

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Geometria Tanszék
Matematikus

DIPLOMAMUNKA
Poliéderek konstruálása kiemeléssel

Hartmann Zoltán
V. éves matematikus hallgató

Témavezető:
Dr. Kincses János
egyetemi docens

Szeged, 2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Szükséges fogalmak, definíciók, jelölések	5
1.2. Fontosabb tételek, állítások	8
2. Egyensúlyi súlyozás	12
2.1. Súlyozás, egyensúlyi súlyozás	12
2.2. Reciprok diagram	13
2.3. Egyensúlyi súlyozás K_4 -en	19
3. Egyensúlyi beágyazás $\mathbb{R}^2$-be	22
3.1. Belső pontok beágyazása	22
3.2. A külső pontok beágyazása	25
3.3. Példák a beágyazásra	32
4. Kiemelés	35
4.1. Egyensúlyban lévő gráf kiemelése	35
4.2. Példa a beágyazásra	40
5. Az algoritmusról	44
5.1. Egész értékű beágyazás és kiterjedés	44
5.2. Az implementáció áttekintése	45
6. Összefoglalás	49

1. Bevezetés

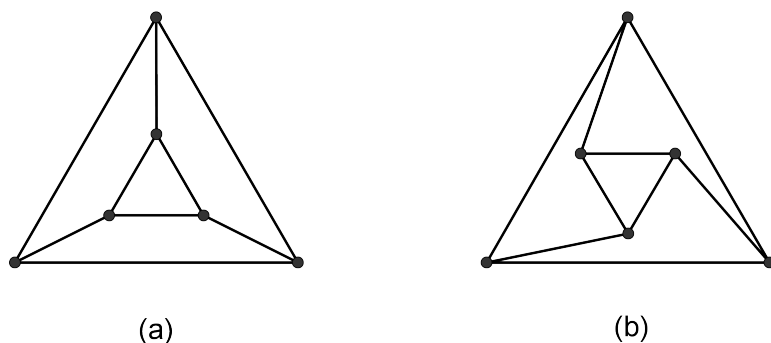
Egy poliéder éleiből és csúcsaiból képzett G gráf kombinatorikusan leírja magát a poliédert, azaz ilyen értelemben elegendő információt tartalmaz arról. A poliéderek és gráfjaik közötti kapcsolatról sok szép eredmény született, ezek legfontosabbjait áttekintésképpen a bevezető fejezetben – a szükséges fogalmakat definiáló rész után – összefoglaltuk. Ezek közül számunkra a legfontosabb Steinitz tétele, mely szerint minden 3-összefüggő egyszerű síkgráf egy poliéder gráfja. Felmerülhet az igény, hogy egy ilyen gráf esetén konstruáljunk egy olyan poliédert, melynek ez lesz a gráfja.

Ehhez a kiemelés eljárását alkalmazzuk, mely algoritmizált formában André Schulz doktori disszertációjában [1] került kidolgozásra. Dolgozatom ezen a disszertáción alapszik, megfelelő példákkal, megjegyzésekkel, és észrevételekkel kiegészítve. Továbbá elkészítettem az algoritmus egy Visual Basic nyelven megírt implementációját is, mely az utolsó fejezetben kerül ismertetésre, maga a forráskód pedig megtalálható a mellékelt CD-en. Ez a bemeneti gráf csúcsait beágyazza a síkba, majd ezt kiemelési eljárással beágyazza a térbe. Ennek konvex burka egy olyan poliéder lesz, melynek gráfja a eredeti bemeneti gráf. Az eredmények ábrázolására a MeshLab nyílt forráskódú matematikai programot ajánljuk.

Általánosságban a kiemelés során egy d dimenziós geometriai objektum minden pontjához hozzáveszünk egy új koordinátát. Az így kapott új objektum már a $(d + 1)$ -dimenziós térben van, s a kiemelt objektumnak az alacsonyabb dimenziós térre való ortogonális projekciójával az eredeti objektumot kapjuk meg. Ennek az eljárásnak a speciális esetét fogjuk alkalmazni; mégpedig síkba beágyazott gráfok térbe való kiemelését.

Legyen adott egy síkgráf beágyazása az xy -síkba, mely egyenes élű és nem-keresztező, azaz egyenes élű síkra rajzolás. Definiálunk egy speciális kiemelést, mely a gráf minden csúcsához hozzárendel egy harmadik koordinátát, mégpedig úgy hogy egy adott laphoz tartozó csúcsok a kiemelés után egy síkba kerülnek. A lapok további pontjaihoz rendelt harmadik koordinátát interpolációval kapjuk. Azonban a síkgráf nem minden síkra rajzolása emelhető ki, úgy hogy a kapott objektum poliéder legyen. Erre látha-

tunk példát az 1. ábrán. Az (a) esetben egy triviális kiemelést alkalmazhatunk: a külső pontok esetében 0-nak, a belső pontok esetén pedig 1-nek definiáljuk a 3. koordinátát. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy poliédert kapunk. A (b) esetben ugyanannak a gráfnak egy másik síkra rajzolását láthatjuk. Ebben az esetben nem definiálható olyan kiemelés, mely megfelelő lenne számunkra.



1. ábra. Ugyanazon gráf két síkra rajzolása

Ehhez kapcsolódik egy igen érdekes megfigyelés mely James Clerk Maxwell nevéhez fűződik: ha egy gráf síkra rajzolása eleget tesz az egyensúlyi kritériumnak, akkor kiemelhető [2]. Egy síkra rajzolt gráf esetén egyensúlyi helyzetről akkor beszélhetünk, ha minden élhez adott egy súly, mégpedig úgy, hogy a hozzájuk tartozó irányított éleket (mint vektorokat) felszorozva ezekkel, a kapott vektorok összege minden csúcs esetén nullvektor. Ha létezik ilyen súlyozás, azaz a gráf síkra rajzolása támogatja az egyensúlyt, akkor ez ekvivalens a gráf kiemelhetőségével, sőt ha adottak a súlyok, akkor könnyen definiálható is ilyen kiemelés.

Maxwell bizonyítása nem volt formális, s a kiemeléssel kapcsolatos eredményei feledésbe merültek. A téma újrafelfedezésére az 1980-as évekig kellett várni, mely Walter Whiteley és Henri Crapo nevéhez fűződik [3]. A kiemelés és az ahhoz kapcsolódó eredmények különböző geometriai problémák megoldásában is nagy segítséget nyújtottak (Hopcroft and Khan [4], Richter-Gebert [5]).

A dolgozatban a következőekben vázolt felépítést követjük. Az 1. – bevezető –

fejezetben tisztázzuk a szükséges fogalmakat, és kitérünk néhány a poliéderekkel és gráfjaikkal kapcsolatos eredményre. A 2. fejezetben síkra rajzolt gráfokra definiáljuk az egyensúlyi súlyozást, illetve egyensúlyi súlyozás létezésének szükséges és elegendő feltételét mondjuk ki. Ezen egyensúlyi helyzet jobb megértése végett egy egyszerű példát is bemutatunk. A kiemelés alkalmazásához fontos, hogy a gráfunk úgy legyen síkra rajzolva, hogy az nem keresztező, és támogatja az egyensúlyi súlyozást. A 3. fejezetben mutatunk egy eljárást, mely ilyen beágyazást eredményez. A 4. fejezetben pedig egy egyensúlyban levő gráfra definiálunk egy olyan kiemelést, melynek eredménye egy megfelelő poliéder. Ezt követően – az 5. fejezetben – a beágyazási algoritmus implementációját foglaljuk össze.

1.1. Szükséges fogalmak, definíciók, jelölések

A következőekben a kiemelés speciális esetét használjuk, mely síkra rajzolt gráfokat emel ki $\mathbb{R}^3$ -ba. Ennek megfelelően összefoglaljuk a szükséges fogalmakat, jelöléseket, melyhez Hajnal Péter könyvét vettük alapul [6]. A kiinduló gráfunk $G = (V, E)$, ahol $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ a gráf csúcshalmaza, $E \subseteq (V \times V)$ pedig az élhalmaza. A csúcsok száma legyen n , az élek száma pedig m . Elsősor a gráf síkba történő speciális beágyazását – a síkra rajzolást – és a hozzá tartozó fogalmakat definiáljuk:

1.1. Definíció. Adott $G = (V, E)$ gráf. Legyen $\mathbf{p}: V \rightarrow P$ és $\mathbf{q}: E \rightarrow C$, ahol P a sík pontjainak halmaza, míg C a sík folytonos, önmagukat nem metsző görbék halmaza. Ezt a leképezéspárt a G gráf síkra rajzolásának nevezzük, ha a következők teljesülnek:

- (i) $\mathbf{p}$ kölcsönösen egyértelmű leképezés.
- (ii) bármely $e = (v_i, v_j)$ él esetén a $\mathbf{q}(e)$ görbe a $\mathbf{p}(v_i)$ -t és a $\mathbf{p}(v_j)$ -t köti össze, és nem halad át semelyik $\mathbf{p}(v_k)$ ponton ($k \neq i, j$).
- (iii) tetszőleges e él esetén a $\mathbf{q}(e)$ görbe belső pontjai nincsenek rajta semelyik más élnek megfelelő görbén.

Ha egy G gráfnak létezik síkra rajzolása, akkor síkgráfnak nevezzük.

Ha a p síkra rajzolás esetén bármely e élre $\mathbf{q}(e)$ görbe egyenes, akkor egyenes élű síkra rajzolásról beszélünk.

Egy G gráf adott $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ síkra rajzolása esetén az élek határolta területeket a síkra rajzolás tartományainak nevezzük. A tartományokat és azok halmazát az alábbi módon jelöljük: $F_{G(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \{\dots f_i \dots\}$

Az egyszerűség kedvéért a (v_i, v_j) élt (i, j) -vel, illetve a $\mathbf{p}(v_i)$ csúcsot $\mathbf{p}_i$ -vel jelöljük. Innentől fogva, ha síkra rajzolásról beszélünk, akkor egyenes élű síkra rajzolást értünk alatta. Ezt megtehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hisz ha egy gráf síkra rajzolható, akkor létezik egyenes élű síkra rajzolása is. Ebben az esetben $\mathbf{p}$ egyértelműen meghatározza $\mathbf{q}$ -t, így G síkra rajzolhatósága csak $\mathbf{p}$ -től függ, azaz eljelölhetjük ezt $G(\mathbf{p})$ -vel. A következő definíció $G(\mathbf{p})$ éleinek és tartományainak egy speciális helyzetét írja le:

1.2. Definíció. $G(\mathbf{p})$ G egy síkra rajzolása. $G(\mathbf{p})$ egy $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ irányított éle esetén létezik egyetlen olyan $f_l \in F_{G(\mathbf{p})}$ tartomány, mely attól balra, és egyetlen $f_r \in F_{G(\mathbf{p})}$ tartomány, mely attól jobbra fekszik. Ezt a viszonyt irányított helyzetnek hívjuk, és az alábbi módon jelöljük: $(i, j \mid l, r)$.

Könnyen látható, hogy ha $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet, akkor $(j, i \mid r, l)$ is az. Ezt a technikai fogalmat a későbbiekben gyakran fogjuk használni, illetve értelmezhetővé tesszük bizonyos tulajdonságú absztrakt gráfokra is.

A síkra rajzolással kapcsolatban szót kell ejtenünk annak egyértelműségéről. Ennek vizsgálata igen összetett, ezért itt csak szemléletesen definiáljuk ezt.

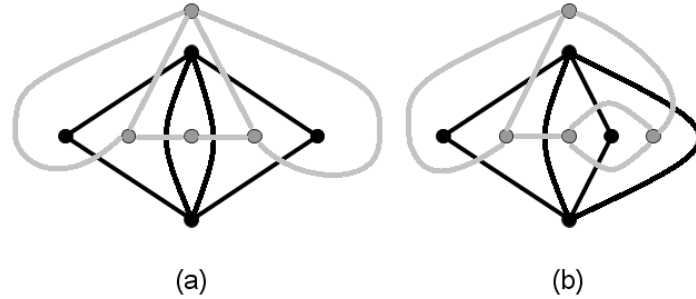
1.3. Definíció. Az alábbi három operációval egymásba vihető síkra rajzolásokat ekvivalensnek tekintjük:

- (i) *A síkra rajzolás bármely deformációja ekvivalens az eredeti síkra rajzolással. (Deformációnak nevezzük egy $\mathbf{d} : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos leképezést, melyre $\mathbf{d}(P, 0) = P$ bármely P -re, és tetszőleges t_0 esetén $P \mapsto \mathbf{d}(P, t_0)$ egy homeomorfizmus.*
- (ii) *Tükrözéssel kapott síkra rajzolások is ekvivalensek az eredetivel.*
- (iii) *Ha egy gráfot síkra rajzolunk, akkor egy sztereografikus projekcióval egy gömbre rajzolást kapunk. Ezt a gömbre rajzolást egy másik sztereografikus projekcióval egy másik síkba rajzolásba transzformáljuk. Ha a projekciókat megfelelően választjuk, akkor elérhetjük, hogy a két síkra rajzolás esetén keletkező nem korlátos tartomány, különböző lesz. Ekkor a két síkra rajzolást ekvivalensnek tekintjük.*

Ekvivalens síkra rajzolások esetén a tartományok száma és az adott számú éllel határolt tartományok száma nem változik. Egy síkra rajzolás esetén az egy csúcsra illeszkedő élek körszerűen rendezve lesznek. Ezt a rendezést – a körüljárás irányának megfordításától eltekintve – nem változtatja meg egy ekvivalens síkra rajzolásra való áttérés. Továbbá ekvivalens síkra rajzolásra való áttérés során a tartományokat ugyanazok az élek fogják határolni. Ilyen értelemben beszélhetünk egy síkra rajzolás kombinatorikus struktúrájáról, mely a tartományok és élek egymáshoz való viszonyát fejezi ki. Ekvivalens gráfok esetén ez a kombinatorikus struktúra megegyezik. Síkra rajzolt gráfok esetén értelmezhetjük a gráf duálisának fogalmát:

1.4. Definíció. *Legyen $G(\mathbf{p})$ egy síkra rajzolása G -nek. G^* gráfot a $G(\mathbf{p})$ duálisának nevezzük, ha G^* csúcsai megfeleltethetők $G(\mathbf{p})$ tartományaival, illetve élei $G(\mathbf{p})$ élivel. Egy G^* -beli e él a neki megfelelő $G(\mathbf{p})$ -beli éllel szomszédos két tartományhoz tartozó két csúcsot köti össze.*

Fontos megjegyeznünk, hogy a duális gráfot egy gráf síkra rajzolása esetén definiáltuk, és a definíció csak erre egyértelmű, az absztrakt gráfra ez már közel sincs így. A duális gráf gyakorlatilag a síkra rajzolás kombinatorikus struktúrájától függ, ami akár különbözhet is két síkra rajzolás esetén. A 2. ábrán láthatunk erre példát; egy síkgráf



2. ábra. Ugyanazon gráf két síkra rajzolása, és ezek duális gráfjai

két beágyazásához tartozó duális gráf nem egyezik meg, hisz a síkra rajzolások kombinatorikus struktúrája különböző; az (b) esetben van ötödfokú csúcs, az (a) esetén viszont nincs.

1.5. Definíció. Egy $G = (V, E)$ gráfot egyszerűnek nevezünk, ha V véges, és nincs hurok, illetve párhuzamos éle.

1.6. Definíció. Egy G gráf összefüggő, ha legalább egy éle van, és bármely két csúcsa közt létezik út.

1.7. Definíció. Egy G gráf 3-összefüggő, ha bármely két csúcsát elhagyva, a kapott gráf összefüggő

Ezzel a következőkben használt legfontosabb definíciókat, fogalmakat és jelöléseket áttekintettük. Hangsúlyozzuk, néhány esetben egyszerűbb jelölési metodikára tértünk át, illetve fogalmak értelmét azok speciális esetére szűkítettük.

1.2. Fontosabb tételek, állítások

Ebben a részben összefoglaljuk a témával kapcsolatos fontosabb tételt, állításokat. Mindezt a témára való szélesebb rálátás miatt foglalkozunk össze itt az elején, illetve némely eredményre a későbbiekben támaszkodunk. Első és talán legfontosabb eredmény Steinitz tétele, mely a poliéderek és gráfjaik közti kapcsolatot írja le:

1.8. Tétel. (Steinitz) *Egy G gráf akkor és csak akkor gráfja egy poliédernek, ha 3-összefüggő, egyszerű és síkgráf.*

A tétel bizonyítását megtalálhatjuk Günter M. Ziegler hivatkozott könyvében [7]. A továbbiakban tehát csak 3-összefüggő egyszerű síkgráfokkal fogunk foglalkozni, és az ilyen gráfokra értelmezzük a kiemelést is. A következőekben leírt algoritmus nem foglalkozik ezen tulajdonságok tesztelésével, ezt az olvasónak kell megtennie. A síkra rajzolhatósággal kapcsolatban azonban megemlítenénk egy nagyon fontos tételt, melynek bizonyítását Hajnal Péter könyvében is megtalálhatjuk [6]:

1.9. Tétel. (Kuratowski) *G akkor és csak akkor nem síkra rajzolható, ha G -nek K_5 vagy $K_{3,3}$ topologikus részgráfja.*

Absztrakt síkgráfnak ekvivalenciától eltekintve sem egyértelmű annak síkra rajzolhatósága, viszont amennyiben 3-összefüggő, már más a helyzet:

1.10. Tétel. (Whitney) *Ha G egy 3-összefüggő egyszerű síkgráf, akkor a gráf síkra rajzolásai ekvivalensek.*

Ennek bizonyítása H. Whitney nevéhez fűződik [8]. Megjegyezzük, hogy ez esetben a duális gráf értelmezhető a G gráfra is (nemcsak annak egy síkra rajzolására), hiszen bármely síkra rajzolása ekvivalens, azaz a síkra rajzolások kombinatorikus struktúrája is megegyezik, tehát a duális minden esetben ugyanaz. Így kombinatorikusan egyértelműen meghatározott a síkra rajzolások esetén azoknak a tartományai is. Ebből pedig adódik a duális gráf kombinatorikus egyértelműsége. Egy másik következménye a tételnek, hogy ekkor az $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet értelmezhető G -re is, nemcsak annak egy síkra rajzolására.

Steinitz és Whitney tételéből következik, hogy egy poliéder gráfja leírja a poliéder kombinatorikus struktúráját.

A G síkra rajzolásával kapcsolatos Euler tétele, illetve annak egy egyszerű következménye:

1.11. Tétel. (Euler) *Ha $\mathbf{p}$ a G síkgráf egy síkra rajzolása, és n a csúcsainak, m az éleinek és f a tartományainak a száma, akkor:*

$$n + f = m + 2$$

1.12. Állítás. (Kuratowski) *Ha G egy 3-összefüggő síkgráf, akkor létezik olyan kör benne, ami legfeljebb 5 hosszú.*

Bizonyítás. Indirekten: tegyük fel, hogy nincs 6-nál kisebb kör. Ekkor, ha $G(\mathbf{p})$ egy síkra rajzolása a gráfnak, akkor minden tartomány legalább 6 oldalú. Legyen n a csúcsok, m az élek, f a tartományok száma $G(\mathbf{p})$ -ben. Így minden tartományhoz legalább 6 él, illetve egy él pontosan két tartományhoz tartozik, azaz az alábbi becslést tehetjük:

$$m \geq 6f/2 = 3f \quad (1)$$

Továbbá mivel G 3-összefüggő, ezért minden él foka legalább 3, hisz különben a szomszéd csúcsokat elhagyva két komponensre esne a gráf. Így az éleket becsülhetjük:

$$m \geq 3n \quad (2)$$

(1)-et beírva Euler tételébe kapjuk:

$$\begin{aligned} n + f &\geq 3f + 2 \\ n &\geq 2f + 2 \end{aligned} \quad (3)$$

Illetve, ha (2)-et használjuk fel Euler tételében:

$$\begin{aligned} n + f &\geq 3n + 2 \\ f &\geq 2n + 2 \\ 2f &\geq 4n + 4 \end{aligned} \quad (4)$$

Innen (3)-at és (4)-et összevetve kapjuk, hogy:

$$n \geq 2f + 2 \geq 4n + 4 + 2$$

Mivel n pozitív, ezért ez ellentmondás, tehát az eredeti feltevésünk hibás. $\square$

Ezzel a bevezető fejezet végére értünk. Megállapítottuk, hogy csak 3-összefüggő egyszerű síkgráfokkal kell csupán foglalkoznunk, hisz csak ezekhez létezik megfelelő poliéder. Továbbá ezen gráfok síkra rajzolhatósága ekvivalenciától eltekintve egyértelmű, ez könnyelművé teszi ezeknek a beágyazását. Térjünk hát rá a következő fejezetre, melyben síkra rajzolt gráfok egyensúlyi súlyozását vizsgáljuk.

2. Egyensúlyi súlyozás

Ebben a fejezetben előkészítjük a gráf megfelelő – kiemelhető – síkra rajzolását. Itt André Schulz dolgozatán kívül [1], a jobb megértés végett H. Crapo and W. Whiteley ebben a témában megírt cikkére is komolyabban támaszkodtunk [3].

2.1. Súlyozás, egyensúlyi súlyozás

Talán a dolgozat legfontosabb fogalma a gráf súlyozása, illetve egyensúlyi súlyozása, ezeket a gráf egy adott síkra rajzolása esetén definiáljuk:

2.1. Definíció. Legyen $G(\mathbf{p})$ a G gráfnak egy síkra rajzolása. Az $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést G egy súlyozásának mondjuk. Az $e = (i, j)$ élhez tartozó $\omega(e)$ súlyt ω_{ij} -vel jelöljük. Ha legalább egy ω_{ij} nemnulla, akkor nemtriviális súlyozásról beszélünk.

A jelölésből adódik, hogy $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Annyi kiegészítést teszünk még, hogy amennyiben (i, j) nem eleme E -nek, ω_{ij} -t ebben az esetben is definiáljuk; mégpedig 0-nak.

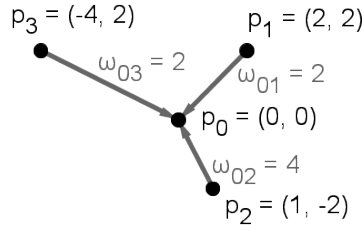
2.2. Definíció. Legyen $\mathbf{p}$ a G gráfnak egy síkra rajzolása, és ω G egy súlyozása. Ekkor azt mondjuk, hogy:

(i) A $\mathbf{p}_i$ csúcs egyensúlyban van, ha $\sum_j \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0$ (3. ábra)

(ii) A $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolás egyensúlyban van, ha minden csúcsa egyensúlyban van.

Ha egy $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolás esetén létezik olyan nemtriviális súlyozás, melyre $G(\mathbf{p})$ egyensúlyban van, akkor azt mondjuk, hogy $G(\mathbf{p})$ támogatja az egyensúlyt.

Az egyensúlyi kritérium felfogható egyfajta fizikai megközelítéssel is. Tételezzük fel, hogy minden pontra a hozzátartozó (i, j) élek mentén ezek az erők hatnak: $\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$. Ekkor az egyensúlyi kritérium azt jelenti, hogy az adott pontra ezek az erők kioltják egymást, azaz ha $G(\mathbf{p})$ egyensúlyban van, akkor a síkra rajzolt gráfunk stabil állapotban van; ha a csúcsokra a fenti erők hatnának, azok akkor sem mozdulnának el.



3. ábra. $\mathbf{p}_0$ egyensúlyban van

Fontos megjegyeznünk, hogy nem az absztrakt gráf támogatja az egyensúlyt, hanem mindez egy adott beágyazására vonatkozik csupán. Az előző fejezetben található 1. ábra erre világít rá. Valójában az (a) beágyazás támogatja az egyensúlyt a (b) pedig nem. A következő részben arra keresünk választ, hogy egy beágyazásnak milyen feltételeket kell teljesítenie ahhoz, hogy az támogassa az egyensúlyt.

2.2. Reciprok diagram

Ha $G(\mathbf{p})$ támogatja az egyensúlyt, és ω az ehhez tartozó súlyozás, akkor az egyensúlyi kritériumnak van egy geometriai jelentése is. Amennyiben az adott $\mathbf{p}_i$ csúcs körül ciklusba rendezzük az $\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ vektorokat, akkor egy zárt poligont kapunk, hiszen ha a ciklus kiinduló pontja és végpontja eltérne, akkor nem lehetne ezen vektorok összege nulla.

J. C. Maxwell nevéhez fűződik az az eredmény, miszerint ezeket a zárt poligonokat megfelelően egymáshoz illesztve $G(\mathbf{p})$ egy duális gráfjának síkra rajzolását kapjuk [2], itt azonban forrásként elsősorban a H. Crapo és W. Whiteley cikkére támaszkodunk [3]. Maxwell tételéhez először szükségünk van a reciprok diagram fogalmára:

2.3. Definíció. Legyen G egy absztrakt gráf, $G(\mathbf{p})$ annak egy síkra rajzolása, továbbá G^* a duális gráfja. A $G^*(\mathbf{a})$ síkra rajzolást $G(\mathbf{p})$ reciprok diagramjának nevezzük, ha G minden $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzetére az alábbi két vektor; $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ és $\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r$, merőlegesek.

A korábbiakban láttuk, hogy 3-összefüggő síkgráfok esetén a duális gráf ekvivalenciától eltekintve egyértelmű, így a definíció értelmezhető. Természetesen G^* -nak több síkra rajzolása létezik, sőt több olyan síkra rajzolása is van, mely rendelkezik a fenti tulajdonsággal, bár nyilván ezek ekvivalensek. A következőekben egy $\mathbf{p} = (x, y)$ vektor óramutató járásával megegyező 90° -kal való elforgatását $\mathbf{p}^\perp = (-y, x)$ -tal jelöljük.

2.4. Tétel. *Egy G gráf $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolása akkor és csak akkor támogatja az egyensúlyt, ha létezik reciprok diagramja.*

Bizonyítás. Szükségesség. Tegyük fel, hogy létezik reciprok diagramja $G(\mathbf{p})$ -nek, s ez $G^*(\mathbf{a})$. G minden $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzetére definiálhatjuk ω_{ij} -t az alábbiak alapján: $\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = \mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r$. Ez a definíció ω_{ji} -re is ugyanazt az értéket adja, s a kapott ω_{ij} értékek nem nullák, hisz a síkra rajzolás kölcsönösen egyértelmű.

Az egyensúlyi feltétel ekkor teljesül minden $\mathbf{p}_i$ csúcsra, hiszen a reciprok diagramban a $\mathbf{p}_i$ ponthoz egy tartomány tartozik, melynek élei az $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzethez tartozó $(\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r)$ élek. Mivel $(\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r)$ ennek a sokszögnek az élvektorai, ezért ezeknek az összege nullát ad, azaz az ezekből kapott $\sum_{\mathbf{p}_j} \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0$ szintén nullát ad.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy $G(\mathbf{p})$ -n adott egy egyensúlyi súlyozás. Legyen $f_0 \in F_G$ a síkra rajzolás egy tartománya és $\mathbf{a}_0$ annak egy pontja. Legyen $f_l \in F_G$ egy másik tartomány. Ekkor létezik a tartományoknak és éleknek is egy-egy olyan $\{f_i\}$, illetve $\{e_i\}$ sorozata, melyekre fennáll, hogy a tartománysorozat első tagja f_0 , utolsó tagja pedig f_l , továbbá $e_i = (n, m)$ élsorozatbeli él esetén $(n, m \mid i, i + 1)$ irányított helyzet. Ez a két sorozat gyakorlatilag egy útnak tekinthető a duális gráfban. Ebben az esetben definiáljuk $\mathbf{a}_l$ -t:

$$\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_0 + \sum_i \omega_e \mathbf{v}_i^\perp \quad (5)$$

Ahol $\mathbf{v}_i$ az előzőekben meghatározott élsorozat adott $e_i = (n, m)$ tagjához tartozó $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m$ vektor. Ez a definíció konzisztens, ugyanazt az $\mathbf{a}_l$ csúcsot eredményezi G^* két különböző ilyen útja esetén. Ezt teljes indukcióval fogjuk belátni. $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolás esetén ez a két G^* -beli út kombinatorikusan „körülfog” $G(\mathbf{p})$ -ben lévő csúcsokat.

Igazából szó szoros értelmében nem feltétlen körülfogja a csúcsokat, hanem két részre osztja azokat, gyakorlatilag az egyik ilyen részt tekintjük. Amennyiben a két út különböző, akkor lesz olyan csúcs, melyet körülfog, vagyis mindkét csoportban lesznek $G(\mathbf{p})$ -beli csúcsok. Ezen, körülfogott pontok száma szerinti indukcióval bizonyítjuk a definíció egyértelműségét. Ha G^* -beli csúcsról, vagy útról beszélünk, akkor a megfelelő $G(\mathbf{p})$ -beli tartományokat, illetve azok sorozatát értjük alatta.

(I) Igaz-e, ha egy ilyen csúcs ($\mathbf{p}_0$) van közre fogva?

Ekkor a két út $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolás $\mathbf{p}_0$ csúcsához tartozó tartományokat járja végig (4. ábra). Az óramutató járásával megegyező irányú út esetén a $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0)$ vektorokat kell ω_{0i} -val felszorozni és összegezni, míg ellentétes esetben a $(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)$ vektorra kell ugyanezt elvégezni ($\omega_{0i} = \omega_{i0}$). Legyen A a pozitív körüljárás esetén a $\mathbf{p}_0$ -val szomszédos csúcsok indexhalmaza, B ugyanez, csak az ellenétes esetben, C pedig e kettőnek uniója, azaz az összes szomszédos csúcs indexhalmaza. Igazolnunk kell tehát az alábbi egyenlőséget:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} \omega_{0j}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0)^\perp &= \sum_{i \in B} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)^\perp \\ 0 &= \sum_{i \in B} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)^\perp - \sum_{i \in A} \omega_{0j}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0)^\perp \\ 0 &= \sum_{i \in B} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)^\perp + \sum_{i \in A} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)^\perp \\ 0 &= \sum_{i \in C} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)^\perp \end{aligned}$$

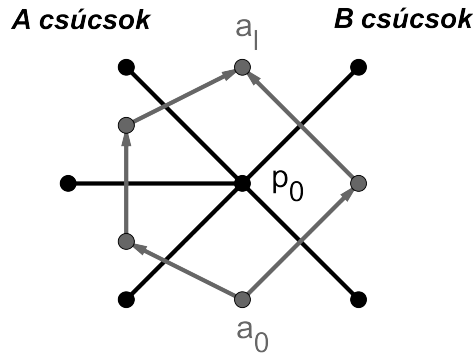
Ennek igazolásához tekintsük $\mathbf{p}_0$ -t. Mivel $\mathbf{p}_0$ egyensúlyban van, ezért:

$$\sum_{i \in C} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i) = 0$$

Amit 90° -kal elforgatva kapjuk:

$$\sum_{i \in C} \omega_{0j}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_i)^\perp = 0$$

Ami éppen a bizonyítandó egyenlőség. Tehát azt kaptuk, hogy mindkét út esetében ugyanazt az értéket adtuk $\mathbf{p}_i$ -nek.



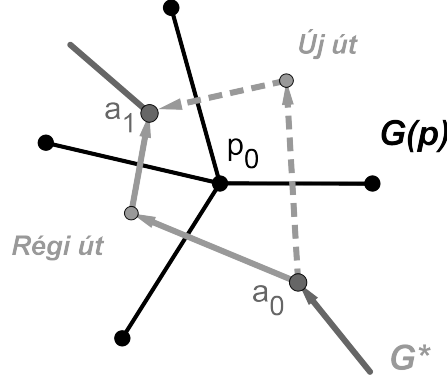
4. ábra. A ciklus cs p_0 -át fogja körül

(II) Tegyük fel, hogy igaz n -re. Igaz-e $(n + 1)$ -re?

Mivel a két út nem egyezik meg, ezért lesz $G(\mathbf{p})$ -ben olyan $\mathbf{p}_0$ csúcsunk, melyet a két út körülfog, továbbá szomszédos valamelyik úthoz tartozó tartománnyal (5. ábra). Ezután legyen $\mathbf{a}_0$ az a $\mathbf{p}_0$ -val szomszédos tartomány melyet az út először érint. $\mathbf{a}_1$ legyen az a tartomány, amelyiken keresztül ez az út elhagyja a $\mathbf{p}_0$ -val szomszédos $G(\mathbf{p})$ -beli tartományokat. Amennyiben nem hagyja el, akkor $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_l$. Ha az út visszatérne $\mathbf{p}_0$ -hoz, akkor kell keresnünk egy másik csúcsot, melynél ez nem történik meg. Legyen $\mathbf{a}_1$ amikor először elhagyja, és $\mathbf{a}_2$ amikor először visszatér $\mathbf{p}_0$ -hoz az út. Ekkor $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ között biztos van csúcs (ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ élt bevéve tekintjük az utat). Most ezek közül válasszunk egy megfelelő új $\mathbf{p}_0$ -át. Mivel véges pont van, és az előző $\mathbf{p}_0$ pont már nincs benne ebben, ezért szigorúan csökken a közrefogott csúcsok száma. Amennyiben ezek között van olyan csúcs, amit el is hagy, és vissza is tér hozzá az út, új, kevesebb csúcsot tartalmazó ciklus tekinthető. Tehát kell lennie olyan csúcsnak, melyet egyszer hagy el. Legyen ez $\mathbf{p}_0$, és most indokolt a 5. ábra, továbbá a következő gondolatmenet.

Ekkor $\mathbf{a}_0$ és $\mathbf{a}_1$ között vegyük a $\mathbf{p}_0$ -t megkerülő másik utat. Az így kapott módosított út alapján, a definíció ugyanazt az értéket adja $\mathbf{a}_1$ -nek az 1. pont alapján, azaz a $\mathbf{a}_l$ pontnak is ugyanaz lesz az értéke. Mivel a másik úttal, már egyel kevesebb csúcsot fog körül ez a módosított út, ezért az indukciós feltevés szerint, a

két definíció ugyanazt az értéket fogja adni $\mathbf{a}_l$ -nek.



5. ábra. Az új úttal a ciklus egy csúccsal kevesebbet tartalmaz

Tehát a definíció egyértelmű. A kapott síkra rajzolás triviálisan a duális gráf egy síkra rajzolása lesz, így már csak a merőlegességi kritérium ellenőrzése van vissza. Legyen G -ben $(i, j \mid l, r)$ egy irányított helyzet. Ekkor a 3-összefüggőség miatt $\mathbf{a}_l$ -t tudjuk úgy definiálni, hogy a definiáláshoz használt út utolsó előtti tartománya f_l -legyen. Ekkor (5) alapján:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_l &= \mathbf{a}_r - \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp \\ \mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r &= -\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp\end{aligned}$$

Ami valóban merőleges $(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ -re. $\square$

2.5. Megjegyzés. A súlyozás kifejezhető a $G(\mathbf{p})$ és $G^*(\mathbf{a})$ segítségével.

Tekintsük $G(\mathbf{p})$ -t és annak egy reciprok diagramját, $G^*(\mathbf{a})$, illetve legyen $(i, j \mid l, r)$ egy irányított helyzet G -ben. A megfelelő csúcsok legyenek $G(\mathbf{p})$ -ben, illetve $G^*(\mathbf{a})$ -ben: $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j)$ és $\mathbf{a}_l = (x_l, y_l)$. Ekkor (5) miatt $\mathbf{a}_r = (x_l + \omega_{ij}(y_i - y_j), y_l - \omega_{ij}(x_i - x_j))$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$\omega_{ij} = (y_l - y_k)/(x_i - x_j) = (x_k - x_l)/(y_i - y_j)$$

Amennyiben $x_i - x_j$ vagy $y_i - y_j$ egyike nulla, a másik alkalmas lesz a ω_{ij} kifejezésére, hisz egyszerre mindkettő nem lehet nulla.

2.6. Megjegyzés. *A reciprok diagram támogatja az egyensúlyt.*

$G(\mathbf{p})$ minden reciprok diagramjának $G(\mathbf{p})$ reciprok diagramja, és minden reciprok diagram támogatja az egyensúlyt; az alábbi ω' súlyozás egyensúlyi:

$$\omega'_{lr} = 1/\omega_{ij}$$

Ahol $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet G -ben. Mindez az előző tétel bizonyításából következik. (5) alapján egy adott $\mathbf{a}_r$ -ra az egyensúlyi kritérium:

$$\sum_{(r,l)} \omega'_{rl}(\mathbf{a}_r - \mathbf{a}_l) = \sum_{(r,l)} \omega'_{rl}\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp = \sum_{(r,l)} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp = 0$$

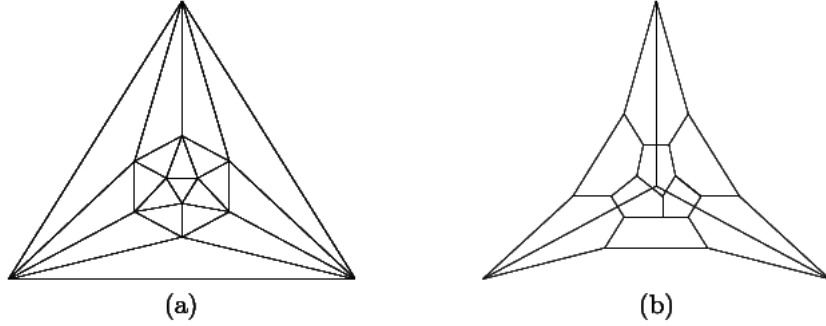
Hiszen az $\mathbf{a}_r$ csúcshoz tartozó $G^*(\mathbf{a})$ -beli (l, r) irányított élekhez, (i, j) $G(\mathbf{p})$ -beli irányított élek tartoznak, amik egy zárt kört alkotnak G -ben, mivel megfeleltethetők az $\mathbf{a}_r$ -t megkerülő tartományokkal.

2.7. Megjegyzés. *A reciprok diagram nem feltétlen síkrara rajzolás.*

Egy $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolás esetén a 2.4. tétel bizonyításában definiált reciprok diagram nem feltétlenül lesz síkra rajzolás, azaz előfordulhatnak keresztező élek. Sőt, egy konvex burkú síkra rajzolás könnyen eredményezhet, nem konvex reciprok diagramot. Mindezekre látunk példát a 6. ábrán, az (a) egy konvex síkra rajzolás, a reciprok diagramja (b) viszont már nem konvex, és keresztező.

2.8. Megjegyzés. *Nem létezik nemnegatív nemtriviális súlyozás.*

Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e $G(\mathbf{p})$ -nek olyan nemtriviális súlyozása, ahol a súlyok nemnegatívak. Ehhez tekintsük a $G(\mathbf{p})$ csúcshalmazát, s annak konvex burkát. A burok csúcsaiba futó élekhez tartozó súlyoknak mindnek nullának kell lennie ahhoz, hogy ezek a csúcsok egyensúlyban legyenek. Ezt könnyen láthatjuk, ha egy adott ilyen



6. ábra. Egy gráf síkra rajzolása, és a hozzá tartozó reciprok diagram

ponthoz húzunk egy támasz egyenest. Ekkor szigorúan az egyenes egyik oldalára kerülnek a belé futó élek. Ha ezek egyike sem negatív, és lenne köztük nem nulla, a megfelelő erők összege nem lenne nulla. Tehát, ha nincs negatív súly, és mégis egyensúlyban vannak, akkor ezen élek súlya mind nulla. A nulla súlyú élek irrelevánsak a többi csúcs egyensúlyának szempontjából, ezért a hozzájuk tartozó csúcsokkal együtt elhagyhatjuk őket. A maradék csúcsokra hasonlóan vehetjük a konvex burkot, és folytathatjuk a fenti vizsgálatot. A csúcsok száma szigorúan csökken, tehát az összes élre hasonló eredményt kapunk. Azaz ha a súlyozás nemtriviális, és egyensúlyi, akkor kell lennie negatív súlynak is.

2.3. Egyensúlyi súlyozás K_4 -en

A négycsúcsú teljes gráfnak szép tulajdonsága, hogy bármely beágyazása támogatja az egyensúlyt. A következő részben K_4 tetszőleges beágyazásához definiálunk egy ω súlyozást, mely egyensúlyi lesz. Jelölje $[i, j, k]$ a $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k$ pontok által kifeszített háromszög előjeles területét. Ha a három pont óramutató járásával megegyező sorrendben van a háromszögben, akkor negatív, egyébként pozitív előjelet kap $[i, j, k]$. Determináns segítségével $[i, j, k]$ kiszámolhatjuk az alábbi módon:

$$1/2 \begin{vmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.9. Állítás. Legyen $K_4(\mathbf{p})$ egy síkra rajzolása K_4 -nek. Ekkor minden $e = (i, j)$ él esetén az alábbi módon definiáljuk a súlyokat:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{[i, j, k][i, j, l]}$$

Ahol $\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l$ a másik két csúcs. Ez a súlyozás egyensúlyi lesz.

Bizonyítás. Elegendő csak $\mathbf{p}_1$ -re megmutatni, hogy egyensúlyban van, mivel a bizonyítás szimmetria miatt hasonlóan működik a többi pontra is. Az egyensúlyi kritérium $\mathbf{p}_1$ -re:

$$\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{[1, 2, 3][1, 2, 4]} + \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3}{[1, 3, 2][1, 3, 4]} + \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4}{[1, 4, 2][1, 4, 3]} = 0$$

Ezt átszorozva $[1, 2, 3][1, 2, 4][1, 3, 4]$ -gyel ezek szimmetriája miatt kapjuk:

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)[1, 2, 3] + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)[1, 2, 3] + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4)[1, 2, 3] = 0 \quad (6)$$

Belátható, hogy $[1, 3, 4] - [1, 2, 4] + [1, 2, 3] = [2, 3, 4]$, hisz az alábbiakban az első kettő összege megegyezik az utolsó kettő összegével:

$$2[1, 3, 4] = x_1y_3 + x_3x_4 + x_4y_1 - x_1x_4 - x_3y_1 - x_4y_3$$

$$2[1, 2, 3] = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2$$

$$2[1, 2, 4] = x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1 - x_1y_4 - x_2y_1 - x_4y_2$$

$$2[2, 3, 4] = x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2 - x_2y_4 - x_3y_2 - x_4y_3$$

Ezt fölhasználva, és (6)-be behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\mathbf{p}_1[2, 3, 4] - \mathbf{p}_2[1, 3, 4] + \mathbf{p}_3[1, 2, 4] - \mathbf{p}_4[1, 2, 3] = 0$$

Ez két feltételt ad $K_4(\mathbf{p})$ csúcsaira; egyet az x , és egyet az y koordinátákra. Ez a két feltétel az alábbi két determináns kifejtése az első sor alapján:

$$1/2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 1/2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Mivel mindkét esetben két sor megegyezik, ezért ez a két determináns valóban nulla lesz, amivel be is láttuk az állítást. $\square$

Ezzel a fejezet végére értünk. A fejezet során definiáltuk az egyensúlyi súlyozást, és a reciprokl diagramot, e két fogalmat pedig Maxwell tételével kapcsoltuk össze. Ennek a kiemelésnél fontos szerepe lesz, mivel a kiemelést a reciprokl diagram segítségével adjuk meg. Természetesen nem lesz mindig olyan szerencsénk, mint K_4 esetében, hogy bármely síkra rajzoláshoz létezik egyensúlyi súlyozás (lásd az első fejezetben az 1. ábra), így a következő fejezetben egy gráf egyensúlyi beágyazásával fogunk foglalkozni.

3. Egyensúlyi beágyazás $\mathbb{R}^2$ -be

Ebben a fejezetben a G gráf egy olyan, speciális síkra rajzolását, illetve azon értelmezett súlyozást adunk meg, mely egyensúlyban lesz. A gráf csúcsait elhelyezkedésük alapján két részre bontjuk. Az első csoport lesz a külső csúcsok, illetve köztük futó élek halmaza, melyek egy kört alkotnak a gráfban, és a síkra rajzolt gráf konvex burkát adják. Ezt külső poligonnak is nevezzük. A másik csoport majd a belső pontok lesznek. Az éleket a csúcsok egyenes szakaszokkal való összekötésével kapjuk. A síkra rajzolást ennek megfelelően két lépésben tesszük meg.

Az első lépésben definiáljuk a belső élek súlyozását, majd a belső csúcsok koordinátáit, mindezt a külső csúcsok függvényében. A kapott beágyazás egy síkra rajzolás lesz és egyensúlyban lesznek a csúcsai. Mindehhez W. T. Tutte nevéhez fűződő beágyazást használjuk [9].

Ezután a külső élek súlyait határozzuk meg, illetve a külső pontokat ágyazzuk be a síkba, a belső pontok függvényében. Ezek alapján úgy tűnhet, hogy egymással definiáltuk a két csoportot, de a valóság az, hogy a külső pontok beágyazása valójában csak a gráf kombinatorikai struktúrájától fog függni. A külső pontok beágyazása igen sokféleképpen történhet meg, a könnyebb implementálhatóság kedvéért itt három esetet különítettünk el a külső csúcsok száma alapján. Mint tudjuk 3-összefüggő gráf esetén lesz 3, 4 vagy 5 hosszú kör, s ezeket vesszük külső poligonnak. Ezt az esetvizsgálatot A. Schulz dolgozata alapján végezzük el [1].

3.1. Belső pontok beágyazása

Pozitív súlyok esetén a belső pontok beágyazásának a síkba van egy nagyon szép fizikai jelentése. Mint már említettük, ezeket a csúcsokat a külső csúcsok függvényében ágyazzuk be. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a külső csúcsokat rögzítjük. Ekkor az élekre tekintünk úgy, mintha gumiból lennének. Ezek a csúcsokban vannak összekötve, továbbá (i, j) él esetén $\omega_{ij}|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|$ erő ébred az élen, mely a két végpontot közelítené (negatív súly esetén taszítaná). A fizikai szemléletből világosan következik, hogy rögz-

zített külső pontok esetén a rendszernek lesz egy stabil állapota, azaz van egyensúlyi beágyazása. Természetesen ez nem feltétlen síkra rajzolás, hisz lehet keresztező is. Tutte tételének bizonyítása alapján megadunk egy olyan konstrukciót, mely egyensúlyi síkra rajzolást eredményez.

Ehhez teszünk némi előkészítést. Jelöljük el a G csúcsait $V = \{1, \dots, n\}$ -nel, továbbá legyen ennek egy részhalmaza $B = \{1, \dots, k\}$, mely G -ben egy kört alkotnak. Ez lesz majd a külső poligon. A belső pontok halmaza ezek után $I = \{k+1, \dots, n\}$. A belső élek legyenek azok az élek, melyeknek legalább egyik végpontja belső csúcs, a többi élt külsőnek nevezzük.

3.1. Tétel. *Legyen G egy 3-összefüggő egyszerű síkgráf, továbbá legyen $\omega: E' \rightarrow \mathbb{R}^2$ a belső éleken értelmezett pozitív súlyozás. Ekkor:*

- (i) *Létezik a belső éleknek pontosan egy beágyazása, melyre azok egyensúlyban lesznek.*
- (ii) *A G tartományai ennél a beágyazásnál nem átfedő konvex poligonok lesznek*

Valójában Tutte ezt a tételt arra a speciális esetre mondta ki, és bizonyította, amikor a súlyok mindegyike egyenlő eggyel. Azonban Tutte bizonyítása gyakorlatilag egy az egyben átvihető pozitív súlyozás esetére is. A tétel ezen általános formájának bizonyítását J. Richter-Gebert cikkében találhatjuk meg [5]. A bizonyítás azonban igen hosszadalmas, főleg annak igazolása, hogy konvex tartományú síkra rajzolást eredményez, így itt csak az egzisztenciát és unicitást bizonyítjuk.

Bizonyítás. Egzisztencia és unicitás. Legyenek a külső pontok koordinátái $\mathbf{p}_v = (x_v, y_v)$; $i \in \{1, \dots, k\}$ adottak. Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges belső pontra létezik annak egyetlen megfelelő $\mathbf{p}_v = (x_v, y_v)$ helyzete, $v \in \{k+1, \dots, n\}$. Az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{p}_1 = (0, 0)$. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_n) &= 1/2 \sum_{(v,w) \in E'} \omega_{ij}((x_v - x_w)^2 + (y_v - y_w)^2) \\ &= 1/2 \sum_{(v,w) \in E'} \omega_{vw} \|\mathbf{p}_v - \mathbf{p}_w\|^2 \end{aligned}$$

F egy kvadratikus függvény, mely sehol sem negatív.

Legyen $z = (x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_n)$ egyik nagy abszolút értékű koordinátája x_i . Azaz ennek a pontnak a nagy a távolsága $\mathbf{p}_1$ -től. Mivel G összefüggő, létezik út $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_1$ között és legalább egy (v, w) él, aminek $\|\mathbf{p}_v - \mathbf{p}_w\|$ élhossza nagy. Mivel a négyzetes távolságok pozitív súlyokkal vannak megszorozva, ezért $F(z)$ is nagy. Így megfelelően nagy $\alpha > 0, |z| > \alpha$ esetén $F(z) > F(0)$. F pozitív definit, ezért létezik egyedi minimuma $\{z \mid |z| < \alpha\}$ -án. A kritikus pont feltételei:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{(i,w) \in E'} \omega_{vw}(x_i - x_w) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{(i,w) \in E'} \omega_{vw}(y_i - y_w) = 0$$

minden $i \in \{k+1, \dots, n\}$ esetén, hiszen csak azok a tagok nemnullák, amelyekben szerepel x_i , illetve y_i . Minden más esetben konstans deriválunk. A megmaradt összeg pedig éppen az egyensúlyi kritérium a $\mathbf{p}_i$ belső pontra, ami szintén 0.

Tehát Tutte tétele alapján elegendő egy olyan megoldást találni, ami egyensúlyban van. A fenti jelöléseket megtartjuk; $V = \{1, \dots, n\}$ G csúcsainak halmaza, a határpontokat $B = \{1, \dots, k\}$ -vel, a belső pontokat pedig $I = \{k+1, \dots, n\}$ -nel jelöljük. Legyen A a szomszédsági mátrixa G -nek a külső élek nélkül, és D a diagonális sorösszeg mátrixa A -nak. Feloszthatjuk blokkokra az A és D mátrixokat a külső és belső csúcsok alapján, és elindexelhetjük ezeket I -vel, illetve B -vel. A $D_{II} - A_{II}$ mátrixot G redukált Laplace mátrixának nevezzük, és L -lel jelöljük. A határpontok rögzítettek, ezeknek a koordinátáiból képezzük az alábbi vektorokat: $\mathbf{x}_B = (x_1, \dots, x_k)^T$ és $\mathbf{y}_B = (y_1, \dots, y_k)^T$

Legyen a belső súlyok mindegyike 1. Így $\mathbf{x}_B$ és $\mathbf{y}_B$ segítségével meghatározzuk a belső pontok, $\mathbf{x}_I = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$ és $\mathbf{y}_I = (y_{k+1}, \dots, y_n)^T$ koordinátáit, úgy hogy azok egyensúlyban legyenek:

$$\mathbf{x}_I = L^{-1} A_{IB} \mathbf{x}_B \tag{7}$$

$$\mathbf{y}_I = L^{-1} A_{IB} \mathbf{y}_B$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez esetben a belső pontok egyensúlyban lesznek. Mát-
rixos formában felírhatjuk a belső pontokra az egyensúlyi kritériumokat. $D_{II}\mathbf{x}_I$ i .
sora annyiszor tartalmazza x_i -t, ahány szomszédja van. $A_{II}\mathbf{x}_I$ i . sorában az x_i -vel
szomszédos belső pontok, míg $A_{IB}\mathbf{x}_B$ i . sorában az x_i -vel szomszédos külső pontok
 x -koordinátáinak összege szerepel. Így az egyensúlyi kritériumok:

$$D_{II}\mathbf{x}_I - (A_{II}\mathbf{x}_I + A_{IB}\mathbf{x}_B) = (D_{II} - A_{II})\mathbf{x}_I - A_{IB}\mathbf{x}_B = L\mathbf{x}_I - A_{IB}\mathbf{x}_B$$

Ekkor (7)-et beírva $\mathbf{x}_I$ helyébe adódik:

$$LL^{-1}A_{IB}\mathbf{x}_B - A_{IB}\mathbf{x}_B = 0$$

Tutte tétele miatt, ekkor ez a beágyazás síkra rajzolás lesz. A következő részben
rátérünk a külső pontok beágyazására.

3.2. A külső pontok beágyazása

A külső pontok beágyazása, és a külső élekhez tartozó súlyok meghatározása kompli-
káltabb helyzetet teremt, hiszen teljesülnie kell, hogy egyensúlyban legyenek, és konvex
poligont alkossanak. Mindezt ráadásul úgy, hogy a belső pontok egy része befolyással
van a külső pontok egyensúlyára, de ezek helyzete a külső pontoktól függ. Minden-
esetre, ha a külső csúcsok konvexitását biztosítjuk, akkor Tutte módszerét használva
a belső pontok beágyazására, akkor síkra rajzolást kapunk, így innentől csak az egyen-
súlyi súlyozásra és konvexitásra kell koncentrálnunk.

A külső pontok beágyazását három főbb különböző eset mentén végezzük el; mégpe-
dig aszerint, hogy a G gráfnak van-e 3, 4, vagy 5 hosszú köre. Az 1.12. tétel miatt egy
megfelelő, 3-összefüggő síkgráf legalább az egyik esetnek megfelel. Az így kapott kör
lesz a gráf külső poligonja. Még mielőtt definiálnánk a beágyazást, némi előkészítést
kell tennünk a külső és belső pontok viszonyának tisztázása végett.

A külső pontokra definiáljuk az alábbi vektorokat $\mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$, ahol F_i az
 i külső pontra ható belső élek mentén keletkező, az i egyensúlyi kritériuma alapján

számolt súlyozott vektorok eredője:

$$F_i = \sum_{j \in I} \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \quad (8)$$

Az $\mathbf{F}$ vektorai a külső pontok helyzetétől és G kombinatorikai struktúrájától függenek. Ennek a függésnek a kifejezésében segít az alábbi lemma.

3.2. Lemma. *Léteznek olyan $\hat{\omega}_{ij} = \hat{\omega}_{ji}$ nemnegatív súlyok, minden $i, j \in B$ esetén, melyek függetlenek a $\mathbf{p}$ síkra rajzolástól, és minden $i \in B$ esetére teljesül:*

$$F_i = \sum_{j \in B: i \neq j} \hat{\omega}_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \quad (9)$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{F}_x = \{F_1, \dots, F_2\}$, továbbá legyenek A és D a korábban definiált mátrixok. (8) átalakításából nyerjük, hogy $\mathbf{F}_x = D_{BB}\mathbf{x}_B - A_{BI}\mathbf{x}_I$. Ezt (7) segítségével és $\mathbf{x}_I$ helyettesítésével kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= D_{BB}\mathbf{x}_B - A_{BI}L^{-1}A_{IB}\mathbf{x}_B \\ &= (D_{BB} - A_{BI}(D_{II} - A_{II})^{-1}A_{IB})\mathbf{x}_B \\ &= \hat{A}\mathbf{x}_B \end{aligned} \quad (10)$$

Az y -koordinátákra hasonló eredményre jutunk $\hat{A}$ -ot tekintve. Definiáljuk $\hat{\omega}_{ij}$ -t $(-\hat{A})_{ij}$ -vel. Mivel $A_{BI} = (A_{IB})^T$, ezért $\hat{A}$ is szimmetrikus, azaz $\hat{\omega}_{ij} = \hat{\omega}_{ji}$. Jelöljük $\mathbf{1}$ -gyel azt a vektort, amelyiknek minden koordinátája 1. A bebizonyítandó egyenlőség (8) jobb oldalából kiindulva, $i \in B$ esetén az x -koordinátákra kapjuk:

$$F_i = \sum_{j \in B: i \neq j} \hat{\omega}_{ij}(x_i - x_j) + \hat{\omega}_{ii}x_i - \hat{\omega}_{ii}x_i = x_i \sum_{j \in B} \hat{\omega}_{ij} + \sum_{j \in B} \hat{\omega}_{ij}x_j$$

Mivel minden $i \in B$ esetén a fentieket kapjuk, átírhatjuk mindezt mátrixos formába (10) segítségével (az $\mathbf{1}$ -gyel való szorzás a sorösszeg vektort adja):

$$F_i = -\mathbf{x}_B\hat{A}\mathbf{1} + \hat{A}\mathbf{x}_B = -\mathbf{x}_B\hat{A}\mathbf{1} + \mathbf{F}_x$$

Ahhoz, hogy (9)-et igazoljuk, meg kell mutatnunk, hogy $\hat{A}$ minden sorösszege 0. Ellenőrizhető, hogy:

$$\begin{aligned} A_{II}\mathbf{1} + A_{IB}\mathbf{1} &= D_{II}\mathbf{1} \\ A_{IB}\mathbf{1} &= D_{II}\mathbf{1} - A_{II}\mathbf{1} \\ (D_{II} - A_{II})^{-1}A_{IB}\mathbf{1} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Az $\hat{A}$ definíciójából kapjuk:

$$\hat{A}\mathbf{1} = D_{BB}\mathbf{1} - A_{BI}(D_{II} - A_{II})^{-1}A_{IB}\mathbf{1}$$

Amibe behelyettesítve az előző eredményt: $\hat{A}\mathbf{1} = D_{BB}\mathbf{1} - A_{IB}\mathbf{1} = (0, \dots, 0)^T$ adódik. $\square$

Fontos hangsúlyoznunk, hogy $\hat{\omega}$ értékei nem függnak $\mathbf{x}_B$, illetve $\mathbf{x}_I$ értékektől, csupán G kombinatorikus struktúrájával vannak kapcsolatban. Más szóval $\hat{\omega}$ minden szükséges információt hordoz G kombinatorikus struktúrájáról. Tehát rendelkezésünkre áll G kombinatorikus struktúrájának egy olyan leírása, mely az F erőkért felel.

3.3. Definíció. *Ezt a G kombinatorikus struktúráját leíró $\hat{\omega}$ súlyozást helyettesítő súlyozásnak nevezzük.*

A következőekben el kell döntenünk, hogy hogyan ágyazzuk be a külső pontokat, és határozzuk meg a külső élek súlyozását, hogy az F vektorokat kinullázzák. Azaz az alábbi egyenletrendszerek egy megoldását keressük, ahol a külső csúcsok koordinátái és a külső súlyok az ismeretlenek:

$$\hat{\omega}_{i,suc(i)}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{suc(i)}) + \hat{\omega}_{i,pre(i)}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{pre(i)}) = -F_i \quad \forall i \in B$$

Ahol $suc(i)$ jelöli az i -t követő, a $pre(i)$ pedig az i -t megelőző indexet a külső pontok és élek ciklusában. Az egyenletrendszernek nagy a szabadságfoka, ezért a lehetőségekhez képest annyi külső pontot rögzítünk, amennyi lehetséges. A továbbiakban k értéke, és G struktúrája szerint négy különböző esetben megadunk egy-egy speciális megoldást erre az egyenletrendszerre. Az egyensúlyt a külső pontokra kell ellenőrizni, ez azonban

csupán számolás kérdése, így ezt nem részletezzük, inkább a külső poligon konvexitására helyezzük a hangsúlyt.

1. G-nek a külső pontjai és élei háromhosszú kört alkotnak

Ez a legegyszerűbb eset, minden külső csúcsot tudunk rögzíteni:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 0) , \mathbf{p}_2 = (1, 0) , \mathbf{p}_3 = (0, 1)$$

És a súlyozás:

$$\omega_{12} = -\hat{\omega}_{12} , \omega_{23} = -\hat{\omega}_{23} , \omega_{13} = -\hat{\omega}_{13}$$

3.4. Lemma. *Ha G külső pontjai háromhosszú kört alkotnak, akkor a fentiekbenben definiált beágyazás, illetve súlyozás egyensúlyi síkra rajzolást eredményez.*

2. G-nek a külső pontjai és élei négyhosszú kört alkotnak, és nincs ezen belül kisebb kör

Ebben az esetben már nem rögzítünk minden külső csúcsot:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 0) , \mathbf{p}_2 = (1, 0) , \mathbf{p}_3 = (2, y_3) , \mathbf{p}_4 = (0, 1)$$

A súlyokat, illetve az y_3 -at az alábbi módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= -2\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{12} \\ \omega_{23} &= \hat{\omega}_{24} - 2\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{23} \\ \omega_{34} &= -\hat{\omega}_{24}/2 - \hat{\omega}_{34} \\ \omega_{14} &= \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{13}/(\hat{\omega}_{24} - 2\hat{\omega}_{13}) - \hat{\omega}_{14} \\ y_3 &= \hat{\omega}_{24}/(2\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{24}) \end{aligned}$$

Feltehetjük, hogy $\hat{\omega}_{13} > \hat{\omega}_{24}$, különben ciklikusan újraindexeljük a külső poligont. Így a konvexitás teljesül, hisz $y_3 > 0$. Megjegyezzük, hogy az $\hat{\omega}$ súlyok a szomszédos külső csúcsok között irrelevánsak y_3 szempontjából. Ez látható a fenti beágyazásban: a külső élekhez tartozó súlyok nem jelennek meg y_3 definíciójában, továbbá $\hat{\omega}_{ij} + \omega_{ij}$ minden (i, j) külső él esetén független bármely külső élre vonatkozó súlytól.

3.5. Lemma. *Ha G külső pontjai négyhosszú kört alkotnak, melyen belül nincs kisebb kör, akkor a fentiekben definiált beágyazásra és súlyozásra konvex külsőt kapunk, és a beágyazott gráf egyensúlyban lesz.*

3. G-nek a külső pontjai és élei öthosszú kört alkotnak, és nincs ezen belül kisebb kör

Ez az eset már jóval bonyolultabb, a konvexitás miatt két alesettel is foglalkoznunk kell. Ezt a vizsgálatot segíti az alábbi lemma:

3.6. Lemma. *Át tudjuk indexelni a külső csúcsokat, hogy az alábbiak teljesüljenek:*

$$\hat{\omega}_{35} \geq \hat{\omega}_{24} \quad \text{és} \quad \hat{\omega}_{25} \geq \hat{\omega}_{13}$$

illetve semelyik belső $\hat{\omega}_{ij}$ – nem szomszédos csúcsok között menő – súly nem nulla.

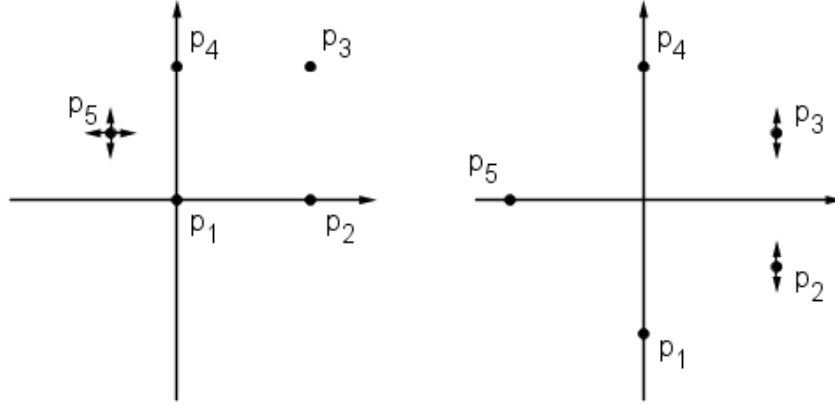
Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\hat{\omega}_{35}$ legyen a legnagyobb külső élen levő helyettesítő súly, hisz egyébként a külső pontokat ciklikusan átindexelhetjük. Ha $\hat{\omega}_{25} \geq \hat{\omega}_{13}$, akkor készen vagyunk. Egyébként indexeljük át a pontokat az alábbi módon: $\mathbf{p}_3 \leftrightarrow \mathbf{p}_4$ és $\mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2$. Ahhoz hogy belássuk $\hat{\omega}_{ij} > 0$ egyenlőtlenséget, rögzítjük egy speciális esetben a külső pontokat. Ezt megtehetjük, hisz mint korábban láttuk ezek függetlenek a csúcsok elhelyezkedésétől. Legyen $\mathbf{p}_i = (0, 0)$ és minden más határpont esetén az x -koordináta legyen 1. Ekkor $\hat{\omega}_{ij}$ az x -koordinátája F_j -nek, hisz csak az i csúcs x -koordinátája tér el az övétől. A (8) alapján kapjuk, hogy:

$$\hat{\omega}_{ij} = \sum_{i \in I} \omega_{ij}(x_j - x_i)$$

Ez csak akkor lehetne nulla, ha j -nek nem lenne belső szomszédja. Ez viszont nem lehetséges, mivel G 3-összefüggő, ezért legalább három szomszédja van, illetve a külső körön pontosan kettő van (nincs a külső pontok ciklusán belül kisebb kör). $\square$

A helyettesítő súlyozás függvényében két esetet különböztetjük meg (7. ábra):

3A eset: $\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} + \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} > \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25}$



7. ábra. A két esetet, **3A**, ill. **3B** beágyazása

Ebben az esetben a külső csúcsokat így definiáljuk:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 0) , \mathbf{p}_2 = (1, 0) , \mathbf{p}_3 = (1, 1) , \mathbf{p}_4 = (0, 1) , \mathbf{p}_5 = (x_5, y_5)$$

A $\mathbf{p}_5$ csúcs koordinátái és a súlyozás legyen:

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{(\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{14})(\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{24})}{\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} + \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25}} \\ y_5 &= \frac{\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{24}}{\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25}} \\ \omega_{12} &= \frac{\hat{\omega}_{35}(\hat{\omega}_{25}^2 + \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{25}) + \hat{\omega}_{14}(\hat{\omega}_{25}^2 + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{24})}{\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14}} - \hat{\omega}_{12} \\ \omega_{23} &= \frac{\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25}}{-\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{35}} - \hat{\omega}_{23} \\ \omega_{34} &= \frac{\hat{\omega}_{14}(\hat{\omega}_{35}^2 + \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{25}) + \hat{\omega}_{24}(\hat{\omega}_{35}^2 + \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{25} - 2\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{24})}{\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14}} - \hat{\omega}_{34} \\ \omega_{45} &= \frac{\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35}}{\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{25}} - \hat{\omega}_{45} \\ \omega_{15} &= \frac{\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{13} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{35}}{\hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{13}} - \hat{\omega}_{15} \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy $y_5 > 0$, hisz a helyettesítő súlyozás nem negatív, és $\hat{\omega}_{24} < \hat{\omega}_{35}$. Továbbá $y_5 < 1$, mivel $\hat{\omega}_{25} > \hat{\omega}_{13}$. Az x_5 számlálója ugyanezért negatív, nevezője pedig a **3A** feltevés miatt pozitív. Ezért $x_5 < 0$, azaz a külső csúcsok konvex poligont alkotnak.

3B eset: $\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} + \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} \leq \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25}$

A külső csúcsok legyenek:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 0) , \mathbf{p}_2 = (1, y_2) , \mathbf{p}_3 = (1, y_3) , \mathbf{p}_4 = (0, 1) , \mathbf{p}_5 = (-1, 0)$$

Ezután nem meghatározott koordináták és a súlyozás legyen:

$$\begin{aligned} y_2 &= -2 \frac{\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{13} + \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13} + 2\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{13}^2 - 2\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14}}{\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13} + 2\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35}} \\ y_3 &= 2 \frac{\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{13} + \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13} + 2\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{24}^2 - 2\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25}}{\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13} + 2\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35}} \\ \omega_{12} &= -\hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{12} \\ \omega_{23} &= \frac{\hat{\omega}_{13}(\hat{\omega}_{13}^2 + 2\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} + 2\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35}) - \hat{\omega}_{35}(\hat{\omega}_{24}^2 + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{14})}{2\hat{\omega}_{35}(\hat{\omega}_{24} + \hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{13} - 1/2\hat{\omega}_{14}) + 2\hat{\omega}_{25}(\hat{\omega}_{13} + \hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{24} - 1/2\hat{\omega}_{14}) - (\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{24})^2} - \hat{\omega}_{23} \\ \omega_{34} &= -\hat{\omega}_{14} - 2\hat{\omega}_{15} - \hat{\omega}_{34} \\ \omega_{45} &= \hat{\omega}_{24} - 2\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{45} \\ \omega_{15} &= \hat{\omega}_{13} - 2\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{15} \end{aligned}$$

A külső pontok, és élek konvex poligont alkotnak, ha $-2 < y_2 < y_3 < 2$. A $-2 < y_2$ és $y_3 < 2$ egyenlőtlenségek ekvivalensek az alábbi két egyenlőtlenséggel:

$$\begin{aligned} -\hat{\omega}_{13}^2 - \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{13}(\hat{\omega}_{24} - \hat{\omega}_{35}) &< 0 \\ -\hat{\omega}_{24}^2 - \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25} - \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}(\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{25}) &< 0 \end{aligned}$$

Mindkét egyenlőtlenség igaz, hiszen csupa negatív szám szerepel a bal oldalon. Így már csak azt kell ellenőriznünk, hogy $y_2 - y_3 < 0$. Ezt elosztjuk 2-vel, beszorozzuk a nevezővel, majd a negatív előjelű tagokat átvisszük a másik oldalra:

$$\hat{\omega}_{13}^2 + \hat{\omega}_{24}^2 + 2\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} + 2\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} < 2\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{13} + 2\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} + 2\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13} + 4\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35}$$

3.6. lemma segítségével kapjuk, hogy $\hat{\omega}_{13}^2 \leq \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13}$ és $\hat{\omega}_{24}^2 \leq \hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35}$. A **3B** feltevésből következik, hogy $\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} + 2\hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} < 4\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25}$. Ezért az igazolandó egyenlőtlenség jobb oldala nagyobb, mint a bal, tehát a külső poligon konvex.

3.7. Lemma. *Ha G külső pontjai öthosszú kört alkotnak, és azon belül nincs kisebb kör, akkor a fentiekben tárgyalt beágyazás és súlyozás esetén konvex külsőt kapunk, és a beágyazott gráf egyensúlyban lesz.*

Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy G kombinatorikus struktúrájától függően négy különböző esetben definiáltunk egy síkra rajzolást, és egy azon értelmezett egyensúlyi súlyozást, ezzel továbbléphetünk majd ennek kiemelésére, előbb azonban tekintsünk meg néhány példát.

3.3. Példák a beágyazásra

3.8. Példa. *Az előző fejezetben láttuk, hogy K_4 bármely síkra rajzolása támogatja az egyensúlyt, most nézzük meg, hogy a fenti eljárás milyen síkra rajzolást, és súlyozást eredményez.*

K_4 szomszédsági és diagonális mátrixa a belső élek nélkül:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ebből kapjuk a Laplace-mátrixot: $D_{II} - A_{II} = L = 3$. Ennek inverze $L_{-1} = 1/3$.

Ezután rögzítjük a külső pontokat az 1. típusú eset alapján:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 0) , \quad \mathbf{p}_2 = (1, 0) , \quad \mathbf{p}_3 = (0, 1)$$

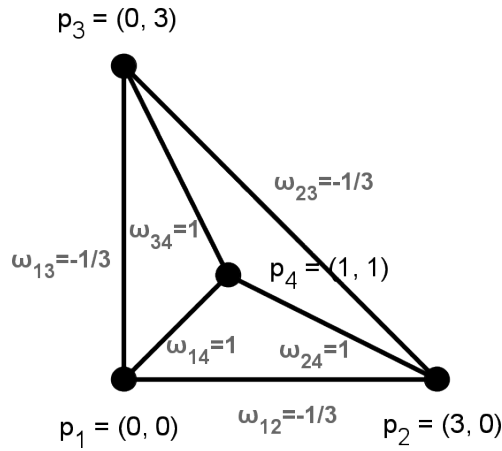
Továbbá kiszámoljuk a helyettesítő súlyokat (10) alapján $\hat{A}$ -ot:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$\hat{A}$ segítségével definiálhatjuk $\hat{\omega}$ -ot. Ebből viszont az 1. esetben leírtakból kapjuk, hogy: $\hat{\omega}_{12} = -1/3$, $\hat{\omega}_{23} = -1/3$, $\hat{\omega}_{13} = -1/3$. (7) alapján pedig kiszámolhatjuk a belső pont koordinátáit:

$$x_4 = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1/3 \quad y_4 = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/3$$

Ezt a síkra rajzolást 3-szorosára nagyítva kapjuk a 8. ábrán látható beágyazást.



8. ábra. K_4 beágyazása

3.9. Példa. *Érdekes lehet megvizsgálni, mit eredményez a fenti beágyazás, ha a bemeneti gráf nem síkgráf. Nézzük meg K_5 -esetét.*

A számolásokat nem részletezzük; a beágyazott csúcsok koordinátái $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 1/3, 1/3)$ és $\mathbf{y} = (0, 0, 1, 1/3, 1/3)$

A súlyozás mátrixa $((\Omega)_{ij})$ elem az i és j csúcs közötti súly):

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & -2/3 & 1 & 1 \\ -2/3 & 0 & -2/3 & 1 & 1 \\ -2/3 & -2/3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát formára hasonló eredményt kaptunk, mint K_4 esetén, csak belül duplikált pontot lesz, ami meglehetősen elfajult esetet eredményez. Érdekes megfigyelnünk, hogy a külső súlyok pont duplájára nőttek az előző példához képest, továbbá a kapott eredmény továbbra is egyensúlyban lesz. Ez nem is meglepő, hisz az eset átvihető arra a rendszerre ahol K_4 -en a belső súlyozás nem 1, hanem 2, így a külső, negatív súlyoknak kétszer nagyobbaknak kell lennie, hogy a rendszer egyensúlyban legyen.

3.10. Megjegyzés. *A beágyazás és súlyozás kiszámításának módja miatt tetszőleges gráfra teljesülni fog az egyensúlyi kritérium, amennyiben igazak a következők:*

- (i) *Van legalább egy pontja.*
- (ii) *Van benne három, négy, vagy öthosszúságú olyan kör, melyben nincs kisebb kör.*

Természetesen ha G nem síkgráf, akkor elfajuló, vagy keresztező esetet kapunk. Mindezek után pedig térjünk rá az egyensúlyban levő síkra rajzolt gráfok kiemelésére.

4. Kiemelés

A poliéderek konstruálásának utolsó fejezetéhez értünk, itt az előző fejezetben síkra rajzolt gráfot emeljük ki, azaz ágyazzuk be $\mathbb{R}^3$ -ba. Az egyensúlyban lévő gráf kiemelése Carpo és Whitley [10, 11]névéhez fűződik, de Richter-Gebert [5] is kidolgozta, A. Schulz [1] elsősorban erre támaszkodott. Ez a fejezet elsősorban ezen utóbbi két forráson alapul.

4.1. Egyensúlyban lévő gráf kiemelése

Maxwell nevéhez nem csak a reciprok diagram és az egyensúlyi helyzet összefüggésével kapcsolatos észrevételek fűződnek, hanem az egyensúlyi síkra rajzolás és poliéderek projekciójával kapcsolatos megfigyeléseket is tett. A következő tétel ilyen kapcsolat létezését mondja ki. Annak bizonyítása, hogy az (i)-ből következik a (ii) Walter Whiteley [11] nevéhez fűződik, így a tételt Maxwell-Whiteley tételnek nevezzük, azonban Maxwell munkáját Luigi Cremona ültette át tisztább formába [12], ezért ez a tétel Maxwell-Cremona összefüggésként is ismert.

4.1. Tétel. *Legyen G egy 3-összefüggő egyszerű síkgráf és annak egy $G(\mathbf{p})$ - konvex síkra rajzolása illetve f_1 ennek egy kiválasztott tartománya. Ekkor az alábbiak ekvivalens:*

- (i) Létezik ω egyensúlyi súlyozás $G(\mathbf{p})$ -n*
- (ii) G beágyazható poliéderként $\mathbb{R}^3$ -ba, ahol az f_1 tartomány az xy -síkban fekszik, és ezen poliéder ortogonális projekciója az xy -síkra $G(\mathbf{p})$ -t eredményezi.*

A tételben szereplő kapcsolatra adunk egy konstrukciót. Először definiálunk egy kiemelést egy rögzített reciprok diagram segítségével. Ezután megmutatjuk, hogy a kiemelés paraméterei jól definiáltak, végül belátjuk, hogy a kiemelés eredménye egy konvex poliéder.

$G(\mathbf{p})$ kiemelését síkok halmazával írjuk le. Minden $f_i \in F_G$ tartományt megfeleltetjük egy síknak. A kiemelt f_i tartomány az f_i z -menti projekciója lesz H_i -re. H_i -t az

alábbi módon írhatjuk le:

$$H_i: \mathbf{p} \mapsto z_i(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{a}_i \rangle + d_i \quad (11)$$

Ahol $\mathbf{a}_i$ a lap normálvektora, d_i pedig a $(0, 0)$ -ban felvett érték, mely a lapok megfelelő illeszkedését biztosítja.

Az $\mathbf{a}_i$ definiálásához a G egy reciprok diagramját használjuk, mely 2.4. tétel alapján létezik, hisz $G(\mathbf{p})$ támogatja a súlyozást. Ne feledjük, hogy rögzített egyensúlyi súlyozás esetén sem egyértelmű a reciprok diagram, ezért rögzítünk egyet, melyet $G^*(\mathbf{a})$ -val jelölünk, és ω -hoz tartozik a 2.4 tétel bizonyítása alapján.

$$\mathbf{a}_1 = (0, 0)$$

Továbbá $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzetre legyen:

$$\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_r + \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp \quad (12)$$

Ezután definiáljuk d_l -t szintén $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet esetén:

$$d_l = \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle + d_r \quad (13)$$

Mivel egy adott f_i tartományhoz tartozó $\mathbf{a}_i$ és d_i definiálása több módon megtörténhet, meg kell mutatnunk ennek egyértelműségét:

4.2. Lemma. *A kiemelés definiálásához használt $\mathbf{a}_i$ vektor és d_i konstans jól definiált.*

Bizonyítás. Az $\mathbf{a}_i$ definiálása egyértelmű, hiszen az egy rögzített reciprok diagramból adódik. A d_i egyértelműsége azonban már jóval mélyebb vizsgálatot igényel.

A d_i értékeket tartományátmenetek sorozatával tudjuk kiszámolni. $F_k = (r, l)$ legyen egy tartományátmenet $f_r \in F_G$ tartományról $f_l \in F_G$ tartományra. Egy (r, l) tartományátmenet érvényes, ha létezik $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet valamely (i, j) élre. Egy F_k tartományátmenet esetén, mely $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet által érvényes, jelöljük az ehhez tartozó irányított (i, j) élt t_k -val.

Legyen $F_1, F_2, \dots, F_u$ egy sorozata a tartományátmeneteknek, hogy $F_1 = (1, *)$ és $F_u = (*, i)$. Ha bármely $k < u$ esetén $F_k = (*, \Theta)$ rákövetkezője $F_{k+1} = (\Theta, *)$,

akkor a sorozat alkalmas d_i kiszámolására. Általában azonban az ilyen sorozatok nem egyértelműek, ezért meg kell mutatnunk, hogy bármilyen sorozatot választunk is d_i definiálására, ugyanazt az értéket kapjuk.

Tekintsünk két tartományátmenet sorozatot f_1 és f_i között. Az egyiket odafele fogunk haladni, a másikon pedig visszafele. Ez egy kört jelent a duális gráfban, jelöljük ezt a kört $C = \{F_1, \dots, F_K\}$ -val.

Ha a két sorozat különböző értéket adna d_i -re, akkor $\sum_{t_k=(i,j): k \leq K} \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle$ értéke nemnulla lenne. Ezért elegendő megmutatnunk, hogy bármely C körre:

$$\sum_{t_k=(i,j): k \leq K} \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle = 0 \quad (14)$$

A C ciklus két részre választja szét a gráf csúcsait, I -re és O -ra. Először feltesszük, hogy I csupán egy csúcsot tartalmaz, mégpedig $\mathbf{p}_1$ -et (9. ábra). Ekkor:

$$\begin{aligned} \sum_{t_k=(i,j): k \leq K} \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle &= \sum_{(1,j) \in E} \omega_{1j} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_j^\perp \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}_1, \sum_{(1,j) \in E} \omega_{1j} \mathbf{p}_j^\perp \rangle \\ &= \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{0} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

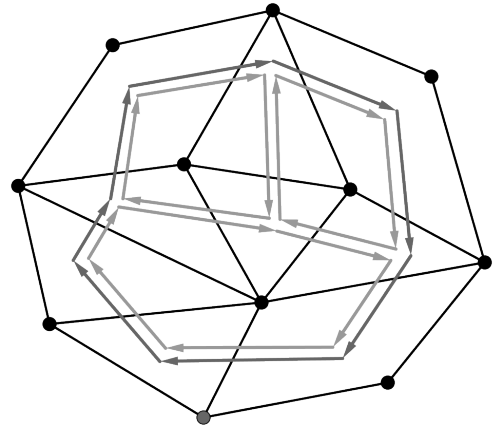
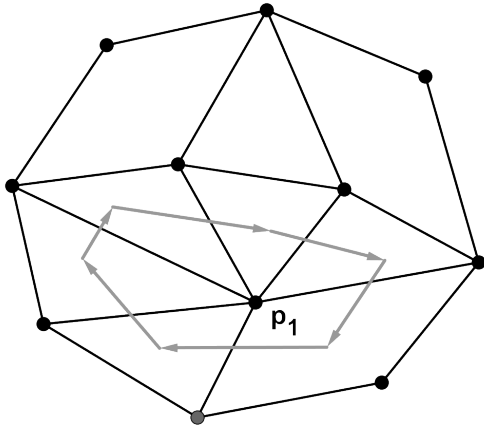
Tehát (14) teljesül ez esetben.

Ha I több mint egy csúcsot tartalmaz, akkor C -t felbonthatjuk C_i kisebb ciklusokra, melyek $\mathbf{p}_i$ -t fogják közre, és hasonló a körüljárásuk, mint C -nek-nak (10. ábra). Könnyen látható, hogy azok az élek, melyeknek mindkét csúcsa I -beli, kétszer kerülnek bejárásra, mégpedig ellentétes irányban, ezért kinullázzák egymást:

$$\omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle + \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i^\perp \rangle = 0$$

Így az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{t_k=(i,j): k \leq K} \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{(i,j) \in E} \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle = 0$$



9. ábra. Egy csúcsot vesz körül az út. 10. ábra. Több csúcsot vesz körül az út.

Mivel az előző pont alapján, ha egy csúcsot járunk körül, akkor nullát kapunk. Tehát a C körre is nullát kaptunk. $\square$

4.3. Tétel. Egy $G(\mathbf{p})$ beágyazásra és rajta értelmezett ω egyensúlyi súlyozásra a fent definiált kiemelés poliédert ad.

Bizonyítás. Ennek bizonyításához már csak azt kell megmutatnunk, hogy a kiemelt tartományok megfelelően kapcsolódnak, azaz G egy $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzetére a kiemelt (i, j) élt tartalmazza H_l és H_r metszete. Mivel a fent definiált kiemelés lineáris, ezért ezt elegendő $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}_j$ pontokra megmutatni. Az $\mathbf{a}_l$ és d_l definíciójából kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r &= \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp \\ d_l - d_r &= \omega_{ij}\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $\mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r$ a reciprok diagram egyik élvektora ezért ez megegyezik a 2.4. tétel bizonyítása alapján $\omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp$ -vel. A H_l és H_r által $\mathbf{p}_i$ -re adott értékek

különbsége a fentiek alapján ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}
z_l(\mathbf{p}_i) - z_r(\mathbf{p}_i) &= \langle \mathbf{a}_l, \mathbf{p}_i \rangle - \langle \mathbf{a}_r, \mathbf{p}_i \rangle + d_l \smile d_r \\
&= \langle \mathbf{a}_l - \mathbf{a}_r, \mathbf{p}_i \rangle + (d_l \smile d_r) \\
&= \langle \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp, \mathbf{p}_i \rangle + \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle \\
&= \langle \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp + \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle, \mathbf{p}_i \rangle \\
&= \omega_{ij} \langle \mathbf{p}_i^\perp, \mathbf{p}_i \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Hasonló eredményt kapunk $\mathbf{p}_j$ pontra is, s ezzel igazoltuk is a tételt. $\square$

4.4. Állítás. *Ha $G(\mathbf{p})$ beágyazásra és rajta értelmezett ω egyensúlyi súlyozásra igaz, hogy a külső súlyok negatívak, és a belsők pozitívak, akkor a kapott poliéder konvex.*

Bizonyítás. Ehhez megmutatjuk, hogy két lap egymáshoz való viszonya kapcsolatban van a köztük futó élhez rendelt súllyal. Legyen $(i, j \mid l, r)$ irányított helyzet. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{p}_i = \mathbf{a}_r = (0, 0)$, ebből kapjuk, hogy $d_l = d_r = 0$. Azaz a H_r magassága (z -koordinátája) 0 lesz. Ekkor a $\mathbf{p}_t$ magassága H_l lapon:

$$\begin{aligned}
z_l(\mathbf{p}_t) &= \langle \omega_{ij}(\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j)^\perp, \mathbf{p}_t \rangle \\
&= \omega_{ij} \left\langle \begin{pmatrix} y_j \\ -x_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 2\omega_{ij}[t, j, i]
\end{aligned}$$

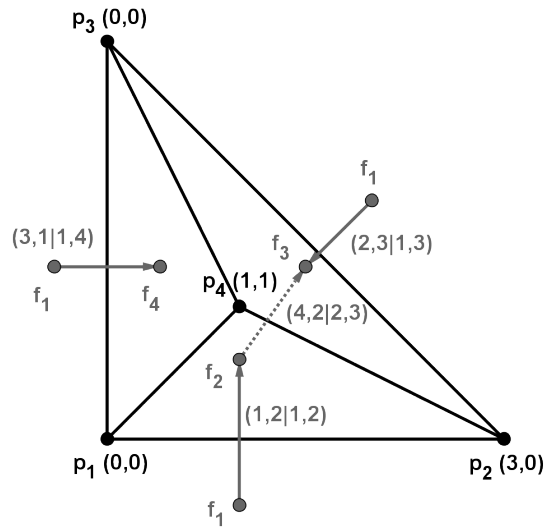
$[t, j, i]$ negatív, azaz ha ω_{ij} negatív, akkor z pozitív koordinátát rendel $\mathbf{p}_t$ -hez. Tehát, ha a külső poliéder konvex, és negatív súlyú, akkor a belső tartományokhoz pozitív koordinátát fog rendelni. A belső élek pozitívak, így ha egy adott kiemelt lapot nézünk, akkor a szomszédos lapok ennek síkja alatt lesznek, ha nem lenne konvex, akkor ez nem teljesülne. Tehát a kapott test konvex poliéder, és két lap nem eshet egy síkba se. $\square$

Mindezekből következik, hogy a kapott poliéder gráfja megegyezik az eredeti gráfunkkal. Ezzel a kiemelés tárgyalásának végére értünk. A következő részben néhány egyszerűbb példán keresztül mutatjuk meg a kiemelés menetét.

4.2. Példa a beágyazásra

A rekurzív definíció jobb megértése végett, most egy példán keresztül lépésről-lépésre elvégezzük a kiemelést.

4.5. Példa. *Az egyszerűség kedvéért itt is K_4 -gyel foglalkozunk. Az előző fejezetben megadott síkra rajzolást emeljük ki az egyensúlyi súlyozás segítségével.*



11. ábra. $\mathbf{a}_i$ és d_i definiálása

Először rekurzívan definiáljuk $\mathbf{a}_i$ vektorokat és d_i konstansokat, azon i -kre, melyekre $f_i \in F_G$. f_2 esetén $(1, 2 \mid 1, 2)$, f_3 -nál $(2, 3 \mid 1, 3)$, illetve f_4 -nél $(3, 1 \mid 1, 4)$ irányított helyzetek alapján (11. ábra):

$$\mathbf{a}_1 = (0, 0)$$

$$\mathbf{a}_2 = -1/3(-3, 0)^\perp + (0, 0) = -1/3(0, -3) = (0, 1)$$

$$\mathbf{a}_3 = -1/3(3, -3)^\perp + (0, 0) = -1/3(3, 3) = (-1, -1)$$

$$\mathbf{a}_4 = -1/3(0, 3)^\perp + (0, 0) = -1/3(-3, 0) = (1, 0)$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = -1/3 \langle (0,0), (3,0)^\perp \rangle + 0 = 0$$

$$d_3 = -1/3 \langle (3,0), (0,3)^\perp \rangle + 0 = -1/3 \langle (3,0), (-3,0) \rangle = 3$$

$$d_4 = -1/3 \langle (0,3), (0,0)^\perp \rangle + 0 = 0$$

Ellenőrizhetjük a definíció egyértelműségét, ha $i = 3$ -ra nem $(2, 3|1, 3)$ irányított helyzet segítségével definiálunk, hanem $(4, 2|2, 3)$ -mal:

$$\mathbf{a}_3 = 1(-2, 1)^\perp + (0, 1) = (-1, -2) + (0, 1) = (-1, -1)$$

$$d_3 = 1 \langle (1, 1), (3, 0)^\perp \rangle + 0 = 1 \langle (1, 1), (0, 3) \rangle = 3$$

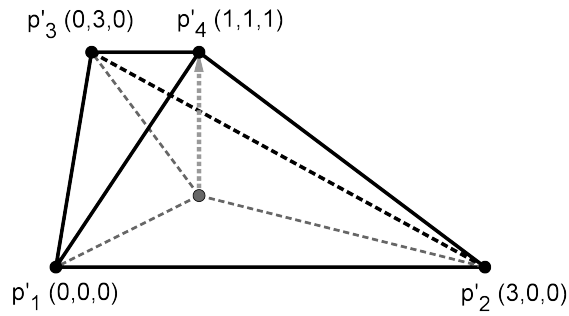
Mindezek segítségével, most meghatározhatjuk a lapok kiemelését:

$$H_1: \mathbf{p} \mapsto z_i(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, (0, 0) \rangle + 0$$

$$H_2: \mathbf{p} \mapsto z_i(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, (0, 1) \rangle + 0$$

$$H_3: \mathbf{p} \mapsto z_i(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, (-1, -1) \rangle + 3$$

$$H_4: \mathbf{p} \mapsto z_i(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, (1, 0) \rangle + 0$$



12. ábra. K_4 kiemelése

Ezeknek segítségével a tartományhoz tartozó csúcsokat kiemelhetjük, a poliéder ezen csúcsok konvex burka lesz. Itt szintén megfigyelhetjük a kiemelés egyértelműségét:

$$H_1: (0,0) \mapsto 0 \quad (3,0) \mapsto 0 \quad (0,3) \mapsto 0$$

$$H_2: (0,0) \mapsto 0 \quad (3,0) \mapsto 0 \quad (1,1) \mapsto 1$$

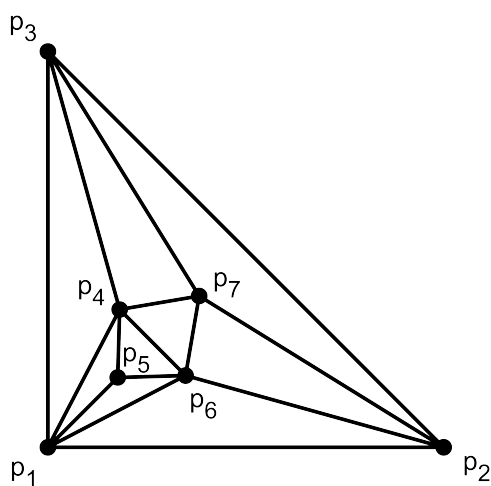
$$H_3: (3,0) \mapsto 0 \quad (0,3) \mapsto 0 \quad (1,1) \mapsto 1$$

$$H_4: (0,3) \mapsto 0 \quad (0,0) \mapsto 0 \quad (1,1) \mapsto 1$$

A kapott eredményt megtekinthetjük a 12. ábrán.

4.6. Példa. *Most programunk segítségével az alábbi mátrixból konstruálunk poliédert:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



13. ábra. A gráf síkra rajzolása

A 3. fejezetben megadott síkra rajzolást az alábbi koordinátákat eredményezi (13. ábra):

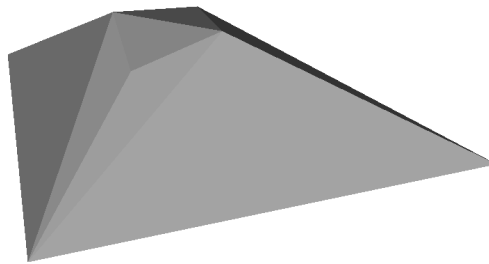
$$\mathbf{x} = (0, 204, 0, 37, 36, 71, 78)^T$$

$$\mathbf{y} = (0, 0, 204, 71, 36, 37, 78)^T$$

A kiemelés pedig az alábbi harmadik koordinátákat adja meg, bár ezek már a jobb ábrázolhatóság kedvéért arányosan csökkentett értékek:

$$\mathbf{z} = (0, 0, 0, 55.5, 41.25, 55.5, 57.5)^T$$

A kapott eredményt MeshLabbal ábrázolva nyerjük a 14. ábrát.



14. ábra. A gráf síkra rajzolása

5. Az algoritmusról

A következő fejezet két részre oszlik, az első felében kiegészítjük a fenti beágyazást, és vázlatosan foglalkozunk az egészértékűvé tételével, illetve a beágyazás kiterjedésével. A második felében pedig az algoritmus implementációjáról ejtünk néhány szót.

5.1. Egész értékű beágyazás és kiterjedés

Ebben a részben olyan beágyazást keresünk, ahol a csúcsok koordinátái egészek. Itt csak vázolni fogjuk A. Schulz eredményeit, az eredmények mélyebb vizsgálatához az ő dolgozatát ajánljuk [1].

Első fontos megállapításunk miatt elegendő csak a síkra rajzolást vizsgálnunk:

5.1. Lemma. *Ha $G(\mathbf{p})$ síkra rajzolás csúcsai egész koordinátájúak, akkor a kiemelés során ezekhez egész értékű z -koordinátát rendelünk hozzá.*

Tehát keresünk olyan S_x és S_y szorzó tényezőket, melyekkel felszorozva az eredeti síkra rajzolás y - és x -koordinátáit, a kapott síkra rajzolás egészértékű lesz.

5.2. Lemma. *Ha $G(\mathbf{p})$ külső csúcsainak koordinátái egészek, akkor a belső pontok koordinátái $1/\det L$ többszörösei lesznek.*

Tehát, ha elértük, hogy a külső csúcsok koordinátái egészek, akkor felszorozzuk mindkét koordinátát L determinánsával, akkor a kiemelés egész koordinátájú lesz. A külső pontok egészé tételéhez G kombinatorikus struktúrája alapján (3.2. fejezet) négy különböző esetben definiáljuk a megfelelő faktorokat az alábbi tábla tartalmazza.

Eset	Szorótényezők
1	$S_x = \det L$ $S_y = \det L$
2	$S_x = \det L$ $S_y = (2\hat{\omega}_{13} - \hat{\omega}_{24})(\det L)^2$
3A	$S_x = (\hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{14} + \hat{\omega}_{14}\hat{\omega}_{25} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{24} + \hat{\omega}_{13}\hat{\omega}_{35} - \hat{\omega}_{35}\hat{\omega}_{25})(\det L)$ $S_y = (\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25})(\det L)^2$
3B	$S_x = (\det L)$ $S_y = (\hat{\omega}_{24}\hat{\omega}_{35} + \hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{13} + 2\hat{\omega}_{25}\hat{\omega}_{35})(\det L)^3$

Felmerülhet a kérdés, hogy mekkora lesz a legnagyobb abszolút értékű koordináta ilyen beágyazás esetén. Ennek meghatározásához komoly előkészületek kellenek, itt csak a végeredményt mondjuk ki:

5.3. Állítás. *Minden poliéder melynek n csúcsa van realizálható egész koordinátákkal, melynek mérete $O(2^{7,55n})$.*

Ennek élessége nyitott kérdés. Vajon van olyan beágyazás melynek mérete nem exponenciális módon függ n -től. A. Schulz dolgozatában találhatunk egy sejtést, mely 3-összefüggő síkgráfok egy családjáról azt állítja, hogy nem lehet olyan méretben beágyazni, mely n polinomiális függvényébe.

5.2. Az implementáció áttekintése

A következő részben a fent ismertetett poliéder konstruáló algoritmus implementációját tekintjük át, melynek forráskódja megtalálható a függelékben és a mellékelt CD-n. A gyakorlati megvalósításra a Visual Basic nyelvet választottam, mely igen alkalmas függvények és alprogramok paramétereinek kezelésére. Legnagyobb előnye, hogy ezeknek a paramétereik kétirányú kommunikációra is alkalmasak. Lényegében a 3. és 4. fejezet lépéseinket megyünk át újra, kiegészítve a fontosabb technikai részletekkel.

1. Input

A bemenet egy .txt fájl mely tartalmazza a kiemelni kívánt gráf szomszédsági mátrixát. Ennek a gráfnak ki kell elégítenie a Steiniz tételéből fakadó követelményeket; azaz 3-összefüggőnek és síkgráfnak kell lennie. A síkra rajzolhatóságot tesztelő algoritmusuk igen nehezen implementálhatóak, így ennek tesztelését a program nem végzi el, de megtehetjük ezt a Mathematica program Combinatorica modulja segítségével. Hasonlóan a 3-összefüggőség tesztelését sem tesszük meg.

2. Megfelelő kör keresése

Miután beolvasta a program a mátrixot, először keres egy szigorúan k hosszú kört a gráfban, ahol k legfeljebb 5. Ennek alapját Dijkstra legrövidebb utat kereső algoritmus szolgáltatja. A program az alábbi ciklust ismétli. Először tekint egy adott pontot, i -t, illetve annak egy szomszédját, j -t. Ezután a gráfból eltávolítjuk az (i, j) élt, majd a Dijkstra algoritmus segítségével meghatározzuk az i és j távolságát. Ha ez kisebb, mint 5, akkor az (i, j) él visszavételével találtunk egy legfeljebb 5 hosszú kört, kilépünk a ciklusból. Egyébként áttérünk i következő szomszédjára, illetve ha azok esetén sem találunk megfelelő kört, kiválasztunk egy másik pontot. Mivel egy 3-összefüggő síkgráfban van legfeljebb 5 hosszú kör, ezért a keresés mindig pozitív eredménnyel zárul. A kapott kör lesz a beágyazandó gráf külső poligonja, a többi pont ezen belül fog elhelyezkedni.

Némi gyorsítást tesz lehetővé, hogy amennyiben az i és j közti út túl hosszú, akkor az (i, j) élt nem vesszük vissza, hisz ez már biztos nem része egy legfeljebb 5 hosszú körnek. Ezzel a Dijkstra algoritmus gyorsul, mivel j -nél már nem vizsgáljuk az i -t.

3. A gráf beágyazása

Először kiszámítjuk $L = D_{II} - A_{II}$ Laplace mátrix inverzét, majd ennek segítségével a C $k \times k$ -s mátrix kiszámolása következik, mely a külső pontokból alkotott pontpárokhoz rendelt $\hat{\omega}$ értékeket tárolja. A következőkben k szerinti esetvizsgálat következik. A külső pontok közti élekhez tartozó súlyokat és a külső pontok koordinátáit definiáljuk

C segítségével, minden k esetén speciális módon ($k = 3, 4, 5$). A belső élekhez tartozó súlyok értékeit 1-nek definiáljuk. Ezután a belső pontok koordinátáit kiszámítjuk:

$$\mathbf{x}_I = L^{-1}A_{IB}\mathbf{x}_B \quad \mathbf{y}_I = L^{-1}A_{IB}\mathbf{y}_B$$

Ezzel rendelkezésünkre áll a gráf egy beágyazása, illetve egy azon értelmezett egyen-súlyi súlyozás. Ezt megfelelő szorzótényezőkkel felszorozva egész értékűvé tesszük.

4. A gráf megfelelő bejárásának meghatározása

A gráf kiemelését a csúcsok kiemelésével oldjuk meg. Ehhez úgy kell bejárnunk a lapok egy részét, hogy minden csúcs esetén legalább egy lapszomszédját érintsük, illetve csak olyan lapra léphetünk, amelynek legalább egy lapszomszédján már jártunk. Minden irányított (i, j) élt ellátunk két indexszel, mely 0 és 1 értékeket vehet fel. Az első a bal oldali, a második pedig a jobb oldali lapra vonatkozik. Az 1 azt jelenti, hogy az adott lapon már jártunk, a 0 pedig azt, hogy még nem. Továbbá minden csúcshoz hozzárendelünk 1-et, ha van bejárt lapszomszédja és 0-át, ha nincs. Kezdetben minden él indexe $(0, 0)$, és minden csúcshoz a 0 tartozik.

Első lépésnek a konvex burok lapját definiáljuk, mely a kiemelés után a gráf sík-jában marad, és az alsó lapját fogja jelenteni. Azaz a külső élen, pozitív körüljárás esetén $(0, 1)$ -nek definiáljuk az élekhez tartozó két indexet, illetve a csúcsokhoz az 1-et rendeljük. Az alábbi lépést iteráljuk: keresünk egy $(0, 1)$ indexű élt. Pozitív körüljárás szerint megkeressük a bal oldali lap csúcsait, melyekhez egyet rendelünk. Továbbá a bal oldali lapok éleihez pozitív körüljárás szerint tartozó bal oldali indexeit 1-re módosítjuk. Addig folytatjuk a ciklust, míg van 0 indexű csúcs.

Az eljárás vége egy irányított helyzetekből álló sorozat, melyekhez hozzá van ren-delve a bal oldali (kiemelendő) lap összes csúcsa.

5. A gráf kiemelése

A kezdő lap esetén $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$ és $d_1 = 0$. Minden kiemelési lépésre $(i, j \mid l, r)$ irányított

helyzet esetén rekurzívan definiáljuk az $\mathbf{a}_l$ vektort és d_l konstanst:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_l &= \mathbf{a}_r + \omega_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^\perp \\ d_l &= \omega_{ij}\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j^\perp \rangle + d_r\end{aligned}$$

Ezután végig megyünk a bejárt lapokon, ezeken belül pedig azok csúcsain. A csúcsokhoz hozzárendeljük a harmadik koordinátát:

$$z_i(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{a}_i \rangle + d_i$$

6. Output

Ezzel minden csúcsra kiszámoltuk az (x, y, z) koordinátákat, s ezeket a MeshLab ábrázoló programnak megfelelő fájlban kimentjük. A ponthalmazra a MeshLab segítségével konvex burkot számolhatunk, majd az eredményt ennek segítségével meg is tekinthetjük. Itt meg kell jegyeznünk, hogy ha a kimeneti koordináták valamelyike nagyobb, mint 18 jegyű, akkor túlcsordulási probléma lép fel, sajnos a maximális tárolhatósáma korlátozott.

6. Összefoglalás

Ebben a dolgozatban egy eljárást mutattunk poliéderek konstruálására. Az eljárás egy G gráfból indul ki, síkra rajzolja, majd ezt a síkra rajzolást emeli ki $\mathbb{R}^3$ -ba. Az eljárás egy implementációját is ismertettük, a hozzá tartozó Visual Basic forráskód pedig megtekinthető a mellékelt CD-n. Az áttekinthetőség érdekében a beágyazást öt nagyobb fejezetben tárgyaltuk.

Az első fejezetben körüljártuk a szükséges definíciókat és tételeket. Fontos megállapításunk volt, hogy egy gráf akkor és csak akkor egy poliéder gráfja, ha 3-összefüggő egyszerű síkgráf. Így elegendő csak ilyenekkel foglalkoznunk. Ezen gráfokra azonban igaz, hogy síkra rajzolásuk kombinatorikusan egyértelmű, melynek következménye, hogy adott gráfú poliéderek szintén kombinatorikusan megegyeznek.

A második fejezetben síkra rajzolt gráfok egyensúlyi súlyozásával foglalkoztunk, melynek segítségével történik meg majd a gráf kiemelése. A kiemelés kihasználja a G reciprok diagramjának létezését. Szerencsére a G síkra rajzolás akkor, és csak akkor támogatja az egyensúlyt, ha létezik reciprok diagramja. Így ha konstruálunk egy egyensúlyban levő síkra rajzolást, akkor kiemelhetjük azt.

A harmadik fejezet ilyen egyensúlyban lévő síkra rajzolást ad meg. A belső csúcsokat és súlyokat Tutte beágyazása alapján határozzuk meg, mely rögzített külső poliéder esetén adja meg a belső csúcsok koordinátáit. A külső csúcsokat a külső poliéder és a G gráf kombinatorikus struktúrája alapján, egyedi módon ágyazzuk be.

A negyedik fejezetben G súlyozásának és reciprok diagramjának segítségével kiemeljük a síkra rajzolt gráfot, úgy hogy a kapott alakzat egy megfelelő poliéder legyen. A kiemelést tartományonként végezzük, rekurzív módon; olyan tartományokat tudunk kiemelni, melyeknek van már kiemelt szomszédjuk.

Az ötödik fejezetben az egészértékű beágyazás módját, illetve méretét határoztuk meg, továbbá az algoritmus implementációját tekintettük át, ezzel zárva az érdemi részt.

Hivatkozások

- [1] A. Schulz, *Lifting Planar Graphs to Realize Integrál 3-Polytopes and Topics in Pseudo-Triangulations*, PhD thesis, 2008
- [2] J. C. Maxwell, *On reciprocal figures and diagrams of forces*, Phil. Mag. Ser., 27:250–261, 1864.
- [3] H. Crapo and W. Whiteley, *Plane self stresses an projected polyhedra I: The basic pattern*, Structural Topology, 20:55–78, 1993.
- [4] J. E. Hopcroft and P. J. Khan, *A paradigm for robust geometric algorithms*, Algoritmica, 7(4):339–380, 1992.
- [5] J. Richter-Gebert, *Realization Spaces of Polytopes*, volume 1643 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1996.
- [6] Hajnal Péter, *Gráfelmélet*, Polygon, 2003
- [7] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer, 1995
- [8] H. Whitney, *2-isomorphic graphs*, Amer. J. Math., 55:245–254, 1933
- [9] W. T. Tutte, *How to draw a graph*, Proceedings London Mathematical Society, 13(52):743–768, 1963.
- [10] H. Crapo and W. Whiteley *Statics of frameworks and motions of panel structures, a projective geometric introduction*, Structural Topology, 6:43–82, 1982.
- [11] W. Whiteley, *Motion and stresses of projected polyhedra*, Structural Topology, 7:13–38, 1982.
- [12] L. Cremona, *Le figure reciproche nella statica grafica*, Milano, Hoepli, 1872. English translation, Graphical Statics, Merchant Books, 2007, reprint.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok szoba- és kollégiumtársaimnak, akik noszogatásukkal elősegítették ezen mű megszületését. Ők, akik lankadatlan éberséggel őrködtek felettem, egy percre se hagyva, hogy megfélemedjek kötelességemről.

Továbbá köszönetet mondok kollégiumunk belső könyvtárának, ahol megfelelő környezetre leltem munkám végzéséhez, illetve kicsiny fa térdeplőzsámolyomnak, ami sikeresen kimotozott komfortzónámból, ezzel megakadályozva lustaságom előtérbe kerülését. A sorból nem felejtethjük ki azokat a derék japán teatermesztőket sem, akiknek köszönhető az a kiváló minőségű Sencha, ami fanyar zöldízével még hajnalok hajnalán is képes volt tartani bennem a lelket.

Hálával tartozok bátyámnak, Hartmann Miklósnak is, az Algebra és Számelmélet Tanszék egyetemi adjunktusának, aki bevezetett a LaTeX rejtelseibe.

Végül megköszönöm témavezetőmnek, Dr. Kincses Jánosnak, a Geometria Tanszék egyetemi docensének, hogy diplomamunkám készítése során ellátott tanácsaival, és türelmesen kivárta éveken átívelő munkám gyümölcsét. Az ő segítségével nem jöhetett volna létre ez a dolgozat.

Nyilatkozat

Alulírott Hartmann Zoltán, matematikus szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Karának Geometria Tanszékén készítettem, a matematikus diploma megszerzése érdekében.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakokon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem azt, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2011. május 11.

.....

Aláírás