

INVARIÁNS SZUB-RIEMANN GEOMETRIA ÉS AZ IZOPERIMETRIKUS PROBLÉMA

Nagy Péter Tibor

Budapest, Magyarország

Kivonat

Szub-Riemann geometriának nevezzük egy sokaságot, ha adott differenciálható módon egy állandó dimenziós altér disztribúció és ezeken az altereken egy euklideszi skalárszorzat. Az altereket horizontálisnak mondjuk, az altereket érintő görbéket horizontális görbéknek hívjuk. A horizontális görbék ívhossza természetes módon értelmezhető. A Chow–Rasevskij-tétel szerint, ha a horizontális disztribúcióban értékeit felvevő vektormezők által generált Lie-algebra megegyezik az összes vektormező Lie-algebrájával, akkor tetszőleges két pont összeköthető horizontális görbével. Ebben az esetben egy jó metrika, amit Carnot–Caratheodory metrikának hívnak, adódik a szub-Riemann geometrián a két pontot összekötő horizontális görbék ívhosszának infimumaként. A minimális hosszúságú görbék a Pontrjagin-féle maximumelv alkalmazásával határozhatók meg.

A 3-dimenziós Heisenberg csoporton értelmezett természetes bal-invariáns szub-Riemann geometria minimális görbéinek vizsgálata a klasszikus izoperimetrikus Dido problémára vezethető vissza.

Ismertetem a bal-invariáns szub-Riemann geometriák izometriáira, minimális görbéire és totálgeodetikus részsokaságaira vonatkozó, Rory Biggs-szel (Dél-Afrika) közös eredményeinket.

INVARIANT SUB-RIEMANNIAN GEOMETRY AND THE ISOPERIMETRIC PROBLEM

Péter T. Nagy

Budapest, Hungary

Abstract

A sub-Riemannian geometry is a manifold equipped with a differentiable distribution of subspaces of constant rank and by a field of Euclidean scalar products on these subspaces. The subspaces are called horizontal and the curves tangent to the horizontal subspaces are called horizontal curves. The arc-length of these curves is defined in a natural way. According to Chow-Rashevsky theorem, if the Lie algebra generated by the vector fields with values in the horizontal distribution coincides with the Lie algebra of all vector fields then any two points can be connected by horizontal curves. In this case a good metric, called Carnot-Caratheodory metric, is induced on the sub-Riemannian geometry defined by the infimum of the length of connecting curves of two points. The minimal curves can be determined by application of Pontryagin maximum principle.

The investigation of minimal curves of a natural left invariant sub-Riemannian structure on the 3-dimensional Heisenberg group is can be reduced to the classical isoperimetric problem of Dido.

I give a review on our joint results with Rory Biggs (South-Africa) on the isometries, minimal curves, and totally geodesic submanifolds of left invariant sub-Riemannian geometries on Lie groups.