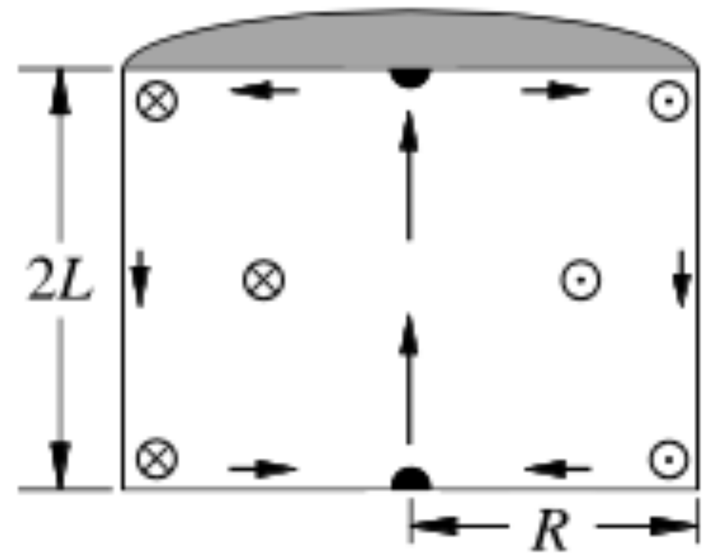
Kalibrációk kompakt sokaságokon

László Székelyhidi Jr.
Universität Leipzig

Motiváció: Hubert&Schäfer: Magnetic Domains, 1998

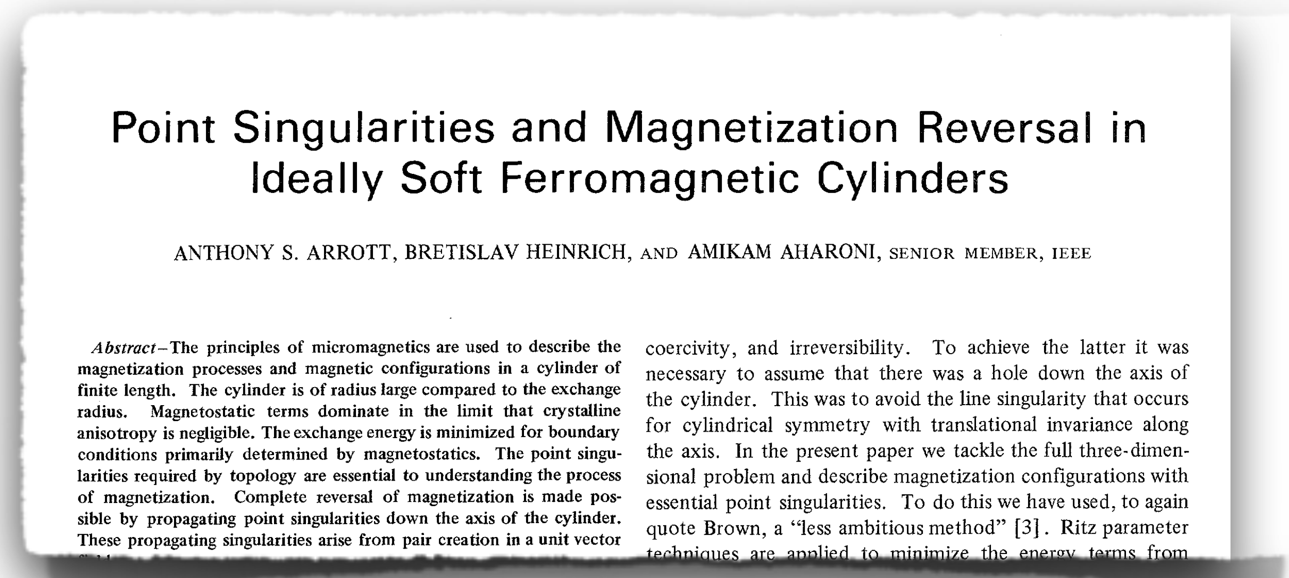
Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy nyílt, korlátos tartomány sima peremmel.
Létezik-e olyan $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ vektormező, amelyre igaz:

- $|u|^2 = 1 \text{ in } \Omega$
- $\operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega$
- $u \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega$



és u véges sok, a $\partial\Omega$ peremen található **szinguláris pont** kivételével sima.

A. Arrott, B. Heinrich, and A. Aharoni,
IEEE Transactions on Magnetics, vol. 15, no. 5, 1979.



Point Singularities and Magnetization Reversal in Ideally Soft Ferromagnetic Cylinders

ANTHONY S. ARROTT, BRETISLAV HEINRICH, AND AMIKAM AHARONI, SENIOR MEMBER, IEEE

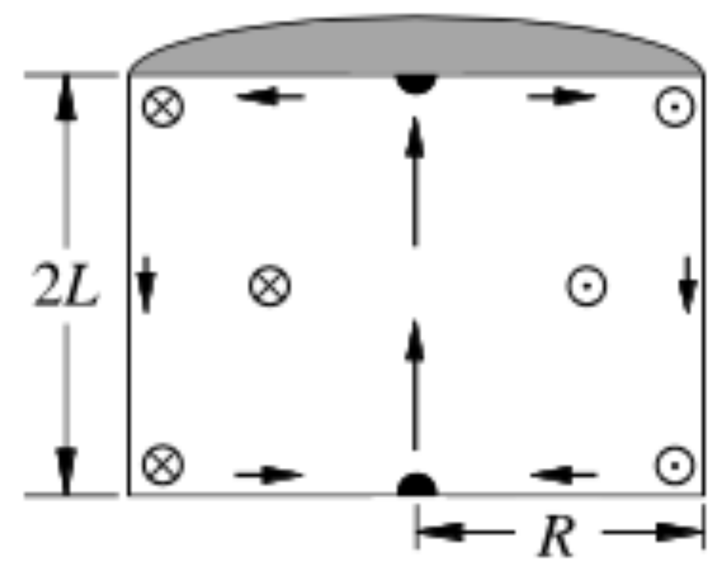
Abstract—The principles of micromagnetics are used to describe the magnetization processes and magnetic configurations in a cylinder of finite length. The cylinder is of radius large compared to the exchange radius. Magnetostatic terms dominate in the limit that crystalline anisotropy is negligible. The exchange energy is minimized for boundary conditions primarily determined by magnetostatics. The point singularities required by topology are essential to understanding the process of magnetization. Complete reversal of magnetization is made possible by propagating point singularities down the axis of the cylinder. These propagating singularities arise from pair creation in a unit vector

coercivity, and irreversibility. To achieve the latter it was necessary to assume that there was a hole down the axis of the cylinder. This was to avoid the line singularity that occurs for cylindrical symmetry with translational invariance along the axis. In the present paper we tackle the full three-dimensional problem and describe magnetization configurations with essential point singularities. To do this we have used, to again quote Brown, a "less ambitious method" [3]. Ritz parameter techniques are applied to minimize the energy terms from

Motiváció: Hubert&Schäfer: Magnetic Domains, 1998

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy nyílt, korlátos tartomány sima peremmel.
Létezik-e olyan $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ vektormező, amelyre igaz:

- $|u|^2 = 1 \text{ in } \Omega$
- $\operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega$
- $u \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega$



és u véges sok, a $\partial\Omega$ peremen található **szinguláris pont** kivételével sima.

Megjegyzés:

- Szinguláris pontok a peremen mindenképpen vannak
- 2 dimenzióban tipikusan 1-dimenziós szinguláris görbék léteznek

Vektorpotenciál

Vektorpotenciál $w : \Omega \to \mathbb{R}^3$, ahol $u = \operatorname{curl} w$

- $|u|^2 = 1 \text{ in } \Omega$
- $\operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega$

$\Longleftrightarrow$

- $|\operatorname{curl} w|^2 = 1 \text{ in } \Omega$

Linearizáció az $u_0 = \operatorname{curl} w_0$ **pontban:**

$$\langle u_0, \operatorname{curl} w \rangle = h \text{ in } \Omega$$

$$|\mathrm{curl}\ w|^2 = 1 \text{ in } \Omega$$

Linearizáció az $u_0 = \mathrm{curl}\ w_0$ **pontban:**

$$\langle u_0, \mathrm{curl}\ w\rangle = h \text{ in } \Omega$$

azaz:

$$L_1 w^1 + L_2 w^2 + L_3 w^3 = h \text{ in } \Omega$$

$$L_1 = u_0^2 \partial_3 - u_0^3 \partial_2$$
$$L_2 = u_0^3 \partial_1 - u_0^1 \partial_3$$
$$L_3 = u_0^1 \partial_2 - u_0^2 \partial_1$$

ortogonalitás:

$$\langle L_i, u_0\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$L_1 w^1 + L_2 w^2 + L_3 w^3 = h \text{ in } \Omega$$

1. Az integrálható eset:

$$[L_i, L_j] \in \text{span}\{L_1, L_2, L_3\} \iff \langle u_0, \text{curl } u_0 \rangle = 0$$

Frobenius tétele: Ebben az esetben létezik az u_0 vektormezőre merőleges 1-kodimenziós fóliázás.

- $|u|^2 = 1$
- $\text{div } u = 0$
- $\langle u, \text{curl } u \rangle = 0$

$\iff$ "kalibráció"

Fóliázás minimálfelületekkel

Tétel (D. Sullivan): Egy 1-kodimenziós $\mathcal{F}$ fóliázáshoz egy kompakt M^3 sokaságon pontosan akkor létezik olyan metrika melyre a fóliázás minimális, ha $\mathcal{F}$ feszes ("taut").

$$\langle u_0, \mathrm{curl}\ w\rangle = h \text{ in } \Omega$$

---

2. A nem-integrálható eset: $\langle u_0, \mathrm{curl}\ u_0\rangle \geq \delta > 0$

- Az u_0-ra duális 1-forma $u_0^\flat$ meghatároz egy kontakt-struktúrát.

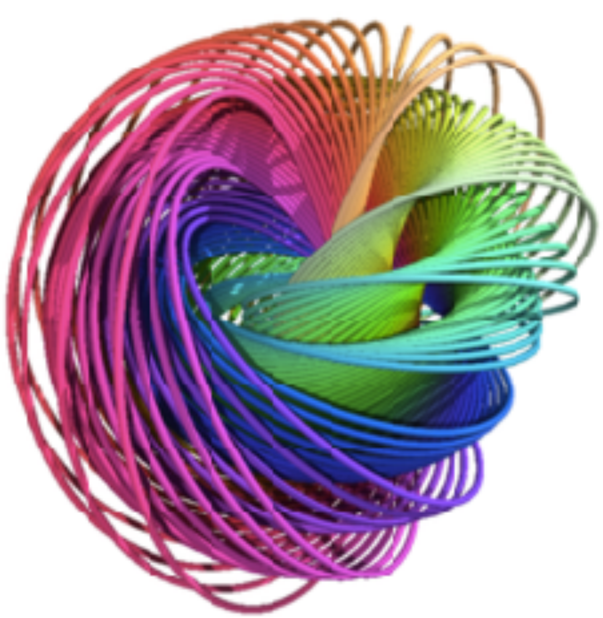
  …vagyis $u_0^\flat \wedge du_0^\flat$ egy térfogatalak.

- Egy példa: ha ω az S^2-n a térfogatalak,

  $\mathcal{H} : S^3 \to S^2$ a Hopf-leképezés,

  akkor $u = (*\mathcal{H}^*\omega)^\sharp$ egy vektormező, melyre:

  - $|u|^2 = 1$
  - $\mathrm{div}\ u = 0$
  - $\langle u, \mathrm{curl}\ u\rangle = 1$



$|\mathrm{curl}\ w|^2 = 1 \text{ in } \Omega$

Tétel (Canevari-Sz): Ha

$$\langle u_0, \mathrm{curl}\ u_0 \rangle \geq \delta > 0$$

akkor létezik $r > 0$ és $\varepsilon > 0$ hogy ha

$$\left| |u_0|^2 - 1 \right| < \varepsilon$$

akkor van olyan sima u melyre $\mathrm{div}\ u = 0,\ |u|^2 = 1$ és

$$\|u_0 - u\|_{C^1} < r$$

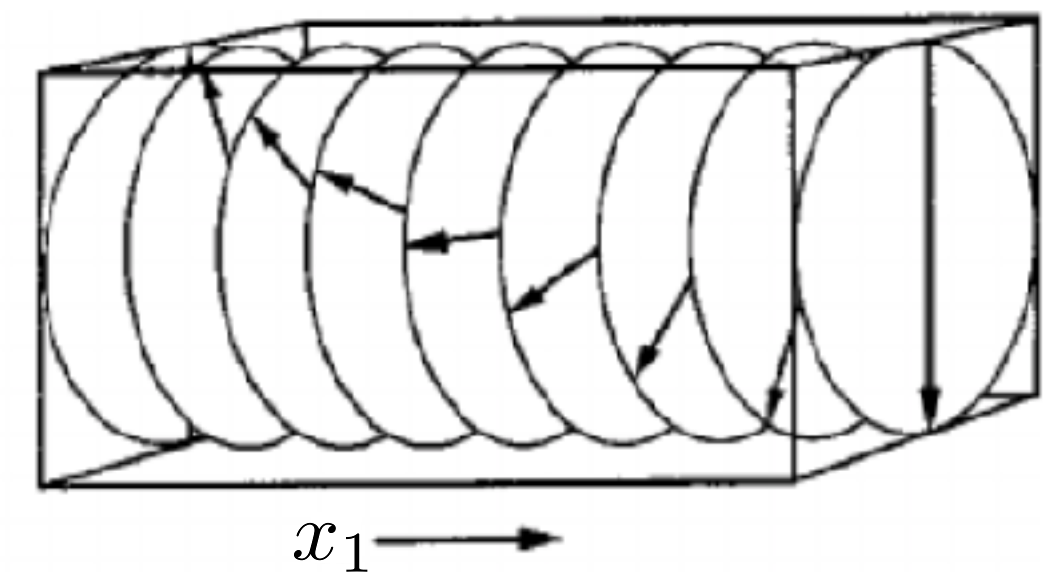
$$w \mapsto h = \langle u_0, \mathrm{curl}\ w \rangle \qquad C^k \to C^{k-1}$$

$$h \mapsto w = \frac{h}{\langle u_0, \mathrm{curl}\ u_0 \rangle} u_0 \qquad C^{k-1} \to C^{k-1}$$

Bizonyítás: Nash-Moser iterációval

$$\left| |u_0|^2 - 1 \right| < \varepsilon$$

Egyszerű div-mentes mező: “Bloch-fal”



$$u(x) = a(x_1)e_2 + b(x_1)e_3$$

Két-skálás div-mentes vektormező:

$$u_\lambda(x) = a(\lambda x_1, x)e_2 + b(\lambda x_1, x)e_3 + O(\tfrac{1}{\lambda})$$

ha a és b a “gyors” változójában periodikus nulla átlaggal.

$$|u_0 + u_\lambda|^2 \overset{!}{=} |u|^2 + f + O(\tfrac{1}{\lambda})$$

$(M^n, g) \quad n \geq 6$

$$\chi(M) \neq 0$$

Tétel (Canevari-Sz): Ha $n \geq 6$ és (M^n, g) egy kompakt Riemann-sokaság, akkor minden kritikuspont-mentes vektormező M^n-en homotóp egy sima, nem-integrálható divergenciamentes egységhosszúságú vektormezővel.

- $|u|^2 = 1$
- $\mathrm{div}\ u = 0$
- $u^\flat \wedge du^\flat \neq 0$

$(M^n, g) \quad n \geq 6$

Tétel (Eliashberg-Gromov): Ha $n \geq 3$ és (M^n, g) egy sokaság, akkor minden kritikuspont-mentes vektormező homotóp egy kritikuspont-mentes divergenciamentes vektormezővel.

Lemma (Thom-transzverzalitás): Ha $n \geq 6$ akkor a nem-integrálható C^k vektormezők halmaza sűrű C^k-ban.

$$u^\flat \wedge du^\flat \neq 0$$

$\mathbb{R}^3$ két-skálás Bloch-fal

$\mathbb{R}^3$ Moser-iteráció