

A sztereológia és alkalmazásai

Matematika BSc szakdolgozat

Készítette: Szűcs Sándor, *Témavezető:* Dr. Ódor Tibor, Geometria Tanszék

2018. május 16.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI INTÉZET

Kivonat

Bemutatjuk a sztereológia legalapvetőbb koncepcióit, módszereit.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Ódor Tibornak, aki hasznos tanácsaival, iránymutatásával, felém mutatott türelmével hatalmas segítséget nyújtott a szakdolgozatom elkészítéséhez, továbbá mindenkinek, aki valamilyen módon támogatott a munkám során.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Klasszikus sztereológia	5
2.1. Delesse ötlete	5
2.2. Rosiwal módszere	5
2.3. Glagolev és Thomson	5
2.4. Delesse elméletének precíz felépítése	6
2.5. Felszín és hosszúságbecslés	6
3. Modern sztereológia	8
3.1. Fubini és Cavalieri tételek	8
3.2. R.E. Miles és P.J. Davy térfogatbecslése	11
3.3. Terület-súlyozott becslés	11
3.4. A Cavalieri-becslés - szisztematikus mintavétel	12
3.5. Kerüljük ki!	12
3.6. A Cauchy formula felszínre	14
3.7. A Crofton formula síkgörbe hosszára	16
3.8. A Buffon-féle tűprobléma	16
3.9. Háromszög egyenlőtlenség	18
3.10. Összefoglalás	19
4. Nyilatkozat	20

1. Bevezetés

A szakdolgozatomban célja bemutatni a sztereológia alapvető ötleteit, módszereit, és lehetséges alkalmazásait, a teljesség igénye nélkül.

A sztereológia 3-dimenziós alakzatok térbeli viszonyait vizsgálja alacsonyabb dimenziós minták alapján. Hogyan lehet megbecsülni egy test térfogatát síkmet-szetei felhasználásával, vagy egy síkgörbe hosszát egy egyenessel való metszés-pontjainak segítségével? Hogyan lehet egy alakzat felszínét megbecsülni? Első-sorban ezekre a kérdésekre keressük a választ. Tehát az eredeti alakzat geometriai viszonyainak rekonstruálása nem célunk, hanem bizonyos paraméterekre szeret-nénk becslést adni.

A szakdolgozat a bevezetéstől eltekintve két részre osztható. Először a klasszi-kus sztereológia alapvető ötleteit, koncepcióit tárgyaljuk, ezeken keresztül a szte-reológia kialakulásába is betekintést nyerünk. Ezután a modern sztereológia alapvető eredményeit tárgyaljuk, rávilágítunk a bevezetésként ismerttetett mód-szerek korlátaira, és azok lehetséges feloldására.

Elöljáróban

Szükségünk lesz néhány fogalomra, magyarázatra.

1.1. Definíció. (*Becslések torzítatlansága*) Egy becslést torzítatlannak mondunk, ha várható értéke megegyezik azzal a paraméterrel, amelyiket becsül.

1.2. Definíció. (*Síkbeli egyenesek polárkoordinátás megadása*) Legyen $T \in \mathbb{R}^2$ egyenes, $\omega \in [0, \pi)$ és $p \in \mathbb{R}$, ekkor $T_{\omega,p} = \{(x, y) : x \cdot \cos(\omega) + y \cdot \sin(\omega) = p\}$.

1.3. Definíció. (*Síkok megadása a 3-dimenziós térben*) Egy $T \in \mathbb{R}^3$ sík pozícióját meghatározza ω egység normál vektora, és s origótól való távolsága. $T_{\omega,s} = \{u \in \mathbb{R}^3 : \langle u, \omega \rangle = s\}$. " $\langle, \rangle$ " skaláris szorzatot jelöl.

1.4. Tétel. Legyen $K(x, y)$ folytonosan differenciálható, $f(y)$ folytonos, kompakt tartójú függvény.

$$\frac{d}{dx} \int_x^\infty K(x, y) f(y) dy = \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} K(x, y) dy - K(x, x) f(x).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x+\Delta x}^\infty K(x+\Delta x, y) f(y) dy - \int_x^\infty K(x, y) f(y) dy}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x+\Delta x}^\infty (K(x+\Delta x, y) - K(x, y)) f(y) dy}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} K(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

□

2. Klasszikus sztereológia

Ebben a fejezetben a sztereológia alapötleteit tárgyaljuk, rövid történeti megjegyzésekkel.

2.1. Delesse ötlete

A 19. század elején, a kőzetek, ásványi anyagok belső szerkezetének vizsgálata mikroszkóppal történt. Ehhez a kőzetet el kellett vágni, csiszolni kellett.

A. E. Delesse francia geológus 1847-ben új ötlettel állt elő, miszerint a kőzet csiszolt, sík része reprezentatív lehet az egészre nézve.

2.1. Tétel. Jelölje V_V az egyik alkotóelem kőzetbeli térfogatának és a kőzet teljes térfogatának arányát, A_A pedig a síkmetszeten ugyanezen alkotóelemhez tartozó terület és a vizsgált síkmetszet teljes területének arányát.

$$V_V = A_A.$$

A vizsgált ásványi anyag térfogatát, az azt tartalmazó kőzet egy síkmetszetének segítségével állapítottuk meg. Statisztikailag minden síkmetszet egyenértékű, ha a kőzet "homogén".

Szükséges hangsúlyozni, hogy a síkmetszeten vizsgált átlagos terület segítségével a tényleges térfogatra csupán becslést kaphatunk.

2.2. Rosiwal módszere

Néhány évtizeddel később A. Rosiwal osztrák geológus egyszerűsítette, praktikusabbá tette Delesse módszerét.

Egymástól azonos távolságra lévő, párhuzamos egyenesekből álló rácsot helyezünk el a vizsgált síkmetszeten.

2.2. Tétel. Legyen L_L azon szakaszok hosszának, amelyek a síkmetszeten a vizsgált alkotófelett helyezkednek el és a szakaszok teljes hosszának aránya. Ekkor

$$A_A = L_L.$$

Ezek alapján L_L segítségével becslést kaphatunk A_A -ra, és így V_V -re is.

2.3. Glagolev és Thomson

Lássuk a két geológus ötletét, amelyek az eddigi módszereket gyakorlati felhasználás szempontjából még tovább egyszerűsíti.

Egyenletes eloszlással helyezünk el pontokat a vizsgált síkmetszeten. Azon pontok számának segítségével, amelyek a síkmetszeten a vizsgált terület felett helyezkednek el, közelíthetjük a terület nagyságát.

2.3. Tétel. Legyen P_P azon tesztpontok közelítő számának, amelyek a síkmetszeten a vizsgált terület felett helyezkednek el, és az összes tesztpont számának aránya. Ekkor

$$A_A = L_L = P_P.$$

2.4. Delesse elméletének precíz felépítése

Az alapötletek megismerése után hozzáláthatunk Delesse elméletének pontos kidolgozásához.

Tekintsük véletlenszerűen a kőzet egyes térbeli tartományait. Feltételezzük, hogy a vizsgált kőzet "térbelileg homogén", abban az értelemben, hogy annak két egybevágó tartománya ugyanazon statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik. Ha egy kőzet tökéletesen homogén, akkor az egybevágó tartományai pontosan ugyanazon alkotóelemekből állnak. Ekkor V_V a következőképpen fejezhető ki: vegyünk a vizsgált alkotóelem átlagos térfogatát az egyes tartományokban. V térfogatot jelent, E pedig a várható érték egy véletlenszerűen választott T tartomány esetén. C_T egy adott alkotóelemet jelöl T -ben.

$$V_V = \frac{E[V(C_T)]}{V(T)}.$$

V_V jól definiált, mivel feltettük, hogy a kőzet homogén, így ez a mennyiség nem függ attól, hogy melyik tartományt választottuk.

Hasonlóan járhatunk el A_A esetén is: vegyünk a vizsgált alkotóelem átlagos területét az egyes P síkmetszeteken. A területet jelent, C_P egy adott alkotóelem a síkmetszeten.

$$A_A = \frac{E[A(C_P)]}{A(P)}.$$

Az A_A és V_V paraméterek statisztikai szempontból leírják a kőzet átlagos összetételét. Azt, hogy $V_V = A_A$ a következőképpen bizonyíthatjuk:

Bizonyítás. A 3-dimenziós tér minden u pontja esetén legyen $I(u)$ indikátor véletlen változó, amely értéke 1, ha u a vizsgált alkotóelem által elfoglalt térrészbe esik, és 0, ha nem. Feltételezzük, hogy $E[I(u)] = p$ konstans. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy adott u pont a vizsgált alkotóelem által elfoglalt térrészbe esik, konstans és egyenlő p -vel.

Innen könnyen következik, hogy $V_V = p$, mivel a kőzet bármely térbeli régiója esetén a vizsgált alkotóelem által a régióban elfoglalt térfogat megegyezik az I függvény régió feletti integráljával. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy $A_A = p$, mert a vizsgált alkotóelem által a síkmetszeten elfoglalt terület egyenlő I -nek a síkmetszet feletti integráljával. Ezek alapján

$$V_V = A_A.$$

□

2.5. Felszín és hosszúságbecslés

Felszín és hosszúságbecslés esetén is hasonló koncepciókat tárgyalunk. Idevonatkozóan S.A. Saltykov és H. Chalkley nevét kell megemlítenünk, Saltykov metallográfiával foglalkozott, Chalkey pedig rákkutató volt. Két módszert mutatunk:

- Egy $\mathbb{R}^3$ -beli felület felszíne meghatározható a síkmetszeteiként kapott görbék hosszának segítségével. Jelölje S egy 3-dimenziós felület felszínét, S_V pedig az egységnyi térfogathoz tartozó felület felszínét. Legyen B a síkmetszeten kapott görbe hossza, B_A pedig a síkmetszeten egységnyi területre eső görbehossz. Ekkor

$$S_V = \frac{4}{\pi} B_A.$$

A síkmetszeten kapott görbe hosszára vonalrács segítségével adunk becslést. Jelölje I a görbe és a vonalrács metszéspontjainak számát, I_L az egységnyi hosszúságú tesztvonalra eső metszéspontok száma. Ekkor

$$S_V = 2I_L.$$

- Egy $\mathbb{R}^3$ -beli görbe hossza meghatározható síkmetszettekkel való metszéspontjainak számával. Egy 3-dimenziós görbe hosszát jelölje L , L_V pedig az egységnyi térfogathoz tartozó görbehosszt. A görbe egy síkmetszetén egységnyi területre tartozó metszéspontok száma Q_A , ekkor

$$L_V = 2Q_A.$$

Végezetül egy példa a fentebb bemutatott módszerek lehetséges felhasználására:

Egy biológiai membránt különböző kritériumok szerint "aktív" vagy "passzív" mondunk. Szeretnénk becslést adni azon membránok felszínére, amelyek aktívak, jelöljük ezt S_S -el. Az aktív membránokat M_A , az összes membránt M jelöli.

$$S_S = \frac{\mathbf{E}[S(M_A)]}{\mathbf{E}[S(M)]}.$$

Az aktív membránok várható felszíne, a membránok várható felszínéhez viszonyítva, egy adott referencia régióban. A megoldást a következő módon keressük:

$$S_S = \frac{S_V(M_A)}{S_V(M)}.$$

$S_V(M_A)$ -re és $S_V(M)$ -ra vonalrács segítségével adunk becslést: $S_V(M_A) = 2I_L(M_A)$ és $S_V(M) = 2I_L(M)$. Ebből következőleg

$$S_S = \frac{I_L(M_A)}{I_L(M)}.$$

3. Modern sztereológia

Az előző részben "homogenitást" feltételeztünk, és nem volt szó a bemutatott becslések torzítatlanságáról sem. Ebben a fejezetben olyan eszközöket mutatunk be, amelyek nem feltételezik a "homogenitást", vizsgáljuk a torzítatlanságot. A Fubini és annak egy korai speciális esetének tekinthető Cavalieri tételekkel kezdünk, ezután térfogatbecsléseket tárgyalunk, majd felszínre és hosszra vonatkozó integrálgeometriai formulákat mutatunk be. Ezután beszélünk a jól ismert Buffon-féle tűprobléma sztereológiai vonatkozásáról, és zárásként/érdekességként ismertetünk egy problémát, amely részletes vizsgálata nem fér bele a szakdolgozat kereteibe.

3.1. Fubini és Cavalieri tételek

A következő tételek alapvető fontosságúak a modern sztereológiában.

3.1. Tétel. Ha az $f(x, y)$ függvény integrálható a $T(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ téglalapon, akkor a $\underline{\varphi}(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $\overline{\varphi}(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $\underline{\psi}(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, $\overline{\psi}(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ függvények integrálhatók a $[c, d]$, illetve $[a, b]$ intervallumokon, és

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_c^d \underline{\varphi}(y) dy = \int_c^d \overline{\varphi}(y) dy = \int_a^b \underline{\psi}(x) dx = \int_a^b \overline{\psi}(x) dx.$$

Az aláhúzás, illetve felülvonás alsó, valamint felső integrált jelent. Az egyváltozós integrálokat a következőképpen értelmezzük: például az elsőnél rögzítünk egy tetszőleges $y \in [c, d]$ értéket, és a most már egyváltozós $F(x) = F_y(x) = f(x, y)$ függvénynek vesszük $[a, b]$ -n az alsó integrálját. Más-más y -ra az alsó integrál értéke is változhat, tehát az integrál értéke függvénye lesz y -nak, ezért a $\underline{\varphi}(y)$ jelölés. Korlátos függvénynek mindig létezik az alsó és felső integrálja, ezért a $\underline{\varphi}(y)$, $\overline{\varphi}(y)$, $\underline{\psi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$ függvények léteznek.

Bizonyítás. Csak a $\underline{\varphi}(y)$ függvényre bizonyítjuk az állítást, a többi esetben is hasonló az eljárás.

Legyen $\mathfrak{B}_x$ az $[a, b]$ és $\mathfrak{B}_y$ a $[c, d]$ intervallumnak egy-egy beosztása, azaz

$$\mathfrak{B}_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \mathfrak{B}_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d.$$

Az osztáspontokban húzzunk vízszintes, illetve függőleges egyeneseket, így a T téglalapnak egy $\mathfrak{B}$ beosztását kapjuk. Az $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $x_{j-1} \leq y \leq x_j$ egyenlőtlenségekkel meghatározott téglalapot T_{ij} -vel jelöljük, valamint legyen $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$.

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in T_{ij}} f(x, y), M_{ij} = \sup_{(x,y) \in T_{ij}} f(x, y).$$

Ekkor minden i -re fennáll, hogy

$$m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_j) dx \leq M_{ij}(x_i - x_{i-1}),$$

és összegezve

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \eta_j) dx = \int_a^b f(x, \eta_j) dx \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}(x_i - x_{i-1}).$$

Ebből $\underline{\phi}(y)$ definíciója alapján adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq \underline{\phi}(\eta_j) \leq \sum_{i=1}^n M_{ij}(x_i - x_{i-1}).$$

az egyenlőtlenséget megszorozzuk $(y_j - y_{j-1})$ -el, összegzünk j -re, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leq \sum_{j=1}^m \underline{\phi}(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \leq \\ &\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \end{aligned}$$

azaz

$$\underline{s}(f, \mathfrak{B}, T) \leq \sum_{j=1}^m \underline{\phi}(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) \leq \bar{s}(f, \mathfrak{B}, T).$$

Ebből pedig, felhasználva $f(x, y)$ T -n való integrálhatóságát, vagyis hogy

$$\underline{s}(f, \mathfrak{B}, T), \bar{s}(f, \mathfrak{B}, T) \longrightarrow \iint_T f(x, y) dx dy,$$

ha $|\mathfrak{B}| \longrightarrow 0$, következik, hogy $\underline{\phi}(y)$ Riemann-féle közelítő összegei, a közbülső helyek bármely választása esetén konvergálnak a kettősintegrálhoz, ha $|\mathfrak{B}_y| \longrightarrow 0$. $\square$

A most bizonyított tételből következik az alábbi:

3.2. Tétel. Ha $f(x, y)$ integrálható a $T(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ téglalapon, és bármely $x \in [a, b]$ és $y \in [c, d]$ értékekre léteznek a

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

integrálok, akkor a $\phi(y)$ és $\psi(x)$ függvények integrálhatók, és

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Innen, figyelembe véve, hogy ha $f(x, y)$ folytonos a zárt T téglalapon, akkor integrálható is T -n, valamint a fenti integrálok is léteznek, adódik a következő:

3.3. Tétel. (Fubini) Ha az $f(x, y)$ függvény folytonos a $T(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ téglalapon, akkor

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

A módszer nem csak téglalap esetén működik.

3.4. Tétel. Legyen $H \subset T$ egy egyenes szakaszokkal, és $y_1(x)$, $y_2(x)$ folytonos függvényekkel határolt halmaz, tehát H Jordan-mérhető, határa 0 mértékű. Tegyük fel, hogy $f(x, y)$ integrálható H -n. Nézzük a $T(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ téglalapon a következő függvényt: $f^*(x, y) = f(x, y)$, ha $(x, y) \in H$, és 0 különben. Ekkor

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Bizonyítás. Az $f^*(x, y)$ függvény definíciója és az integrál már ismert tulajdonságai alapján $f^*(x, y)$ integrálható T -n és

$$\iint_T f^*(x, y) dx dy = \iint_H f^*(x, y) dx dy + \iint_{T-H} f^*(x, y) dx dy = \iint_H f(x, y) dx dy.$$

Legyen $\underline{\psi}^*(x) = \int_c^d f^*(x, y) dy$. A 3.1 Tétel szerint ez integrálható, és

$$\int_a^b \underline{\psi}^*(x) dx = \iint_T f^*(x, y) dx dy.$$

Mivel

$$\underline{\psi}^*(x) = \int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

az eddigiek figyelembevételével következik, hogy

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Hasonlóan működik a dolog, ha a H egyenes szakaszokkal és $x_1(y)$, $x_2(y)$ folytonos függvényekkel határolt halmaz. Ekkor a következőképpen számolható ki a területi integrál:

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

□

A következő tételre tekinthetünk úgy, mint a Fubini-tétel egy korai, speciális esete.

3.5. Tétel. (Cavalieri) Ha két azonos magasságú test síkmetszetein a két test által ki-metszett területek nagysága rendre egyenlő, akkor a két testnek azonos a térfogata.

Vegyük észre, hogy a két tétel megalapozza azt, hogy síkmetszetek segítségével térfogatot számoljunk.

A továbbiakban térfogatbecslésre mutatunk néhány módszert.

3.2. R.E. Miles és P.J. Davy térfogatbecslése

Delesse feltételezte a vizsgált közet homogenitását, de ugyanezt számos más probléma esetén nem tehetjük meg. Az ötlet az, hogy a mintavétel legyen térben homogén.

Legyenek Y és Z rögzített testek, $Y \subset Z$. T_u az u magasságban lévő vízszintes síkot jelöli. Feltételezzük, hogy Z a T_0 és T_s síkok között helyezkedik el. Ekkor Y térfogata a következőképpen fejezhető ki:

$$V(Y) = \int_0^s A(Y \cap T_u) du.$$

3.6. Tétel. (Miles és Davy becslése) Válasszunk véletlenszerűen egy T_u síkmetszetet. Legyen u egy egyenletes eloszlású véletlen változó a $[0, s]$ intervallumon. U sűrűségfüggvénye $f_U = \frac{1}{s}$, ha $0 \leq u \leq s$ és 0 minden más esetben. Legyen $T = T_U$, ekkor

$$E(sA(Y \cap T)) = V(Y).$$

Bizonyítás. Nézzük $A(Y \cap T)$ várható értékét:

$$E(A(Y \cap T)) = \int_0^s A(Y \cap T_u) f_U(u) du = \frac{1}{s} V(Y),$$

s -el szorzás után kapjuk a fenti formulát. □

Innen az is látszik, hogy $sA(Y \cap T)$ torzítatlan becslés $V(Y)$ -ra.

3.3. Terület-súlyozott becslés

Tegyük fel, hogy egy inhomogén biológiai szervben szeretnénk térfogatbecslést végezni, véletlenszerűen választott minta alapján (síkmetszet, mikroszkóp kép...). A szervet Z , a szerveben a vizsgált régiót Y , a mintát T jelöli. Ekkor Delesse módszere alapján a következőképpen becsülhetnénk:

$$V_V = \frac{V(Y)}{V(Z)} = \frac{A(Y \cap T)}{A(Z \cap T)} = A_A.$$

3.7. Tétel. Deless módszerének analógja véletlen minta esetén a következő:

$$E\left[\frac{A(Y \cap T)}{A(Z \cap T)}\right] = \frac{V(Y)}{V(Z)},$$

ahol $T = T_U$, az

$$f_U(u) = \frac{A(Z \cap T_u)}{V(Z)}$$

sűrűségfüggvénnyel. A nevező $V(Z)$ a normalizáló konstans, ez biztosítja, hogy f_U integrálja 1 legyen.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\frac{A(Y \cap T)}{A(Z \cap T)}\right] &= \int \frac{A(Y \cap T_u)}{A(Z \cap T_u)} f_U(u) du = \\ &= \int \frac{A(Y \cap T_u)}{A(Z \cap T_u)} \frac{A(Z \cap T_u)}{V(Z)} du = \frac{1}{V(Z)} \int A(Y \cap T_u) du = \\ &= \frac{V(Y)}{V(Z)}. \end{aligned}$$

□

3.4. A Cavalieri-becslés - szisztematikus mintavétel

Itt gondoljuk arra az esetre, ha például egy szerv, vagy tumor térfogatára szeretnénk becslést adni.

3.8. Definíció. Tekintsük egy 3-dimenziós test egymástól konstans $s > 0$ távolságra lévő vízszintes síkmetszeteit: $T = \{T_{U+ks} : k \in \mathbb{Z}\}$. T_U a "kiinduló", T_u az u magasságban lévő síkot jelöli, $T_{(k)} = T_{U+ks}$ a k -adik sík. A síkok pozíciója meghatározott U -által, amelyet véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választunk a $[0, s)$ intervallumból. Ekkor az Y test térfogatát a következőképpen becsülhetjük:

$$\hat{V}(Y) = s \sum_k A(Y \cap T_{(k)}).$$

3.9. Tétel. A Cavalieri becslés torzítatlan.

Bizonyítás. Alkalmas randomizáció esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{V}(Y)] &= s \mathbf{E}\left[\sum_k A(Y \cap T_{(k)})\right] = s \int_0^s \sum_k A(Y \cap T_{(u+ks)}) \frac{1}{s} du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k A(Y \cap T_v) dv = V(Y), \end{aligned}$$

azaz $s \sum_k A(Y \cap T_{(k)})$ torzítatlan becslés $V(Y)$ -ra.

□

3.5. Kerüljük ki!

Mi történik abban az esetben, ha egy olyan test térfogatát szeretnénk becsülni, amelyben van olyan régió, amit a síkmetszetek el kell kerüljenek? Erre mutatunk most egy számolást. Az egyszerűség kedvéért az elkerülendő régió egy egység-gömb lesz. Az origó az egységgömb középpontja.

Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, kompakt tartójú függvény. Ebből már az is következik, hogy korlátos is.

$$Rf(\omega, p) = \int_{\langle x, \omega \rangle = p} f(x) dx,$$

ahol dx Lebesgue mérték az $\langle x, \omega \rangle = p$ síkon.

$$Hf(\omega, p) = \int_{\langle x, \omega \rangle \geq p} f(x) dx,$$

itt dx Lebesgue mérték $\mathbb{R}^3$ -ön. A Fubini tételből következik, hogy

$$\int_{\langle x, \omega \rangle \geq p} f(x) dx = \int_p^\infty Rf(\omega, q) dq,$$

ahol dq Lebesgue mérték az egyenesen.

$$\int_{\mathbb{S}^2} Hf(\omega, r) d\omega = \int_{|x| \geq r} \chi(|x|, r) f(x) dx.$$

Megfelelő χ súlyfüggvényt akarunk keresni, ehhez nézzük a következőt: Egy x -ből vett gömbsapka r sugarú gömb esetén azon $r\omega$ -ák halmaza, amelyek esetén $Hf(\omega, r)$ tartalmazza x -et.

A gömbsapka egy speciális gömböv, ahol az azt kimetsző két párhuzamos sík közül az egyik pontosan egy pontban érinti a gömböt. A két sík távolságát h jelöli, és ekkor a gömböv felszíne $2rh\pi$. Ez a formula adja speciális esetben a gömbsapka felszínét is.

Most ki szeretnénk fejezni h -t $|x| = t$ és r segítségével. Nézzünk egy az origóra és x -re illeszkedő síkmetszetet, ezen egy derékszögű háromszöget látunk. Oldalai az r sugarú körhöz húzott érintő x -ből, a kör egy sugara ebbe a pontba, és az origóból x -be tartó szakasz. Ez utóbbira esik h is. Az origónál lévő szög α . Ezek után h a következőképpen fejezhető ki:

$$r - h = r \cos \alpha = r \frac{r}{t} = \frac{r^2}{t},$$

innen

$$h = r - \frac{r^2}{t}.$$

Ezek után a gömbsapka felszíne

$$2rh\pi = 2r^2\left(1 - \frac{r}{t}\right)\pi,$$

mivel az egységgömbön dolgozunk, ezt osztani kell r^2 -el, és így a keresett függvény $\chi(t, r) = 2\left(1 - \frac{r}{t}\right)$. Legyen

$$Mf(u) = \int_{\mathbb{S}^2} f(u\omega) d\omega = \frac{1}{u^2} \int_{u\mathbb{S}^2} f(\sigma) d\sigma,$$

ahol $d\sigma$ felszínmérték az $u\mathbb{S}^2$ gömbfelületen.

$$\int_{\mathbb{S}^2} Hf(\omega, r) d\omega = \int_{|x| \geq r} \chi(|x|, r) f(x) dx =$$

$$\int_r^\infty t^2 \chi(t, r) \left(\int_{\mathbf{S}^2} f(t\omega) d\omega \right) dt =$$

$$\int_r^\infty t^2 \chi(t, r) Mf(t) dt = \int_{t \geq r} \left(1 - \frac{r}{t}\right) t^2 Mf(t) dt.$$

Ezek után az 1.4. Tétel felhasználásával

$$\frac{d}{dr} \int_{t \geq r} \left(1 - \frac{r}{t}\right) t^2 Mf(t) dt = -r^2 Mf(r) -$$

$$\int_{t \geq r} t Mf(t) dt + r^2 Mf(r) = - \int_{t \geq r} t Mf(t) dt.$$

$$\frac{d}{dr} \int_r^\infty t Mf(t) dt = -r Mf(r).$$

Ismert

$$r Mf(r) = \frac{d^2}{dr^2} \int_{\mathbf{S}^2} Hf(\omega, r) d\omega,$$

ezért

$$\int_{r \geq 1} r^2 Mf(r) dr = c \int_{r \geq 1} f(x) dx,$$

ahol dr Lebesgue mérték $\mathbb{R}$ -en, dx pedig $\mathbb{R}^3$ -ön, c konstans. Folytatva:

$$c \int_{r \geq 1} f(x) dx = \int_1^\infty r \frac{d^2}{dr^2} \int_{\mathbf{S}^2} Hf(\omega, r) d\omega dr =$$

$$\int_1^\infty r \frac{d^2}{dr^2} \int_{\mathbf{S}^2} \left(\int_r^\infty Rf(\omega, p) dp \right) d\omega dr = \int_1^\infty r \frac{d}{dr} \int_{\mathbf{S}^2} \frac{d}{dr} \left(\int_r^\infty Rf(\omega, p) dp \right) d\omega dr =$$

$$\int_1^\infty r \frac{d}{dr} \left(\int_{\mathbf{S}^2} Rf(\omega, r) d\omega \right) dr = - \int_{\mathbf{S}^2} Rf(\omega, 1) d\omega - \int_1^\infty \int_{\mathbf{S}^2} Rf(\omega, r) d\omega dr.$$

Néhány mérés alapján kiszámítható az integrál, innentől mondhatjuk, hogy ez sztereológia.

A következőkben a sztereológiában is felhasználható integrálgeometriai formulákat ismertetünk.

3.6. A Cauchy formula felszínre

3.10. Lemma. S^2 a 3-dimenziós egységgömb határát jelöli, $\omega_2 = \pi$ az egységkör területe. Legyen $v \in S^2$,

$$\int_{S^2} | \langle u, v \rangle | du = 2\omega_2.$$

Bizonyítás. $\mathbf{S}^2$ -et kisebb A_i régiókra bontjuk, ezek felszíne $A(A_i)$, $u_i \in A_i$, bármely i -re. $\tilde{A}_i$ az A_i merőleges vetülete az u_i pontbeli érintősíkon. $\tilde{A}_i|v^\perp$ jelöli az $\tilde{A}_i$ merőleges vetületét a $v^\perp$ -vel jelölt v -re merőleges érintősíkon, itt a vetület az egységkörbe esik. Mivel $\tilde{A}_i$ egy u_i normálvektorú síkon fekszik, ezért

$$A(\tilde{A}_i|v^\perp) = |\langle u, v \rangle| A(\tilde{A}_i).$$

Ha A_i "kellően kicsi", akkor $A(A_i) \approx A(\tilde{A}_i)$ és $A(A_i|v^\perp) \approx A(\tilde{A}_i|v^\perp)$, valamint

$$\int_{\mathbf{S}^2} |\langle u, v \rangle| du \approx \sum_i A(A_i|v^\perp).$$

Az $\{A_i|v^\perp\}$ halmaz az egységkört kétszer fedi le, a v és $-v$ irányból való vetítések miatt, így

$$\int_{\mathbf{S}^2} |\langle u, v \rangle| du \approx 2\omega_2,$$

ahol a közelítés egyenlőségbe konvergál, ha $\max\{A(A_i)\} \rightarrow 0$. □

3.11. Tétel. (Cauchy formula) Legyen $K \in \mathbb{R}^3$ konvex test,

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{S}^2} A(K|u^\perp) du = A(K).$$

Bizonyítás. Legyen P kompakt, konvex politóp, az oldalakhoz tartozó egység normálvektorok $v_1, v_2, \dots, v_m$, és területek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Ha P egy P_i oldalának normálvektora v_i , akkor

$$A(P_i|u^\perp) = \alpha_i |\langle u, v_i \rangle|,$$

ahol $u \in \mathbf{S}^2$. Összegzünk i -szerint,

$$A(P|u^\perp) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i |\langle u, v_i \rangle|,$$

mivel minden pont esetén 2-szer számoltunk.

$$\int_{\mathbf{S}^2} A(P|u^\perp) du = \int_{\mathbf{S}^2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i |\langle u, v_i \rangle| du.$$

Felhasználva az előző lemmát,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{1}{2} \int_{\mathbf{S}^2} |\langle u, v_i \rangle| du = \sum_{i=1}^m \alpha_i \omega_2 = \omega_2 A(P).$$

A kívánt alakot $\frac{1}{\omega_2}$ -vel való szorzással kapjuk. Mivel a tétel bármely P konvex politópra igaz, az egyenlőség bármely K konvex testre teljesül a folytonosság miatt. □

3.7. A Crofton formula síkgörbe hosszára

3.12. Tétel. Legyen C rektifikálható görbe, $T_{\omega,p}$ polárkoordinátákkal megadott egyenes a síkon. N számláló függvényt, L ívhosszt jelöl. Ekkor

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N(C \cap T_{\omega,p}) dp d\omega = L(C).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során feltételezzük, hogy C s_i szakaszokból álló poligonális görbe, az s_i szakaszok hosszát l_i jelöli, $i = 1, 2, \dots, n$. Legyen $I(s_i \cap T_{\omega,p}) = 1$, ha $T_{\omega,p}$ metszi s_i -t, 0 különben. Ekkor

$$N(C \cap T_{\omega,p}) = \sum_{i=1}^n I(s_i \cap T_{\omega,p}).$$

Rögzített ω estén azon p értékek, amelyek esetén $T_{\omega,p}$ metszi s_i -t, egyenlő s_i egy ω irányú egyenesen vett merőleges vetületének hosszával:

$$\int_{-\infty}^\infty N(s_i \cap T_{\omega,p}) dp = 2l_i |\cos(\omega - \alpha)|,$$

ahol α s_i x tengellyel bezárt szöge. Integrálva ω szerint

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N(s_i \cap T_{\omega,p}) dp d\omega = l_i \int_0^\pi |\cos(\omega - \alpha)| d\omega = 2l_i,$$

α -tól függetlenül. Összegezve i szerint

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N(C \cap T_{\omega,p}) dp d\omega = \sum_{i=1}^n 2l_i = 2L(C).$$

Innen $\frac{1}{2}$ -el szorzással kapjuk a kívánt alakot. Általános esetre az eredményt úgy kapjuk, hogy közelítjük a görbét. $\square$

A következőkben megismerjük a Buffon-féle tűprobléma sztereológiai jelentőségét, és mutatunk egy érdekes bizonyítást a háromszög egyenlőtlenségre.

3.8. A Buffon-féle tűprobléma

A feladat azért is érdekes, mert láthatjuk, hogy π értékét empirikus módon is meg lehet határozni, valamint rámutatunk, hogy ez a feladat a sztereológia korai előfutárának is tekinthető.

Buffon tűproblémája: Ledobunk a padlóra egy l hosszú tűt. A padló mintázata párhuzamos egyenesekből áll, a szomszédos egyenesek távolsága d , $l \leq d$. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Lássunk egy megoldást: Jelölje x a tű középpontjának, és a tőle balra lévő, hozzá legközelebbi egyenes távolságát. Legyen Φ a tű függőlegessel bezárt szöge. A tű akkor metszi a baloldali egyenest, ha $0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \Phi$, a jobboldalit pedig akkor, ha

$0 \leq d - x \leq \frac{l}{2} \sin \Phi$. Amennyiben x egyenletes eloszlású $[0, d]$ -n, és Φ egyenletes eloszlású $[0, \pi]$ -n, akkor a kísérlet egy pont $[0, d] \times [0, \pi]$ téglalapról egyenletes eloszlás szerinti választásának feleltethető meg. A kedvező területrészt területe

$$2 \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \Phi d\Phi = 2l,$$

tehát a keresett valószínűség

$$p = \frac{2l}{d\pi}.$$

És egy másikat: Ejtsünk le egy tetszőleges l hosszú tűt, és nézzük a metszéspontok számának várható értékét, ezt a tű hosszának függvénye:

$$E(l) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots,$$

ahol p_i annak a valószínűsége, hogy a tű pontosan i vonalat fog metszeni. A keresett valószínűség az, hogy a tű legalább egy vonalat metszeni fog, így $p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$. Ha túl rövid a tű, akkor $p_i = 0$ $i \geq 2$ esetén, ezért $E(l) = p_1 = p$. A várható érték homogenitásából az következik, hogy

$$E(l) = E(l \cdot 1) = lE(1).$$

Ezek szerint elég azt meghatározni, mennyi a metszéspontok számának várható értéke egységnyi hosszú tű esetén.

Most vegyünk d átmérőjű, kör alakú tűt, ennek hossza $d\pi$. Ha ezt leejtjük, mindig két metszéspontja lesz a vonalakkal. Írjunk a körbe és köré is egy-egy m oldalú sokszöget. k_m a beírt sokszög kerülete. A várható érték linearitása miatt a beírt sokszög vonalakkal való metszéspontjainak számának várható értéke $k_mE(1) \leq 2$. A köré írt sokszög kerülete K_m , és az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy $2 \leq K_mE(1)$. Mivel

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = \lim_{m \rightarrow \infty} K_m = d\pi,$$

ezért

$$d\pi E(1) \leq 2 \leq d\pi E(1).$$

Ebből $E(1) = \frac{2 \cdot 1}{d\pi}$. Mivel $E(l) = lE(1) = p$, most is a már ismert megoldást kapjuk:

$$p = \frac{2l}{d\pi}.$$

Egy másik nézőpont: Ismételjük meg a kísérletet, azaz dobjuk le a tűt többször, így a fenti valószínűséget tapasztalati úton közelíthetjük. Ennek, és d -nek ismeretében becslést adhatunk a tű hosszára.

Hogy a feladat sztereológiai jelentőségére jobban rámutassunk, csak ismeretetés szinten nézzük meg a Steinhaus becslést, amely a Buffon tűproblémájában gyökerezik:

Tű helyett egy síkgörbét nézzünk, és erre "dobjuk rá" a vonalrácsot. A vonalakat (θ, p) polárkoordinátákkal adhatjuk meg, ezt felhasználva $T_{\theta, u+mh}$, ahol h a vonalak közötti távolság, m egész szám, u a rács origótól való távolsága.

Ha θ és u véletlenszerű, akkor a rács pozícióját a következőképpen írhatjuk le:

$$T = \{T_{\Theta, U+mh} : m \in \mathbb{Z}\},$$

ahol $\Theta \sim U([0, \pi))$ és $U \sim U([0, d])$ véletlen változók. Legyen Y rektifikálható görbe a síkon, ekkor

$$L(Y) = \frac{\pi}{2} h \sum_m N(Y \cap T_m),$$

ahol $T_m = T_{\Theta, U+mh}$, N számlálófüggvény.

3.9. Háromszög egyenlőtlenség

A háromszög egyenlőtlenség néven ismert tétel "standard" bizonyítása a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségen alapszik. Ehelyett egy érdekes, várható értékeken alapuló, valamilyen értelemben sztereológiai vonatkozású bizonyítást mutatunk.

3.13. Tétel. Egy Euklideszi normával ellátott n -dimenziós tér bármely X, Y vektora esetén teljesül, hogy

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Bizonyítás. Az egydimenziós változat, amelyet felhasználunk később, abszolút értékekre és x, y valós számokra, azt mondja, hogy

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Legyen $V \in \mathbb{R}^n$ vektor, U pedig egységvektor. V és U skaláris szorzatának várható értékét nézzük:

$$\mathbf{E}_{\|U\|=1}[\|U \cdot V\|] = \mathbf{E}_{\|U\|=1}[\|(U \cdot (\frac{V}{\|V\|}))\| \|V\|] =$$

$$\|V\| \mathbf{E}_{\|U\|=1}[\|U \cdot (1, 0, 0, \dots, 0)\|] = c \|V\|,$$

ahol c egy nemzérő konstans, a bizonyításban csak ez számít.

$$\|X\| + \|Y\| - \|X + Y\| = \frac{1}{c} \mathbf{E}_{\|U\|=1}[\|U \cdot X\| + \|U \cdot Y\| - \|U \cdot (X + Y)\|] \geq$$

$$\frac{1}{c} \mathbf{E}_{\|U\|=1}[\|U \cdot X + U \cdot Y\| - \|U \cdot (X + Y)\|] =$$

$$\frac{1}{c} \mathbf{E}_{\|U\|=1}[\|U \cdot (X + Y)\| - \|U \cdot (X + Y)\|] =$$

$$\frac{1}{c} \mathbf{E}_{\|U\|=1}[0] = 0.$$

□

3.10. Összefoglalás

Foglaljuk össze, miről volt szó eddig. A bevezetesként ismertetett módszerek és példák rávilágítottak a sztereológia kialakulására, céljaira. A kezdeti ötletek kapcsán több probléma is felmerült. Nem volt szó a becslések torzítatlanságáról, és a Delesse által feltételezett homogenitás sem áll fent sok esetben.

A modern sztereológia módszereit megalapozó Fubini és Cavalieri tételek megismerése után a fentebb említett problémákat áthidaló módszereket mutatunk térfogatbecslésre, ezekben közös, hogy síkmetszetek segítségével dolgoztunk, de amint láttuk, ennek is vannak korlátai. Mit tehetünk, ha van olyan régió a testben, amelyet el kell kerülnen a síkmetszetek? Mutattunk egy lehetséges megoldást arra az esetre, ha egy gömböt kell elkerülni.

Ezek után a sztereológiában is alkalmazható integrálgeometriai formulákat ismertettünk. A Cauchy formulát konvex test felszínének kiszámítására, és a Crofton formulát síkgörbe hosszára. A sztereológiának erős integrálgeometriai gyökerei is vannak.

Következett Buffon jól ismert tűproblémája, most már nem nehéz végiggondolni, hogy ez a feladat alapfeladatának tekinthető a sztochasztikus geometriának, és előfutára a sztereológiának is.

Végezetül a háromszög egyenlőtlenség egy érdekes, sztereológiai kötődésű bizonyítását ismertettük.

Zárásként és érdekességgként bemutatunk egy problémát, amely vizsgálata nem fért bele jelen szakdolgozat kereteibe:

Meg tudjuk-e becsülni egy tárgy térfogatát/felszínét "ránézésre"? Tegyük fel, hogy bármelyik irányból láthatjuk. Az emberi szem helyett egy gömböt tekintünk, és ennek felületén a tárgy vetületét. Fel tudjuk-e mérni a tárgy térfogatát/felszínét néhány pillanattal, a vetületek területének ismeretében? És ha a területüket nézzük?

4. Nyilatkozat

Alulírott Szűcs Sándor kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat(szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szűcs Sándor

Hivatkozások

- [1] Adrian Baddeley, Eva B. Vedel Jensen. Stereology for Statisticians. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 2005.
- [2] Daniel A. Klain, Gian-Carlo Rota. Introduction to Geometric Probability. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] Peter M. Gruber, Jörg M. Wills. Convexity and Its Applications. Springer Basel AG, 1983.
- [4] L. A. Santaló. Introduction to Integral Geometry. Hermann & C^{ie}, Paris, 1953.
- [5] Leindler László. Analízis. Polygon jegyzet, Szeged, 2001.
- [6] Mehtaab Sawhney. An Unusual Proof of the Triangle Inequality, Page 218. The College Mathematics Journal Volume 49, 2018 - Issue 3.
- [7] Balka Richárd, Egri-Nagy Attila, Juhász Tibor. Matematikatörténet problémákon keresztül. Educatio Kht., Kempelen Farkas Hallgatói Információs Központ, 2011.