

A REJTÉLYES CSÁSZÁR-POLIÉDER
A 90 éves Császár Ákos professzor tiszteletére

2014. május 22.

Szilassi Lajos
(Szegedi Tudományegyetem)

Kivonat

Császár-poliéder néven vált ismertté az az 1949-ben felfedezett tórusz-szerű poliéder, amelynek bármely két csúcsát él köti össze, azaz nincs átlója [1].

Megismerkedünk a Császár-poliéder négy ránézésre különböző – de kombinatorikusan ekvivalens – változatával [2].

Megvizsgáljuk, hogy a poliédertest vajon felbontható-e olyan diszjunkt tetraéderekre, amelyek a csúcspontjai a Császár-poliéder csúcsai. Eközben példákat mutatunk tetraéderekre nem bontható poliéderekre. Válaszolunk olyan nem nyilvánvaló kérdésre is, hogy a tórusz-szerű poliéderek között vannak-e olyanok, amelyek összes átlóját tartalmazza, ill. nem tartalmazza a poliédertest.

Végül megemlíjük, hogy a Császár-poliéderből kiindulva miként sikerült eljutni e poliéder – kombinatorikus értelemben vett – duálisának a felfedezéséig.

THE PUZZLING CSÁSZÁR POLYHEDRON
In honour of the 90-year-old Professor Ákos Császár

22 May 2014

Lajos Szilassi
(University of Szeged, Hungary)

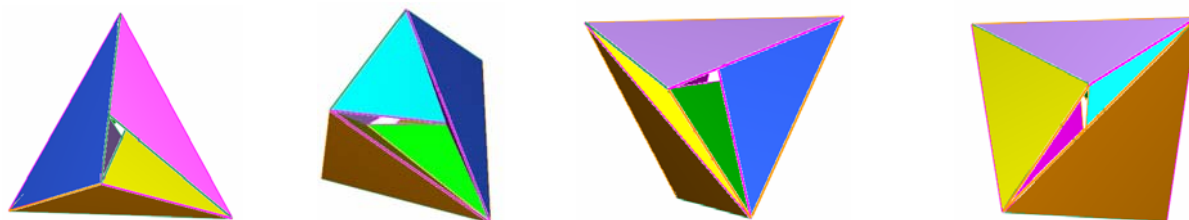
Abstract

There is a toroidal polyhedron, discovered in 1949, which has no diagonal, i.e. any two of its vertices are connected by an edge; it has become known as the *Császár polyhedron* [1].

Here we present four distinct visually different, but combinatorially equivalent, versions of the Császár polyhedron [2].

We investigate whether this polyhedral body can be decomposed into disjoint tetrahedra such that the vertices of these tetrahedra coincide with the Császár polyhedron. Besides, we present examples of polyhedra which have no such decomposition. We also answer the non-trivial question whether there exists a toroidal polyhedron such that all its diagonals are either contained, or not contained, by the polyhedral body.

Finally, we mention that starting from the Császár polyhedron, how we succeeded to discover the combinatorial dual of this polyhedron.



References:

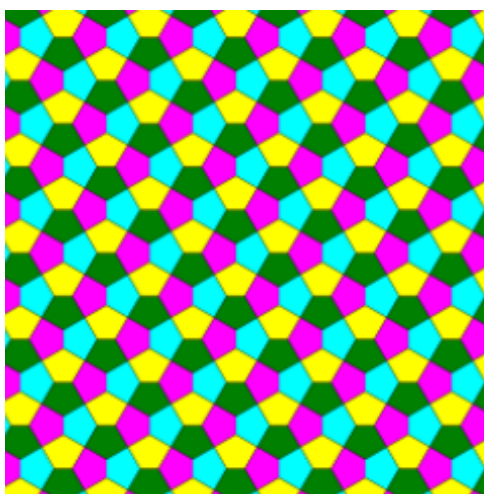
- [1] CSÁSZÁR, Á., A polyhedron without diagonals, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **13**, (1949-50), 140–142.
- [2] BOKOWSKI, J. G., *Computational Oriented Matroids*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Chapters 2.1-2.2, pp. 218–226.

A kairói parketta és egy ehhez kapcsolódó térgeometriai probléma

David McCooley
Normandy Park , Washington, USA
dmccooey@mac.com

Szilassi Lajos
SZTE Szeged
szilassi@jgypk.u-szeged.hu

Kairói parketta néven ismert a síknak egy ötszögekből álló parketta mintája. Nevét onnan kapta, hogy ez a periodikus parkettázás éppúgy megtalálható Kairó utcakövein, mint másutt, az iszlám díszítőművészetben.



Ezzel kapcsolatban az alábbi kérdések vethetők fel:

- Lehet-e ezzel a parkettával lokálisan azonos kombinatorikus szerkezetű, többkevesebb ötszögű tartományból álló térképet rajzolnunk a tóruszra? Ha igen, mennyi lehet e térkép tartományainak a száma?
- E térképek közül megadott számú ötszögtartományhoz tartozhatnak-e egymással nem izomorf térképek?
- Az ötszögtartományok valamely megengedett számához tartozhatnak-e egymással nem izomorf térképek?
- Vajon létezik-e olyan tórusz-szerű közönséges poliéder¹, amelynek a kombinatorikus szerkezete megegyezik a kairói parketta szerkezetével?

E kérdések egy részére 2011-ben sikerült választ adnunk. Ezek megadása mellett felvetünk néhány további nyitott kérdést.

http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo8_1.html
<http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo16A.html>
<http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo16B1.html>
<http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo16C1.html>

¹ A keresett poliéderektől nem csak azt várjuk el, hogy sem a lapjai, sem maga a poliéder felület ne legyen önátmetsző, hanem azt is, hogy ne legyenek a poliédernek átvéló lapjai: azaz bármely két lapjának legfeljebb két közös csúcsa lehet, és ha van két közös csúcsa, akkor van közös éle is.

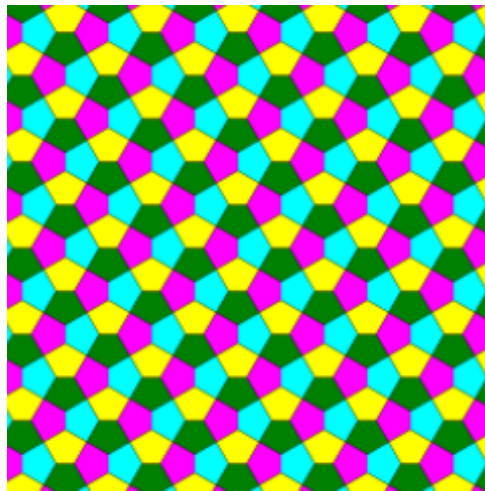
The Cairo tiling

and a Related Problem in Spatial Geometry

David McCooley
Normandy Park , Washington, USA
dmccooey@mac.com

Lajos Szilassi
University of Szeged
szilassi@jgypk.u-szeged.hu

One of the pentagonal tilings of the plane is known as the *Cairo tiling*. This name refers to the fact that this kind of periodic tiling can be found on the street pavements of Cairo, as well as in the Islamic ornamental art.



Regarding this pattern, the following questions can be asked:

- Is it possible to draw a pentagonal map on the torus such that its combinatorial structure is locally identical with that of the Cairo tiling? If yes, how many regions can be in the map?
- Do maps, not isomorphic to each other, belong to given number of pentagonal regions from among these maps.
- For a given admissible number of regions, are there combinatorially distinct maps?
- Does any regular polyhedron² exist with torus-like structure, the combinatoric structure of which is the same as that of the Parquet of Cairo?
- Is there a regular polyhedron, topologically equivalent to a torus, such that its combinatorial structure is locally the same as that of the Cairo tiling?

We were able to answer certain questions in 2011. In addition to presenting these solutions, we also mention some open problems.

http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo8_1.html

<http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo16A.html>

<http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo16B1.html>

<http://homepage.mac.com/dmccooey/polyhedra/Cairo16C1.html>

². We require that these polyhedra have neither its faces nor the surface self-intersection, no overarching faces (by this latter condition we mean that any two faces of the polyhedron can have at most two vertices in common, and faces with two common vertices have also an edge in common).