, 35_3)$ ”Kirkman-konfiguráció” kapcsán felírt (1) blokkmátrixhoz hasonló alakú. Az ilyen sémát a konfiguráció *feloldási sémájának* nevezzük. A mátrix partíciójában szereplő részmátrixok a parallel osztályokat írják le, úgy, hogy a részmátrixok sorai a konfiguráció blokkjainak felelnek meg (a mátrixelemek a pontok). Ha ebben a sémában vesszük mindegyik ilyen részmátrixnak a transzponáltját, olyan sémát kapunk, amely szintén egy feloldható konfigurációt ír le (a konfiguráció blokkjait az eredeti séma részmátrixainak az oszlopai írják le). Az így kapott konfigurációt az eredeti konfiguráció *transzponáltjának* nevezzük. (A fenti példa transzponáltjaként tehát egy $(15_7, 21_5)$ típusú konfiguráció adódik.) Általában, ha feltesszük, hogy egy feloldható (v_r, b_k) konfiguráció duálisa is feloldható, továbbá a transzponálás és dualizálás minden lehetséges kombinálásával adódó konfigurációk mindegyike feloldható, akkor megmutatható, hogy összesen 6 (nem feltétlenül különböző) típus lehetséges, amelyek az alábbi diagramba rendezhetők (δ a duális leképezést, τ a transzponálást jelöli).

$$\begin{array}{ccccc} (v_r, b_k) & \xrightarrow{\delta} & (b_k, v_r) & \xrightarrow{\tau} & (b_k, (rk)_{b/r}) \\ \tau \downarrow & & & & \downarrow \delta \\ (v_r, (rk)_{b/r}) & \xrightarrow{\delta} & ((rk)_{b/r}, v_r) & \xrightarrow{\tau} & ((rk)_{b/r}, b_k) \end{array}$$

Feloldható konfigurációk

Gévay Gábor

SZTE Bolyai Intézet

3 Konstrukciók

Érdekes új példákat konstruáltunk olyan geometriai konfigurációkra, amelyek feloldhatók.

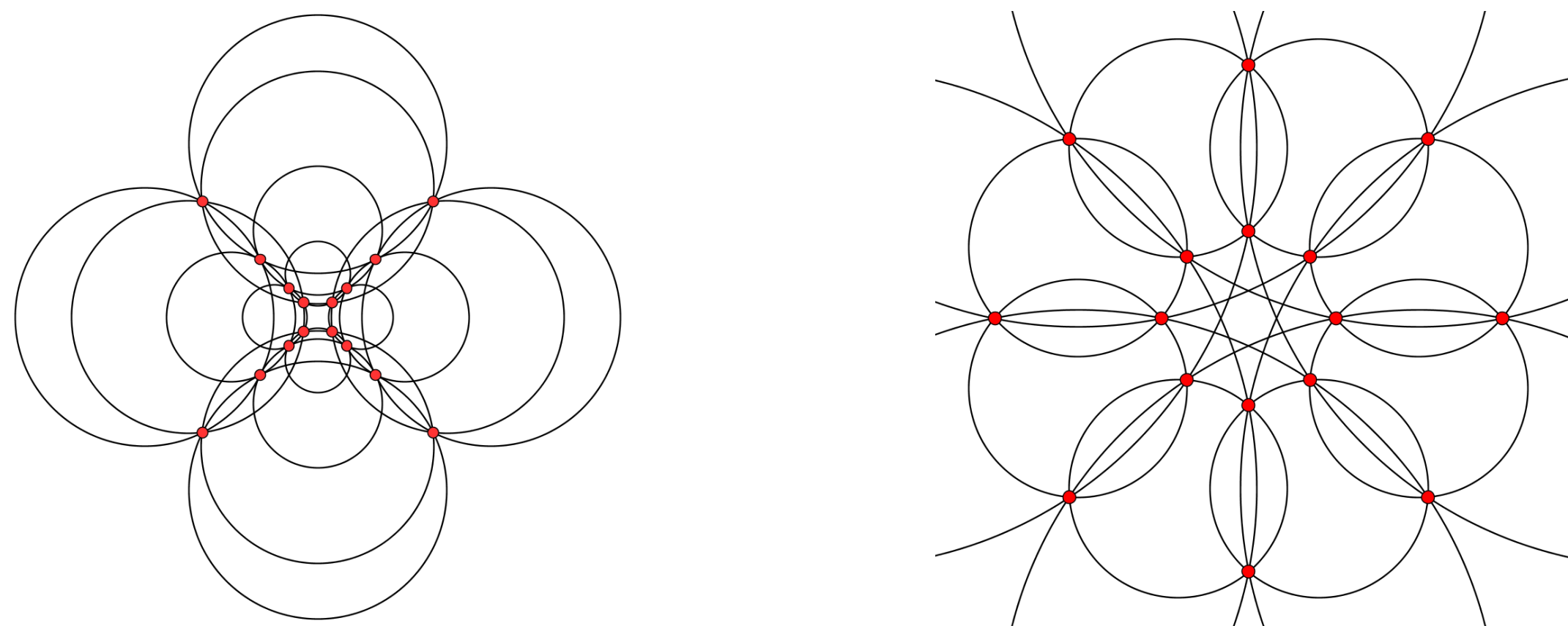
3.1 Toroidális körkonfigurációk kétszeresen végtelen családjá

- Minden $m, n > 2$ páros egész számra létezik $((mn)_4)$ típusú feloldható pont-kör konfiguráció.

A feloldhatóság abból adódik, hogy a konstrukció kiindulópontjaként egy $m \times n$ négyzetrács szolgál; egy ilyen rácsban a négyzetek négy színnel színezhetők úgy, hogy bármely két közös éllel rendelkező négyzet színe különböző. A körök – elvben – e négyzetek körülírt körei (a konfiguráció pontjai pedig a négyzetek csúcsai). ”Toroidális” azért, mert a rács két-két ellentétes oldalát – absztrakt módon – azonosítjuk. ”Merev”, azaz nem mozgatható formában egy ilyen konfiguráció triviálisan megrajzolható a síkon. A konstrukció érdekessége azonban, hogy *mozgatható* megoldást szolgáltat. (Egy pont-kör konfiguráció *merev*, ha a geometriai reprezentáció az inverzív síkon kögyenestartó transzformációkra nézve egyetlen orbitot képeznek; a konfiguráció *mozgatható*, ha nem merev. Pont-egyenes konfigurációk mozgathatósága hasonlóan definiálható, a – valós – projektív síkon, projektív transzformációkat tekintve; a korábban említett Papposz-, illetve Zacharias-féle konfiguráció ez utóbbi értelemben szintén mozgatható, ami annak a következménye, hogy mindkettő *illeszkedési tételből* származtatható.) A mozgathatóság érdekében itt az alábbi illeszkedési tételt használtuk ki, amelyet a klasszikus Miquel-féle 6-kör tétel kiterjesztéseként kaptunk.

Tétel. Legyen α and β két kör, és legyen $n > 2$ egy páros egész szám. Vegyük az $A_1, \dots, A_n$ pontokat az α , a $B_1, \dots, B_n$ pontokat a β körön úgy, hogy az $(A_1, B_1, A_2, B_2), \dots, (A_{n-1}, B_{n-1}, A_n, B_n)$ pontnégyesek mindegyike konciklikus (azaz, létezik körülírt köre). Ekkor az (A_n, B_n, A_1, B_1) pontnégyes is konciklikus.

Az alábbi, bal oldali ábra a konfiguráció-osztály legkisebb, (16_4) típusú elemét szemlélteti.



3.2 $((4n)_4)$ típusú körkonfigurációk végtelen sorozata

A fenti jobb oldali ábra e másik végtelen sorozat első elemét mutatja – ez szintén (16_4) típusú, de közvetlenül látható, hogy nem izomorf az előbbivel.

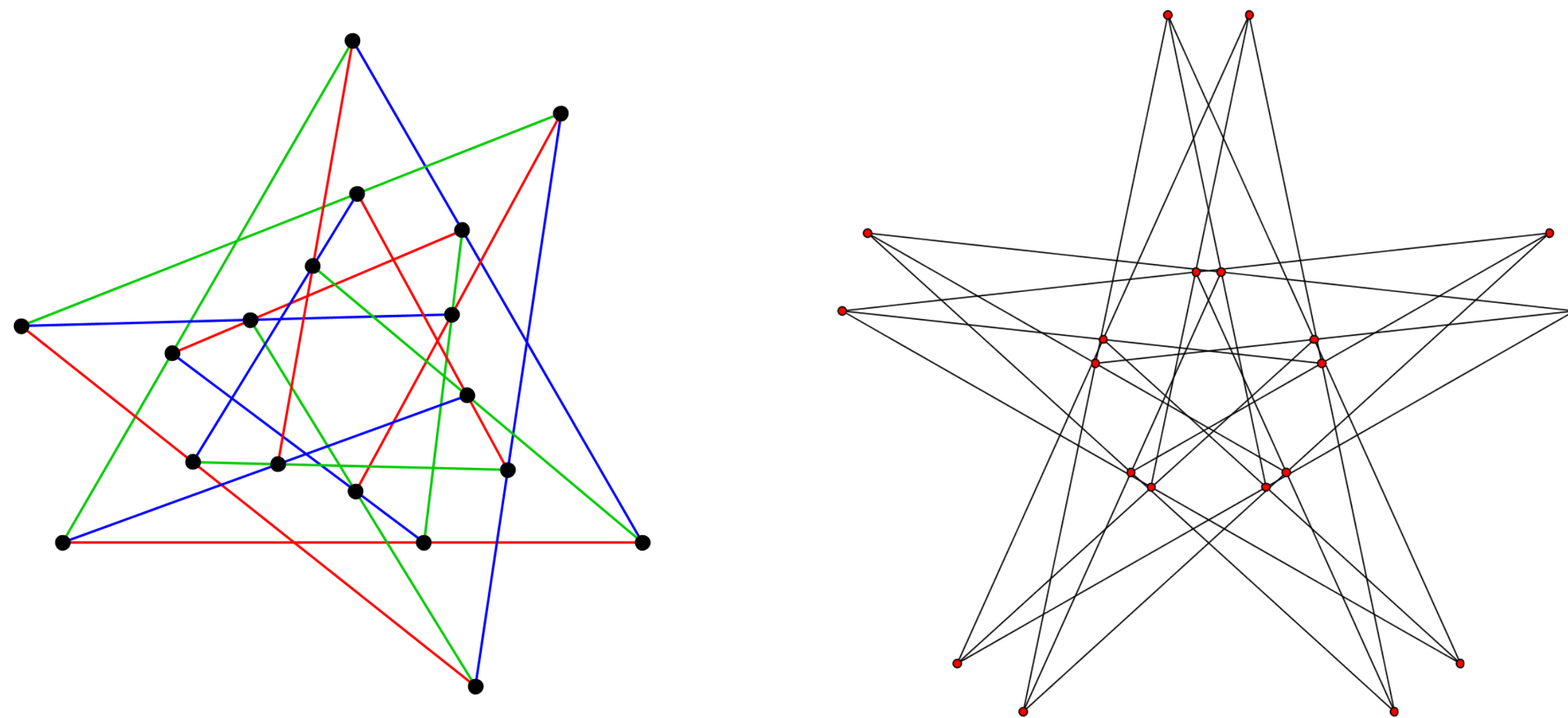
- Minden 4-gyel osztható $n > 4$ egész számra létezik $((4n)_4)$ típusú, a fentiek egyikével sem izomorf, feloldható pont-kör konfiguráció.

A szimmetrikus (szabályos sokszög-szimmetriájú) reprezentáció itt is triviális, azonban létezik mozgatható reprezentáció, ami szintén a kiterjesztett Miquel-tétel alkalmazásából adódik.

3.3 Ciklikusan egymásba írott szabályos sokszögek kétszeresen végtelen családjá

- Minden $k \geq 1$ és $m \geq 2$ egész számra létezik $((6kn)_3)$ típusú feloldható pont-egyenes konfiguráció.

Ez a konstrukció egy Grünbaum által adott (12_3) típusú konfigurációt általánosít. Itt $(3k)$ -oldalú szabályos sokszögek $2m$ példányát írjuk ciklikusan egymásba, abban az értelemben, hogy az elsőt a másodikba, a másodikat a harmadikba, stb., végül az utolsót az elsőbe írjuk. A konstrukció messzemenően kihasználja a szabályos sokszögek szimmetria-tulajdonságait; nem tudjuk, hogy mindegyik példány realizálható-e aszimmetrikus formában is.



3.4 Egy sporadikus példa feloldható pont-kúpszelet konfigurációra

- Létezik (21_7) típusú feloldható pont-kúpszelet konfiguráció.

Ez a példa azon alapszik, hogy a klasszikus Felix Klein-féle (21_4) konfiguráció Grünbaum és Rigby által megadott D_7 szimmetriájú pont-egyenes realizációjában a konfiguráció bizonyos ponthetesei köré kúpszeletek írhatók, amelyek partícionálják a ponthalmazt. Így 3 különböző típusú kúpszelet adódik, amelyek (a D_7 csoport szerint) két ellipszis- és egy hiperbola-orbitot alkotnak. A konfiguráció merev, és nemtudjuk, hogy van-e mozgatható realizációja (ld. az alábbi, bal oldali ábrát). A jobb oldali ábrán egy rokon példányt mutatunk be, amely az előbbivel szemben nem feloldható; itt 7 ellipszis és 14 hiperbola van. (Ezekben az ábrákban a színezés nem a parallel osztályokat, hanem az orbitokat jelöli.)

