

Véges konvex geometriák reprezentációja „szép” konvex halmazokkal

Kincses J.

Konvex geometria

$(E, \mathcal{C})$, ahol E véges halmaz, $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ (konvex halmazok), továbbá:

- 1 $\emptyset, E \in \mathcal{C}$,
- 2 ha $X, Y \in \mathcal{C}$, akkor $X \cap Y \in \mathcal{C}$,
- 3 ha $X \in \mathcal{C} \setminus \{E\}$, akkor létezik $e \in E \setminus X$, melyre $X \cup \{e\} \in \mathcal{C}$.

Konvex burok: $\text{conv}_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap \{C \mid A \subseteq C, C \in \mathcal{C}\}$

(E, Φ) , ahol E véges halmaz, $\Phi: 2^E \rightarrow 2^E$, melyre:

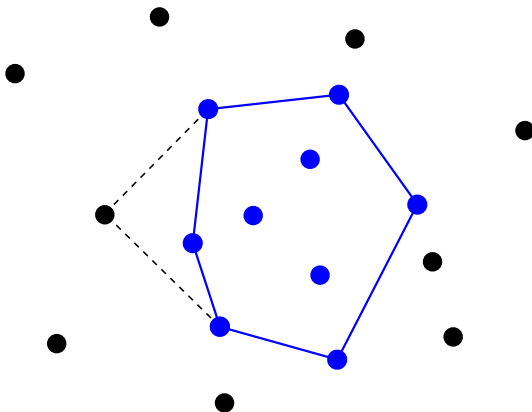
- 1 bármely $X \subseteq Y \subseteq E$ esetén $X \subseteq \Phi(X) \subseteq \Phi(Y) = \Phi(\Phi(Y))$,
- 2 $\Phi(\emptyset) = \emptyset$,
- 3 ha $A \subseteq E$, $x, y \in E \setminus \Phi(A)$ és $\Phi(A \cup x) = \Phi(A \cup y)$, akkor $x = y$. (anti-exchange property)

Konvex halmaz: $\Phi(X) = X$

Standard példa

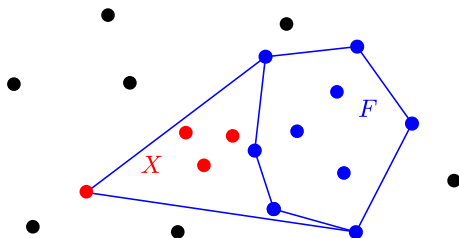
Affin konvex geometria

P egy véges ponthalmaz $\mathbb{R}^d$ -ben és $\Phi(X) = \text{conv}_{\mathbb{R}^d}(X) \cap P$



Kontrakció

$(E, \mathcal{C})$ geometria, $F \subseteq E$, $F \in \mathcal{C}$. A kontrakció $(E \setminus F, \mathcal{C}/F)$, ahol
 $\mathcal{C}/F = \{C \subseteq E - F \mid C = \text{conv}_{\mathcal{C}}(D \cup F) \setminus F \text{ valamely } D \subseteq E \setminus F \text{ esetén}\}$
Pontrendszerek esetén **relatív affin konvex geometriának** nevezzük.



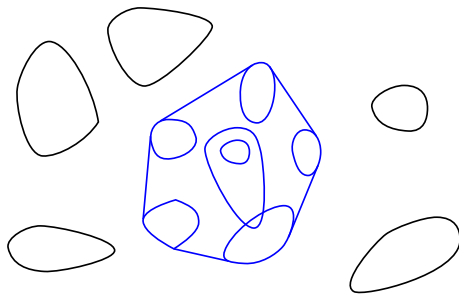
Kashiwabara, Nakamura, Okamoto (2005)

Bármely konvex geometria izomorf egy relatív affin konvex burokkal.

Konvex halmazrendszerek

$\mathcal{K}$ kompakt konvex halmazrendszer $\mathbb{R}^d$ -ben. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$ esetén legyen

$$\text{conv}_{\mathcal{K}}(\mathcal{S}) = \{K \in \mathcal{K} : K \subseteq \text{conv}_{\mathbb{R}^d}(\cup_{S \in \mathcal{S}} S)\}.$$



($d = 2$) Ha bármely két halmaznak legfeljebb véges sok közös támaszegyenese van, akkor $(\mathcal{K}, \text{conv}_{\mathcal{K}})$ konvex geometria.

Reprezentáció konvex halmazokkal:

Czédli (2014)

Minden konvex geometria, melyre $\text{cdim}(E, \mathcal{C}) \leq 2$ reprezentálható körökkel a síkon.

Adaricheva, Bolat (2016)

Vannak konvex geometriák, amik nem reprezentálhatók körökkel.

Problémák. 1. Reprezentáció ellipszisekkel vagy más „szép” alakzatokkal a síkon.

2. Reprezentáció gömbökkel magasabb dimenzióban.

Richter, Rogers (2016)

Bármely konvex geometria reprezentálható konvex sokszögekkel a síkon. Ha $\text{cdim}(E, \mathcal{C}) = M$, akkor a M -szögekkel megtehető.

Czédli, K.J. (2017)

Létezik a síkon konvex halmazoknak egy $\mathcal{T}$ családja, amelyre:

- ha $K \in \mathcal{T}$ és f affinitás, akkor $f(K) \in \mathcal{T}$,
- bármely $K \in \mathcal{T}$ határa sima, szakaszonként polinomiális (a fokszám legfeljebb 7),
- $\mathcal{T}$ bármely véges részrendszere konvex geometria,
- bármely konvex geometria reprezentálható $\mathcal{T}$ egy részrendszerével, aminek elemei tetszőlegesen közel vannak egy körhöz.

A Richter-Rogers konstrukció módosítása

Konvex geometriák definiálása rendezésekkel (Edelman, Jamison):

Adott az E -n lineáris rendezéseknek egy $\{\preceq_i\}_{i=1}^m$ családja. Ekkor

$$\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq E : \forall y \notin X, \exists i, \text{ hogy } \forall x \in X, x \prec_i y\}$$

konvex geometria lesz és minden konvex geometria megkapható ily módon.

Konvex dimenzió: $\text{cdim}(E, \mathcal{C})$ a legkisebb m , melyre a geometria generálható m rendezéssel.

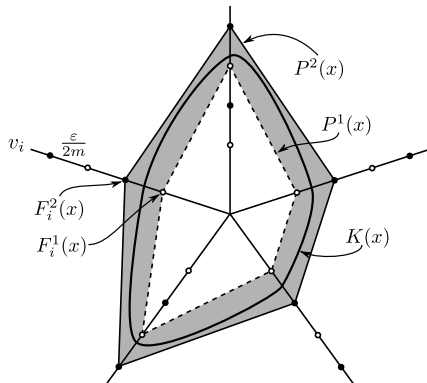
Koordinátázás: $j_i(x)$ az x hányadik a $\preccurlyeq_i$ rendezésben

$$F_i^1(x) = \left(1 + \frac{2j_i(x) - 1}{2m}\varepsilon\right) v_i \quad F_i^2(x) = \left(1 + \frac{2j_i(x)}{2m}\varepsilon\right) v_i.$$

$$P^1(x) = \text{conv}_{\mathbb{R}^2}\{F_1^1(x), \dots, F_m^1(x)\}$$

$$P^2(x) = \text{conv}_{\mathbb{R}^2}\{F_1^2(x), \dots, F_m^2(x)\}$$

$$P^1(x) \subseteq K(x) \subseteq P^2(x) \text{ tetszőleges; } \mathcal{K} := \{K(x)\}_{x \in E}$$



Tétel. (K.J.)

$(\mathcal{K}, \text{conv } \mathcal{K})$ konvex geometria és $\Phi: x \rightarrow K(x)$ izomorfizmus $(E, \{\preceq_i\}_{i=1}^m)$ és $(\mathcal{K}, \text{conv } \mathcal{K})$ között.

Következmények.

1. Nagy szabadságunk van a $K(x)$ választásánál:

- konvex halmazok analitikus támaszfüggvénnyel,
- konvex halmazok sima algebrai támaszfüggvénnyel.

2. A konstrukció érzékeny a rendezések számára. Ha mindegyik rendezést s -szer vesszük, akkor ugyanazt a geometriát definiálják, viszont a konstrukcióban sm -szögeket kapunk. Elég nagy s és elég kicsi ε esetén ezek tetszőlegesen közel lesznek az egységkörhöz, így a $K(x)$ halmazok is.

Erdős-Szekeres típusú akadályok:

Pach, Tóth (2000)

Létezik szakaszoknak egy végtelen rendszere úgy, hogy

- bármely három konvex helyzetben van,
- nincs négy konvex helyzetben.

Dobbins, Holmsen, Hubard (2015)

Bármely $n > k \geq 1$ egészekre létezik egy $h_k(n)$ minimális pozitív egész, amelyre: bármely legalább $h_k(n)$ db konvex halmaz esetén, ha bármely kettőnek legfeljebb $2k$ közös támaszegyenese van és bármely m_k db konvex helyzetben van, akkor van köztük n db konvex helyzetben. Itt $m_1 = 3$, $m_2 = 4$ és $m_k = 5$ ha $k \geq 3$.

Létezik konvex halmazoknak bármilyen nagy rendszere, amikre

- bármely kettőnek éppen hat közös támaszegyenese van,
- bármely négy konvex helyzetben van,
- nics köztük öt konvex helyzetben.

Következmény.

a) Létezik konvex geometria, ami reprezentálható ellipszisekkel, de nem reprezentálható körökkel.

(a Pach-Tóth konstrukcióból vegyünk $h_1(4)$ ellipszist, a tétel miatt nem reprezentálhatók körökkel)

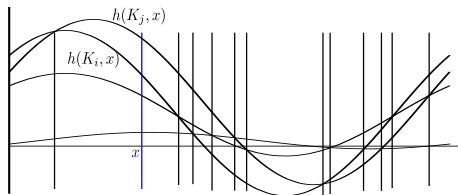
b) Létezik konvex geometria, ami nem reprezentálható ellipszisekkel.

(a Dobbins-Holmsen-Hubard konstrukcióból $h_2(5)$ halmazt nem reprezentálható ellipszisekkel)

A konvex dimenzió felső becslése a síkon:

Legyen $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$ és $h(K_i, x)$ a K_i támaszfüggvénye. Az x reguláris egységvektor ($h(K_i, x) \neq h(K_j, x)$ for $i \neq j$) esetén legyen

$K_i \prec_x K_j$ akkor és csak akkor ha $h(K_i, x) < h(K_j, x)$.



- ha bármely két halmaznak legfeljebb k közös támaszegyenese van, akkor a különböző rendezések száma legfeljebb $k \binom{n}{2}$
- ezek a rendezések meghatározzák a $(\mathcal{K}, \text{conv } \mathcal{K})$ konvex geometriát

$$\text{cdim}(\mathcal{K}, \text{conv } \mathcal{K}) \leq k \binom{n}{2}$$

A konvex dimenzió alsó becslése:

Kopont: egy adott pontot nem tartalmazó, tartalmazásra maximális konvex halmaz

$M(E, \mathcal{C})$ a kopontok részposetje

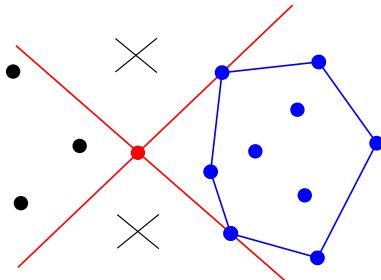
$w(M(E, \mathcal{C}))$ a maximális elemszámú, tartalmazásra független kopontok száma

Edelman, Saks (1988)

$$\text{cdim}(E, \mathcal{C}) = w(M(E, \mathcal{C}))$$

Keressünk sok független kopontot!

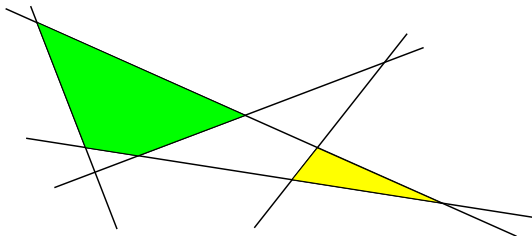
Kopontok a síkban:



Minden kopont egyenessel levágott halmaz (fordítva nem igaz).
Kopontok száma $O(n^2)$

Kérdés. Mekkora lehet egy síkbeli pontrendszer konvex dimenziója?

$(a, b) \iff y = ax + b$ dualitással egyenesrendszerekre áttérve



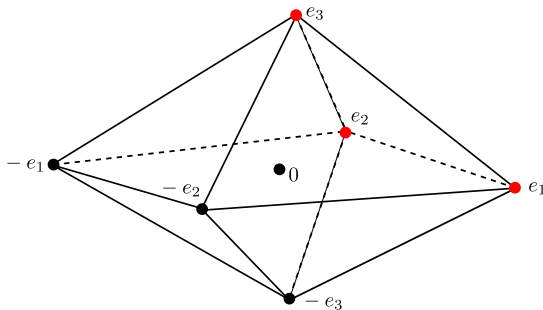
Kopont: olyan cella, aminek a felső (alsó) íve egyetlen él

Matoušek egyenesrendszerek hosszú monoton útjára vonatkozó konstrukciójának módosításával:

(Tóth, Pór, Valtr...) $\text{cdim}(P) = \Omega(n^{5/3})$

Kopontok magasabb dimenzióban:

$\{e_i\}_1^n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben, $E_{CR} = \{0, \pm e_i\}$

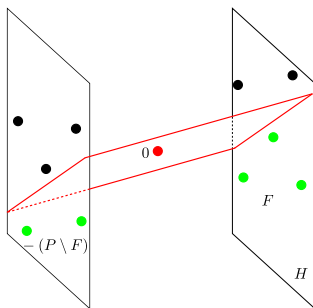


Az egy hiperlapon levő pontok a 0-nak kopontját alkotják
Ezek függetlenek (mindegyik n elemű)

$$\text{cdim}(E_{CR}) = 2^n$$

Általánosabban:

A H hipersíban $P = \{p_i\}_1^n$ általános helyzetű pontrendszer.
Legyen $E = \{0, \pm p_i\}$. Ha $F \subseteq P$ a H -ban hipersíkkal levágható,
akkor $F \cup \{-(P \setminus F)\}$ kopontja 0-nak.



$$\text{cdim}(E) = \Omega(n^{d-1})$$

Nem korlátozható a metszési szám:

Az alsó és felső becslésből adódik:

ha E_{CR} reprezentálható páronként legfeljeb k közös támaszegyenesű konvex halmazokkal a síkon, akkor

$$2^n = \text{cdim}(E_{CR}) \leq k \binom{2n+1}{2}$$

Újabb akadály arra, hogy körökkel, ellipszisekkel nem lehet minden geometriát reprezentálni.

Következmény. (K.J.)

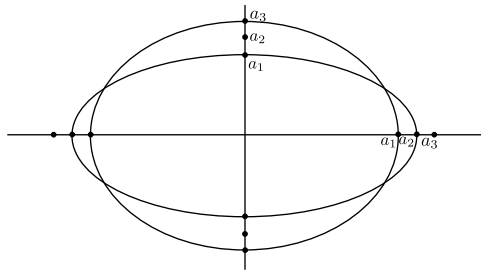
Nincs olyan k_0 univerzális egész, hogy bármely konvex geometria reprezentálható páronként legfeljebb k_0 közös támaszegyenesű konvex halmazokkal.

Reprezentáció ellipszoidokkal:

Tétel (K.J.) Bármely d konvex dimenziós geometria reprezentálható az egységgömbhöz tetszőlegesen közeli ellipszoidokkal $\mathbb{R}^d$ -ben.

A Richter-Rogers konstrukcióhoz hasonlóan:

Ellipszoidok $\sum \frac{x_i^2}{a(j_i(g))^2} \leq 1$, alakúak, ahol $j_i(g)$ a g koordinátái a rendezésekre és $a(n)$ egy alkalmas számsorozat



A lineáris dimenzió nem korlátozható.

Gömbök d dimenzióban:

Marad a kérdés: Reprezentálható-e minden konvex geometria gömbökkel?

Erdős-Szekeres akadály?

Kérdés: Adott 5 gömb $\mathbb{R}^d$ -ben úgy, hogy bármely 3 konvex helyzetben van. Igaz-e, hogy van köztük 4 konvex helyzetben?

Köszönöm a figyelmet!