

*Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet*

Fraktálok és iterált függvényrendszerek

**Fractals and iterated
functions' systems**

Szakdolgozat

Gehér Péter

Matematika BSc

Témavezető:

Dr. Kincses János egyetemi docens
Geometria Tanszék

Szeged, 2018

Tartalom

Köszönetnyilvánítás.	3
Előszó.	4
1. Bevezető.	5
2. A Cantor-halmaz.	6
3. A Sierpinski-háromszög.	9
4. A Sierpinski-szőnyeg.	12
5. A Menger-szivacs.	14
6. A Koch-görbe és a Koch-féle pehely.	16
7. Iterált függvényrendszerek.	19
7.1 Alapfogalmak: iterált függvényrendszerek.	19
7.2 Fraktálok iterálása függvényrendszerekkel.	20
8. Hasonlósági dimenzió.	25
9. A doboz-dimenzió.	28
9.1 Alapfogalmak: doboz-dimenzió.	28
9.2 Numerikus módszer.	29
Hivatkozások.	32
A. Melléklet.	33
Nyilatkozat.	42

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom elsősorban Dr. Kincses Jánosnak és Dr. Karsai Jánosnak segítségükért, türelmükért és bátorításukért, amellyel támogattak a szakdolgozat elkészítésének időszakában. Továbbá köszönöm a családomnak és barátaimnak, akik mellettem álltak, és mindenkinek, aki hozzájárult, hogy megszülessen ezen munka.

Előszó

Szakedolgozatom témája a fraktálok, azon belül pedig az iterált függvényrendszerek és a fraktál-dimenziók bemutatása, amelyben a Wolfram *Mathematica* program segített a legtöbbet.

Először Dr. Vajda Róbert tanár úrnál találkoztam a programmal, Bevezetés a numerikus matematikába tantárgy keretében. Később Dr. Karsai János tanár úrnál a Számítógéppel segített matematikai modellezés tantárgy keretében kiselőadást is készítettem a programmal. Az előadás elkészítése közben ismerkedtem meg komolyabban a szakedolgozatom alapját képező fraktálokkal.

Az egész szakedolgozat Mathematicában készült, a program stílusát követve. Az ábrákat és grafikonokat programkódokkal generáltam. A legtöbbet a Számítógéppel segített matematikai modellezés órán gyűjtött tapasztalatok segítettek. A téma elméleti hátterét főként az [1] és [2] könyvekből szereztem.

1. Bevezető

A matematikában a fraktál egy végtelenül komplex geometriai alakzat, ami használható természetes alakzatok leírására és szimulálására, mint például a pagoda karfiol vagy a páfrány levél. A fraktálok mindenütt előfordulnak a természetben. A fizika, kémia, biológia, a kozmológia, a pszichiátria, és még sok más tudományág képes hasznosítani a fraktálokat, mint például az anyagi részecskék hőmozgása, a halmazállapot-változások, a kromoszómák DNS-láncaiból hiányzó génrészletek jellemzése.

A fraktálok legjellemzőbb tulajdonsága az ön hasonlóság, mi itt csak és kizárólag szigorúan ön hasonlók alakzatokkal fogunk foglalkozni. Az ön hasonlóság alatt azt értjük, hogy a fraktál egy kis részlete hasonló az egészhez. Például látni fogjuk hogy a Cantor-halmaz fele hasonló az egészhez, de a negyede is hasonló az egészhez és így tovább. Ez az ön hasonlóság sok furcsa tulajdonsághoz vezet, mint az hogy a Sierpinski-háromszög területe nulla miközben a kerülete végtelen. Sok más érdekes kérdés is felmerül ezekkel az alakzatokkal kapcsolatban, például hogy hány dimenziósak is ezek a fraktálok. Természetesen azt várnánk hogy egy alakzat a síkban, ami nem szimplán egy egyenes vagy vonal az két dimenziós de látni fogjuk hogy ez a kérdés nem is olyan egyszerű.

Érdekes játék a fraktálképek aló állítása, ami a mai számítógépekkel nem olyan nehéz feladat. Megvalósíthatunk egy rekurzív eljárást vagy használhatunk iterált függvényrendszereket is erre a célra. Persze ezekkel az eljárásokkal csak egy közelítő képet fogunk kapni. A teljes fraktált sosem fogjuk tudni legenerálni hiszen végtelenül komplex.

A fraktál (angol: fractal) szót először Benoit Mandelbrot használta 1975-ben. Az elnevezés a latin fractus szóból jött létre, aminek a jelentése törött, repedezett.

A fraktálok pontos definíciójáról a mai napig nincs megegyezés.

2. A Cantor Halmaz

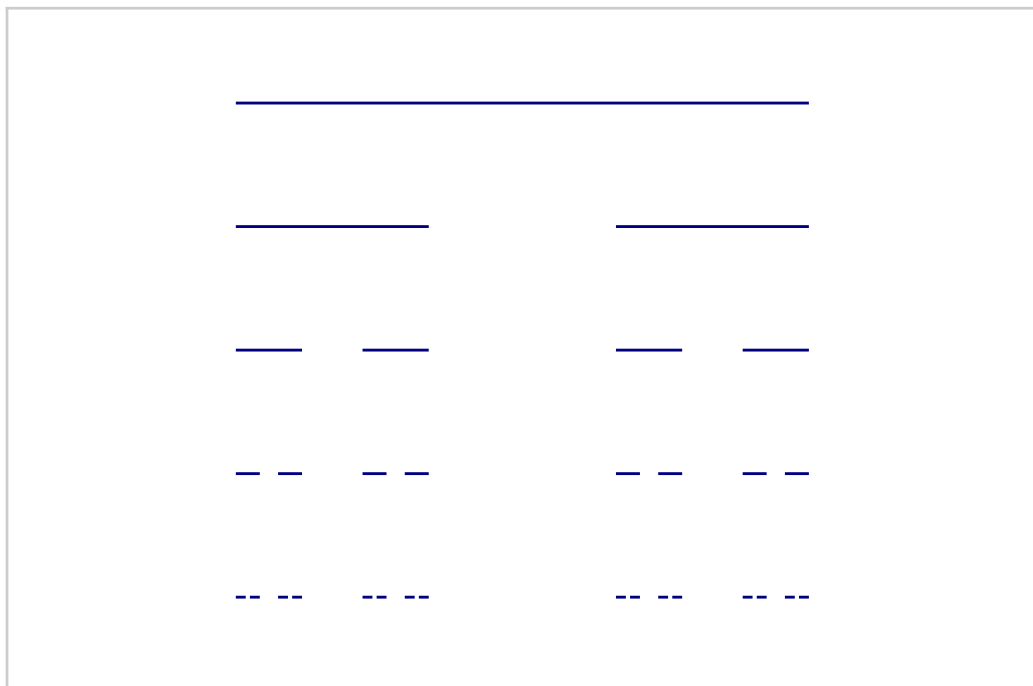
A legkönnyebben megkonstruálható fraktál a Cantor-halmaz. Induljunk ki a $[0,1]$ zárt intervallumból. Először osszuk három egyenlő részre és hagyjuk el a középső nyílt részt: $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. A második lépésben osszuk három egyenlő részre mindkét megmaradó intervallumot és hagyjuk el a középső nyílt részeit: $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Ezt az eljárást folytatjuk a végtelenig, ahol az n -edik lépés után:

$$C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right), \text{ ha } n \geq 1 \text{ és } C_0 = [0, 1].$$

A Cantor-halmaz azokból a pontokból áll a $[0,1]$ intervallumban, amiket nem hagytunk el ebben a végtelen lépésben. Azaz:

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Az első négy lépés illusztrációja:



Figyeljük meg, hogy a C_n halmaz 2^n darab, egyenként 3^{-n} hosszúságú zárt intervallumból áll.

Mivel a Cantor-halmazt úgy definiáltuk, hogy a megmaradó pontok, amiket nem hagytunk el az egység intervallumból, ezért a megmaradó intervallumok hosszát megkaphatjuk, ha kiszámítjuk az elhagyott intervallumok hosszát. Azaz:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}, \text{ geometriai sor.}$$

$$\text{Tehát } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1$$

Következős képpen a megmaradó részek hossza: $1 - 1 = 0$. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a Cantor-halmaz nem tartalmazhat intervallumot, ami nem 0 hosszúságú. Meglepő lehet, hogy bármi is maradt vissza. Mindenesetre az elhagyott intervallumok hosszának összege megegyezik az eredeti intervallum hosszával. Közelebbről megvizsgálva az eljárást nyilvánvaló, hogy valaminek maradnia kell. Az első lépésben elhagytuk a középső nyílt harmadot $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ az eredeti $[0,1]$ intervallumból, ami vissza hagyta a $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ végpontokat. Ezeket a végpontokat (és más végpontokat) a későbbi lépések sem fogják eltávolítani, mivel az eltávolítandó intervallumok mindig szigorúan a meglévők belsejében van.

Úgy tűnhet, hogy csak a végpontok maradnak hátra, de ez sem az igazság. Például nézzük meg az $\frac{1}{4}$ hármasszámrendszerbeli alakját: $(0, 020202 \dots)_3$ amiből jól látszik, hogy az alsó harmadában van a $[0,1]$ -nek, a felső kilencedében annak a harmadnak, az alsó huszonhetedében a kilencednek, és így tovább. Az $\frac{1}{4}$ sosem része valamelyik intervallum középső részének, amit eltávolítunk és nem is végpontja valamelyik középső intervallumnak, mivel nem többszöröse az $\frac{1}{3}$ valamelyik hatványának. Megmutatható, hogy ugyan annyi pont marad vissza az eljárás után mint amennyivel elkezdtük.

Ehhez először belátjuk, hogy létezik f szürjektív leképezés, ami a Cantor-halmazt a $[0,1]$ -be képezi. Hogy megkonstruáljuk ezt az f leképezést, érdemes a $[0,1]$ intervallumbeli számok hármasszámrendszerbeli alakját vizsgálni. Megjegyezzük, hogy néhány számnak több reprezentációja is van. Például az $\frac{1}{3}$ írható úgy is, hogy $(0, 1)_3$ de úgy is, hogy $(0, 02222 \dots)_3$ valamint a $\frac{2}{3}$ is lehet $(0, 2)_3$ és $(0, 1222 \dots)_3$. Amikor az első lépésben eltávolítjuk a $[0,1]$ középső egyharmadát, akkor olyan számokat törölünk, amik $(0, 1xxxx \dots)_3$ alakúak, ahol $(xxxx \dots)_3$ a $(0000 \dots)_3$ és $(2222 \dots)_3$ közé esik. Tehát a megmaradó számok $(0, 0xxxx \dots)_3$ és $(0, 2xxxx \dots)_3$ alakúak. Tehát kijelenthető, hogy az első lépés után a C_1 -ben maradt számok azok, amiknek a hármasszámrendszerbeli felírásában a tizedes vessző után nincs 1-es. A második lépésben azokat a számokat vesszük el, amik $(0, 01xxxx \dots)_3$ és $(0, 21xxxx \dots)_3$ alakúak. Levonható a konklúzió, hogy a második lépés után azok a számok maradnak, amiknek a tizedes vessző

után álló első két számjegye közt nincs 1-es. Folytatva ezt a gondolatmenetet nyilvánvaló, hogy az n -edik lépés után C_n elemei azok a számok, amiknek a tizedes vessző utáni n -darab számjegyben nincs 1-es.

Tehát a $[0,1]$ intervallum számairól könnyű eldönteni, hogy a Cantor-halmazban vannak-e. Mivel pontosan azok a számok tartoznak bele, amiknek létezik olyan hármas számrendszerbeli felírása amiben nem szerepel 1-es.

Innen már könnyen megkapjuk a keresett f leképezést. Legyen az f leképezés olyan, hogy egy szám hármas számrendszerbeli alakjából kettes számrendszerbeli alakot csinál úgy, hogy a 2-eseket 1-esekre cseréli. Például:

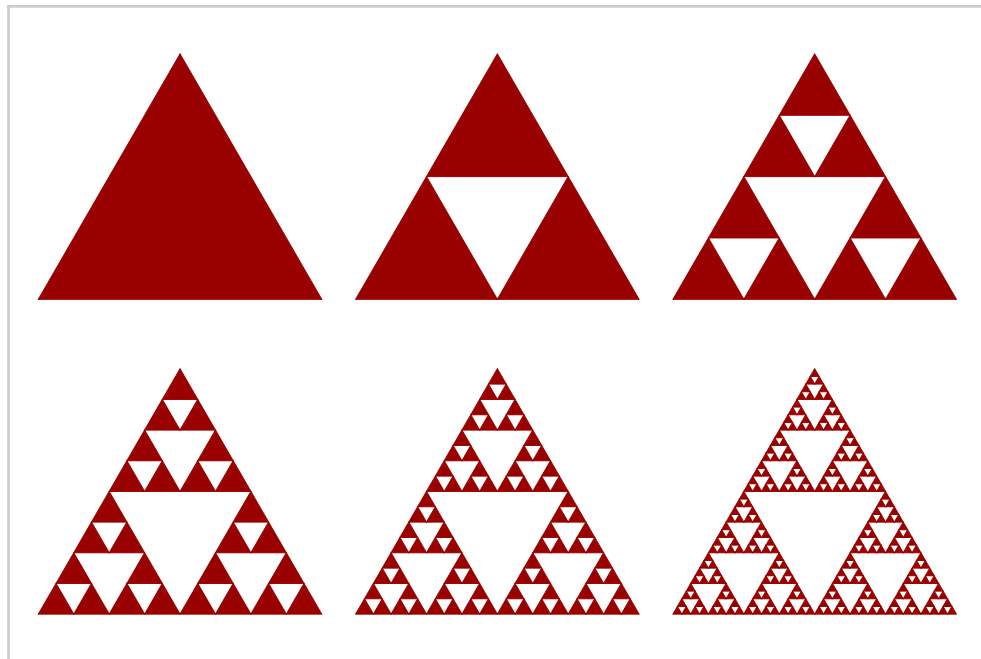
$$f((0, 202)_3) = (0, 101)_2$$

Ez a leképezés injektív és C -ből $[0,1]$ -be képez. Tehát C számossága megegyezik a $[0,1]$ intervallum számosságával, azaz C continuum számosságú.

3. A Sierpinski-háromszög

A Cantor-halmaz síkbeli megfelelője a Sierpinski-háromszög. Konstrukciója:

- 1.lépés: Induljunk ki egy egységnyi oldalú szabályos háromszögből.
 - 2.lépés: Az oldalfelező pontok összekötésével osszuk négy egybevágó részre, majd hagyjuk el a középső rész belső pontjait.
 - 3.lépés: Ismételjük meg 2.lépés-t végtelenszer a megmaradó kis háromszögeken.
- Minden alkalommal, amikor elvégezzük a 2. lépés-t egy újabb iterációs lépéshez érünk.



Az S Sierpinski-háromszög azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a végén megmaradnak, tehát amely pontok mindegyik S_n halmazhoz hozzátartoznak:

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$$

Hasonlóan a Cantor-halmazhoz itt is elmondható hogy, az S_n 3^n darab egybevágó szabályos háromszögből áll, amelyek oldala 2^{-n} hosszú.

Számítsuk ki az elhagyott háromszögek területét.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4} \cdot 3^0 + \frac{1}{4^2} \cdot 3^1 + \frac{1}{4^3} \cdot 3^2 + \dots \right) = \\ & \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3}} \left(\frac{3^0}{4^0} + \frac{3^1}{4^1} + \frac{3^2}{4^2} + \dots \right) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^n}{4^n} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Mivel S_0 területe is $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ezért a Sierpinski-háromszög területe:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Számítsuk ki a közelítő alakzatok kerületének határértékét.

S_0 kerülete 3, az első iterációs lépés után S_1 kerülete éppen az elhagyott háromszög kerületével több mint S_0 kerülete, azaz $3 \cdot \frac{3}{2}$. Ezt a gondolatmenetet folytatva:

$$K_S = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

Felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet a Sierpinski-háromszögnek a kerülete végtelen miközben a területe 0? Megszoktuk hogy a 2-dimenziós alakzatok területe nem nulla, de a Sierpinski-háromszög nem klasszikus 2-dimenziós alakzat. Később látni fogjuk, hogy a Sierpinski-háromszög és a többi itt tárgyalt fraktál is úgynevezett törtdimenziós alakzatok. Persze több dimenzió definíció is van, ezekkel később foglalkozunk.

Határozzuk meg a Sierpinski-háromszög pontjait.

Tegyük fel hogy az S_0 kiindulási háromszögünk csúcsai A , B és C . Az ABC háromszög minden pontja kifejezhető az A , B és C pontok konvex kombinációjaként, még hozzá egyértelműen. Azaz az S_0 háromszög pontjai:

$$\begin{aligned} &\lambda_A \cdot A + \lambda_B \cdot B + \lambda_C \cdot C, \\ &\text{ahol } \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1 \\ &\text{és } 0 \leq \lambda_A \leq 1, 0 \leq \lambda_B \leq 1, 0 \leq \lambda_C \leq 1 \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $0 \leq \lambda_A = \alpha \leq 1$ rögzített. Az A csúcsot a BC oldal felezőpontjával összekötött szakaszt α , $1-\alpha$ arányban osszuk fel és ezen az osztóponton a BC -vel húzzunk párhuzamost. Ez a párhuzamos az AB és AC oldalakat metszi rendre a B és C pontokban. Mivel α -t rögzítettük, ezért $\lambda_A \cdot A + \lambda_B \cdot B + \lambda_C \cdot C$ pontok csak a BC szakaszon lehetnek.

Most nézzük λ_A , λ_B , λ_C kettes számrendszerbeli alakját. Itt is megjegyezzük, hogy néhány számnak több alakja is van, például: $(1)_2 = (0, 1111 \dots)_2$. Ekkor S_1 felső háromszögébe azok a pontok esnek, amik felírhatók a következő alakban:

$$\begin{aligned} &(0, 1 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot A + (0, 0 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot B + (0, 0 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot C, \\ &\text{ahol } (\text{xxxx } \dots)_2 \text{ a } (0000 \dots)_2 \text{ és } (1111 \dots)_2 \text{ közé esik.} \end{aligned}$$

A gondolat menetet folytatva, az S_2 felső harmadának bal alsó kilencedébe eső pontok:

$$(0, 10 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot A + (0, 01 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot B + (0, 00 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot C$$

Az S_3 felső harmadának bal alsó kilencedének felső huszonhetedébe eső pontok:

$$(0, 101 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot A + (0, 010 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot B + (0, 000 \text{ xxxx } \dots)_2 \cdot C$$

Tehát az $S_0 = ABC$ kiindulási háromszöggel definiált Sierpinski-háromszög pontjai pontosan azok a pontok, amik felírhatók A , B és C pontok konvex kombinációjaként a következő módon:

$$(0, a_1 a_2 a_3 \dots)_2 \cdot A + (0, b_1 b_2 b_3 \dots)_2 \cdot B + (0, c_1 c_2 c_3 \dots)_2 \cdot C,$$

ahol $a_i + b_i + c_i = (1)_2$ minden $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$

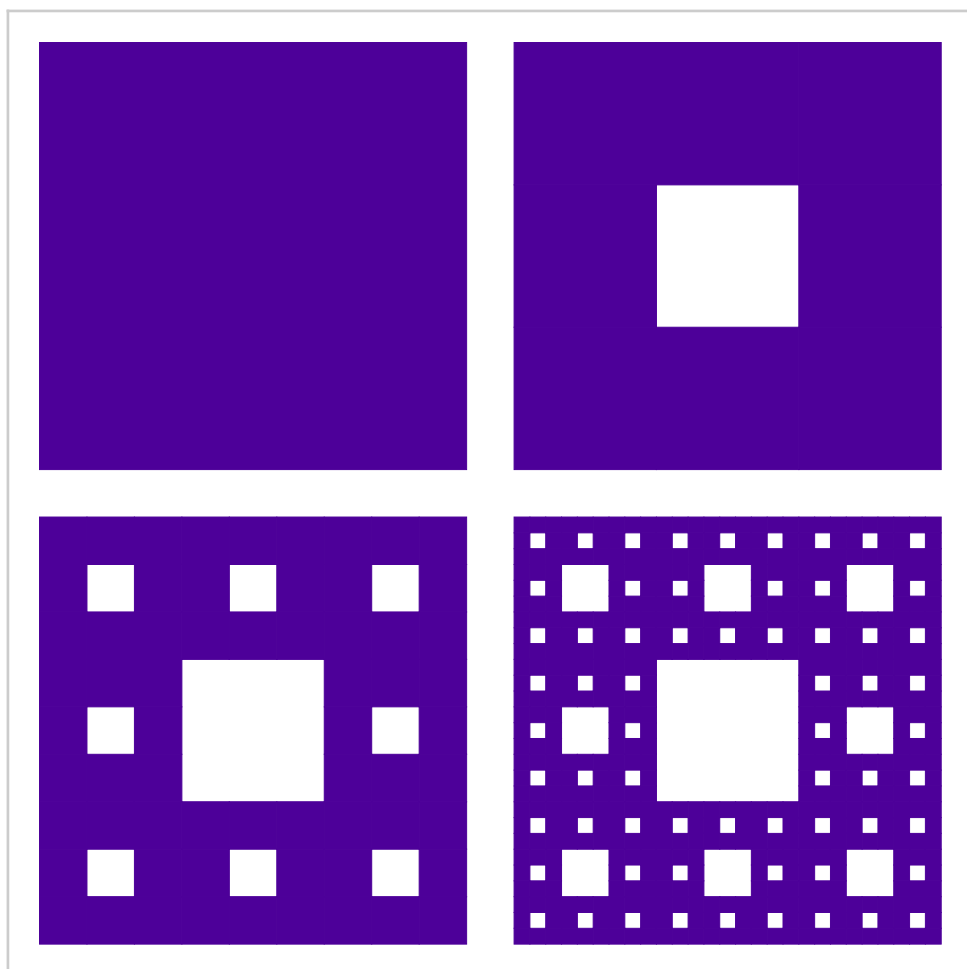
Megjegyzés: Így módon egy nem feltétlenül szabályos $S_0 = ABC$ háromszöggel definiált Sierpinski-háromszögről is meg lehet mondani, hogy egy adott pont az eleme-e.

4. A Sierpinski-szőnyeg

A Sierpinski-szőnyeg konstrukciója hasonlít a Sierpinski-háromszög konstrukciójához. Legyen T_0 egy egység oldalhosszúságú négyzet, ezt osszuk kilenc egybevágó négyzetre a harmadoló pontok segítségével és hagyjuk el a középső kis négyzetet. A kapott halmaz legyen T_1 . A második lépésben a T_1 -et alkotó nyolc kis négyzet mindegyikét osszuk hasonló módon kilenc kis négyzetre és hagyjuk el a középső kis négyzetet, és így tovább. Tehát

$$T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Az első négy iterált:



Figyeljük meg, hogy T_n 8^n darab $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ területű négyzetből áll.

Számítsuk ki a Sierpinski-szőnyeg területét.

$$1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^1 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 - 8^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2 - \dots =$$

$$= 1^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 8^n \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} = 1^2 - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1 - 1 = 0$$

Számítsuk ki a közelítő alakzatok területének határértékét.

$$K_{T_0} = 4 \cdot 1$$

$$K_{T_1} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$K_{T_2} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$K_{T_3} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\text{Tehát } K_T = 4 + \frac{4}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \infty, \text{ mivel } \frac{8}{9} > 1.$$

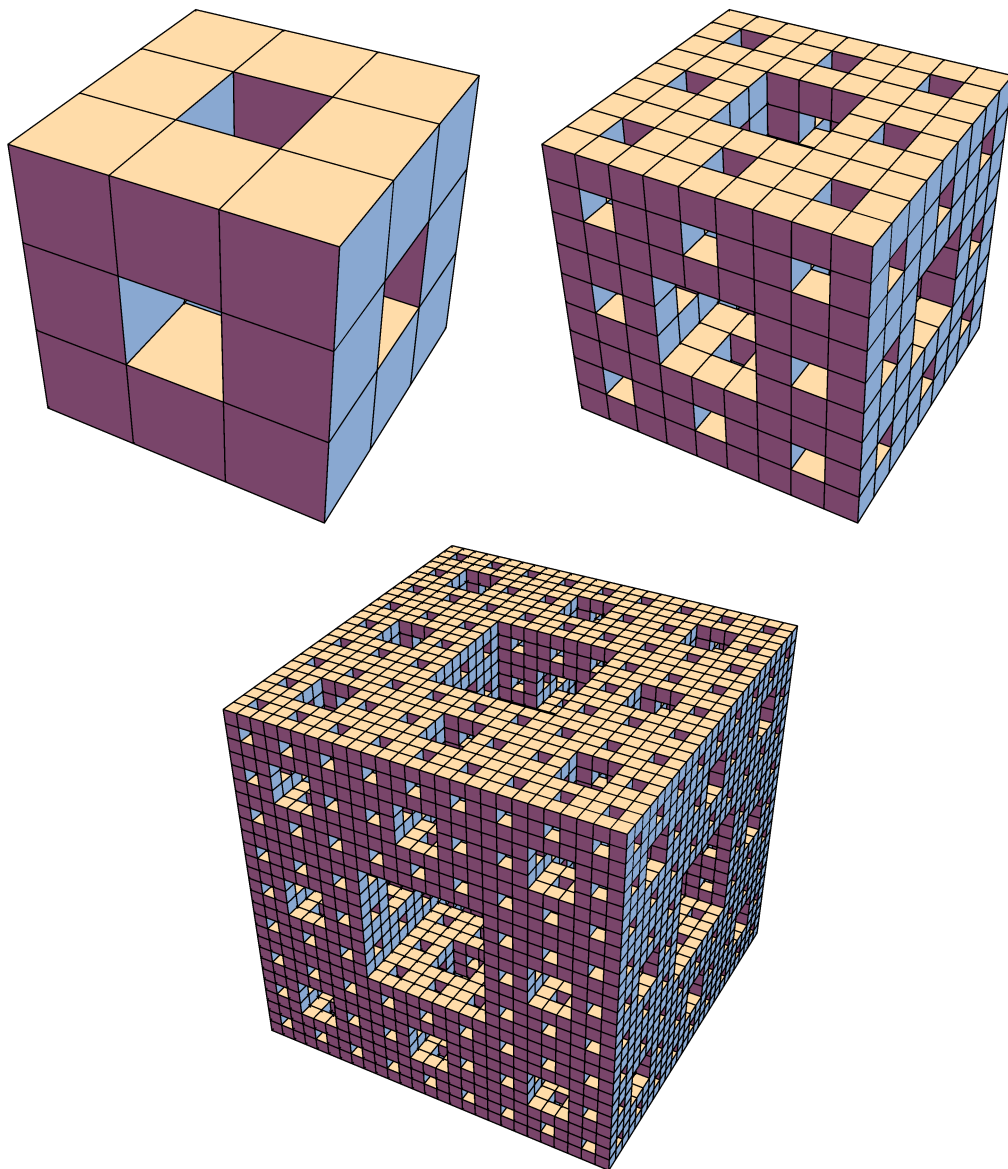
A Sierpinski-szőnyeg konstrukciójából nyilvánvalóan látszik, hogy ha T_0 a $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ és $(0,1)$ pontokkal adott akkor a pontjai pontosan azok a pontok, amiknek az egyik koordinátája eleme a Cantor-halmaznak (és mind két koordináta eleme a $[0,1]$ intervallumnak).

5. A Menger-szivacs

A Sierpinski-szőnyeg térbeli megfelelője a Menger-szivacs. Egy egység oldalhosszúságú kockából indulunk ki, amelyet huszonhét egybevágó kis kockára bontunk. Tekintsük azt a három egyenest, amelyek áthaladnak a kocka középpontján és merőlegesek a kocka valamelyik lapjára. Ez a három egyenes a 27 kis kocka közül hetet metsz. Ezeket a kis kockákat hagyjuk el. A következő lépésben ugyanezt a műveletet megismétljük a megmaradó húsz kis kocka mindegyikével. Ezt a műveletet folytatjuk a végtelenségig, a megmaradó pontok halmaza a Menger-szivacs, azaz

$$M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$$

Az első három iterált:



Vegyük észre, hogy a M_n 20^n darab $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ élhosszúságú kis kockából áll. A konstrukcióból az is nyilvánvaló, hogy a Menger-szivacs pontjai, feltéve hogy M_0 a $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ és $(1,1,1)$ pontokkal meghatározott, pontosan azok a pontok, amik egyik koordinátája eleme a Cantor halmaznak (és mind három koordináta eleme $[0,1]$ intervallumnak).

Számítsuk ki a Menger-szivacs térfogatát.

$$V_{M_1} = 20^1 \cdot \left(\frac{1}{3^1}\right)^3$$

$$V_{M_2} = 20^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^3$$

$$V_{M_n} = 20^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 \text{ Tehát } V_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n = 0, \text{ mivel } \frac{20}{27} < 1$$

Az M_n felszíne:

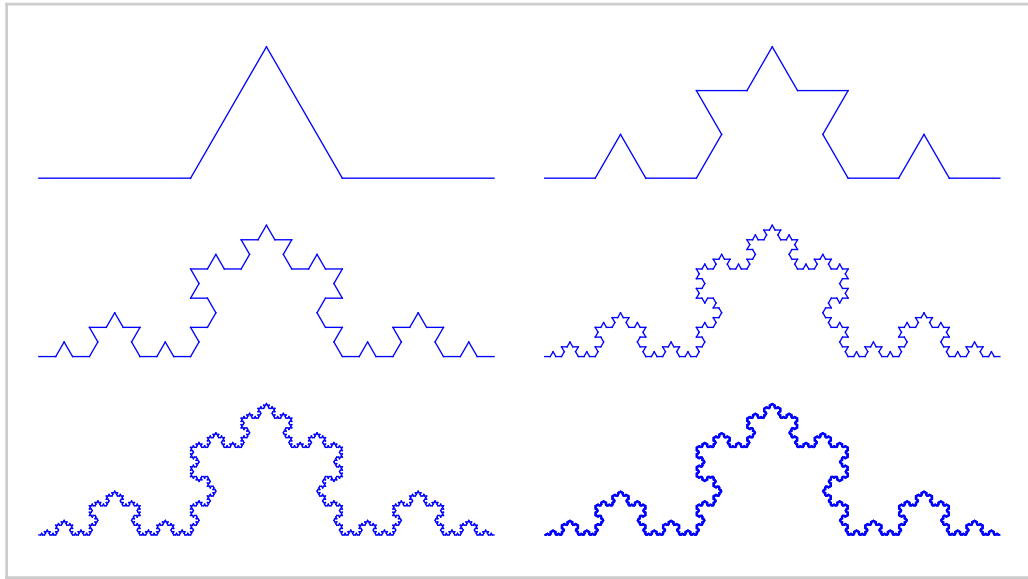
$$A(M_n) = 2 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n + 4 \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Tehát a Menger-szivacs felszíne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n + 4 \left(\frac{8}{9}\right)^n = \infty$$

6. A Koch-görbe és a Koch-féle pehely

A Koch-görbét síkbeli töröttvonalak határértékeként definiáljuk. A kiinduló halmaz egy K_0 egységnyi hosszúságú zárt szakasz. A K_1 törött vonalat úgy kapjuk, hogy a K_0 szakasz középső harmada fölé emelt szabályos háromszög alapját helyettesítjük másik két oldalával. Így egy négy szakaszból álló törött vonalat kapunk, amelyben minden szakasz hossza $\frac{1}{3}$. A K_2 -t hasonló képpen kapjuk, a K_1 -et alkotó négy szakasz közepét helyettesítjük egy szabályos háromszög másik két oldalával, és így tovább. Így töröttvonalak egy $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots$ sorozatát kapjuk, aminek a határértéke Hausdorff távolságban (később tárgyaljuk) a Koch-görbe. Az első öt iterált:



Világos, hogy K_0 hossza egy. A K_1 töröttvonal hossza $4 \cdot \frac{1}{3}$ és mivel minden iterációs lépésnél egy k hosszúságú szakaszt $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot k$ hosszúságúra cserélünk, ezért K_n hossza $K_{n-1} \cdot \frac{4}{3}$. Azaz a Koch-görbe hossza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty$$

Bizonyítsuk be, hogy a Koch-görbe a sík korlátos részhalmaza.

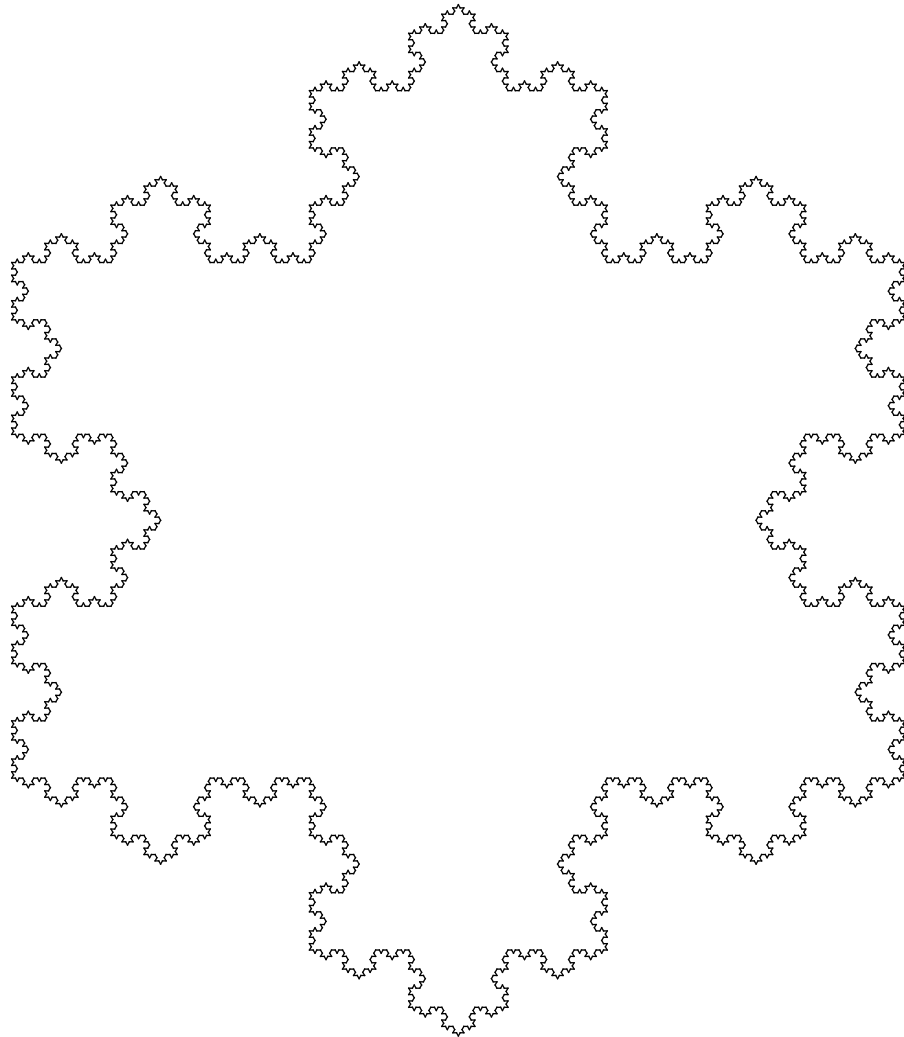
Nyilvánvaló, hogy ha K_0 a $(0,0)$ és $(1,0)$ pontokkal definiált, akkor K_0 biztosan benne van a $(0,0)$ középpontú zárt egységekörlemben. Mivel K_1 -et úgy kapjuk, hogy K_0 középső része fölé háromszöget emelünk, aminek oldalhossza $\frac{1}{3}$, ezért K_1 biztosan benne van a $(0,0)$ középpontú $1 + \frac{1}{3}$ sugarú zárt körlemben. K_2 -t úgy kaptuk, hogy K_1 szakaszainak középső része fölé háromszögeket emeltünk, amiknek oldalhossza $(\frac{1}{3})^2$. Tehát K_2 benne van a $(0,0)$ középpontú $1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2$ sugarú zárt körlemben. Általánosan: K_n benne

van a $(0,0)$ középpontú $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sugarú zárt körlapban. Tehát a Koch-görbe benne van a $(0,0)$ középpontú és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ sugarú zárt körlapban.}$$

Tehát a Koch-görbe a sík korlátos részhalmaza.

A Koch-féle hópehely vagy sziget az a halmaz, amit három darab, végpontjánál egymáshoz illesztett Koch-görbe határol. Azaz:



Számítsuk ki a Koch-féle hópehely területét.

Először számítsuk ki a Koch-görbe alatti területet. K_0 -nál ez nyilván 0. K_1 -nél egy $\frac{1}{3}$ oldalhosszúságú szabályos háromszöget illesztettünk a K_0 vonal közepére, aminek területe $T_{K_1} = 4^0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. K_2 -nél K_1 -et alkotó minden szakasz közepe fölé emeltünk egy $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ oldalhosszúságú szabályos háromszöget azaz

$$T_{K_2} = 4^0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4^1 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$\text{Tehát } T_{K_n} = T_{K_{n-1}} + 4^n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

A Koch-féle pehelynél még van egy háromszögünk, amit három K_0 alkot, ennek a területe $1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát a Koch-féle pehely területe:

$$\begin{aligned} T_{K\text{-pehely}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

7. Iterált függvényrendszerek

7.1. Alapfogalmak: iterált függvényrendszerek

1. DEFINÍCIÓ

Tegyük fel, hogy X metrikus tér, és $f: X \rightarrow X$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f kontrakció, ha létezik olyan $0 < r < 1$ szám, hogy $d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$ teljesül minden $x, y \in X$ esetén.

2. TÉTEL (Banach)

Nemüres teljes metrikus tér tetszőleges kontrakciójának létezik egy és csak egy fixpontja.

3. DEFINÍCIÓ

Legyen (X, d) metrikus tér, $A \subseteq X$ egy részhalmaz és $r > 0$ pozitív szám. Az A halmaz r sugarú környezetén az alábbi halmazt értjük:

$$N_r(A) = \{y \in X : d(x, y) < r \text{ valamely } x \in A \text{ pontra}\}$$

4. DEFINÍCIÓ

Legyen (X, d) metrikus tér és $A, B \subseteq X$. Az A és B halmazok Hausdorff távolságán a következő számot értjük:

$$D(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subseteq N_r(B) \text{ és } B \subseteq N_r(A)\}$$

5. DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy az A halmaz az $(f_1, \dots, f_n)$ függvényrendszer invariáns halmaza, ha teljesül, hogy

$$A = f_1(A) \cup \dots \cup f_n(A)$$

Tekintsünk egy példát.

A Cantor- halmaz előáll két egyharmadára kicsinyített Cantor halmaz uniójaként:

$$C = f_1(C) \cup f_2(C), \text{ ahol } f_1(x) = \frac{x}{3} \text{ és } f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

Tehát a Cantor halmaz az (f_1, f_2) függvényrendszer invariáns halmaza.

Minden (kontrakciókból álló) függvényrendszer meghatároz egy leképezést $\mathcal{K}(X)$ -en, az X metrikus tér nemüres, kompakt részhalmazainak rendszerén. Legyenek $f_1, \dots, f_n$ kontrakciói az X metrikus térnek. Ha $A \in \mathcal{K}(X)$, legyen

$$F(A) = \bigcup_{k=1}^n f_k(A)$$

6. TÉTEL

Tetszőleges $A, B \in \mathcal{K}(X)$ halmazokra:

$$D(F(A), F(B)) \leq r \cdot D(a, b),$$

ahol $r = \max(r_1, \dots, r_n)$ (ahol r_i az f_i kontrakciós tényezője)

7. TÉTEL

Ha $f_1, \dots, f_n$ kontrakciói az X metrikus térnek, akkor létezik pontosan egy nemüres kompakt $K \subseteq X$ halmaz, amelyre

$$K = f_1(K) \cup \dots \cup f_n(K)$$

A fentiek alapján egy módszert kapunk függvényrendszerek invariáns halmazainak ábrázolására. Kiindulva egy K_0 kompakt halmazból és képezve az $F(K_0), F^2(K_0), F^3(K_0) \dots$ iteráltakat, ha m elég nagy akkor $F^m(K_0)$ halmaz Hausdorff távolsága a K invariáns halmaztól kicsi.

Hogy ez a távolság mennyire kicsi azt az alábbi tétellel tudjuk becsülni:

8. TÉTEL

Tetszőleges m pozitív egész szám esetén teljesül

$$D(K, F^m(K_0)) \leq \frac{r^m}{1-r} \cdot D(F(K_0), K_0)$$

Tehát az iterált és az invariáns halmaz közötti távolság annál kisebb, minél kisebb a távolság a kiinduló halmaz és az első iterált között. Továbbá annál kisebb, minél kisebb az r kontrakciós tényező és minél nagyobb az m , azaz minél több iterálást végeztünk el.

Ezzel egy módszert is kaptunk fraktál képek előállítására, és ha ügyesen választjuk meg a kiinduló halmazt akkor viszonylag kis m -re is "jó" képet kapunk.

7.2. Fraktálok iterálása függvényrendszerekkel

A továbbiakban csak olyan kontrakciókkal foglalkozunk, amik egy középpontos hasonlóság és középpont körüli forgatásból állnak. Ennek megfelelően az f kontrakciót egyértelműen meghatározza a forgatva nyújtás centruma (x, y) , a nyújtás mértéke (λ) és a forgatás szöge (ω) .

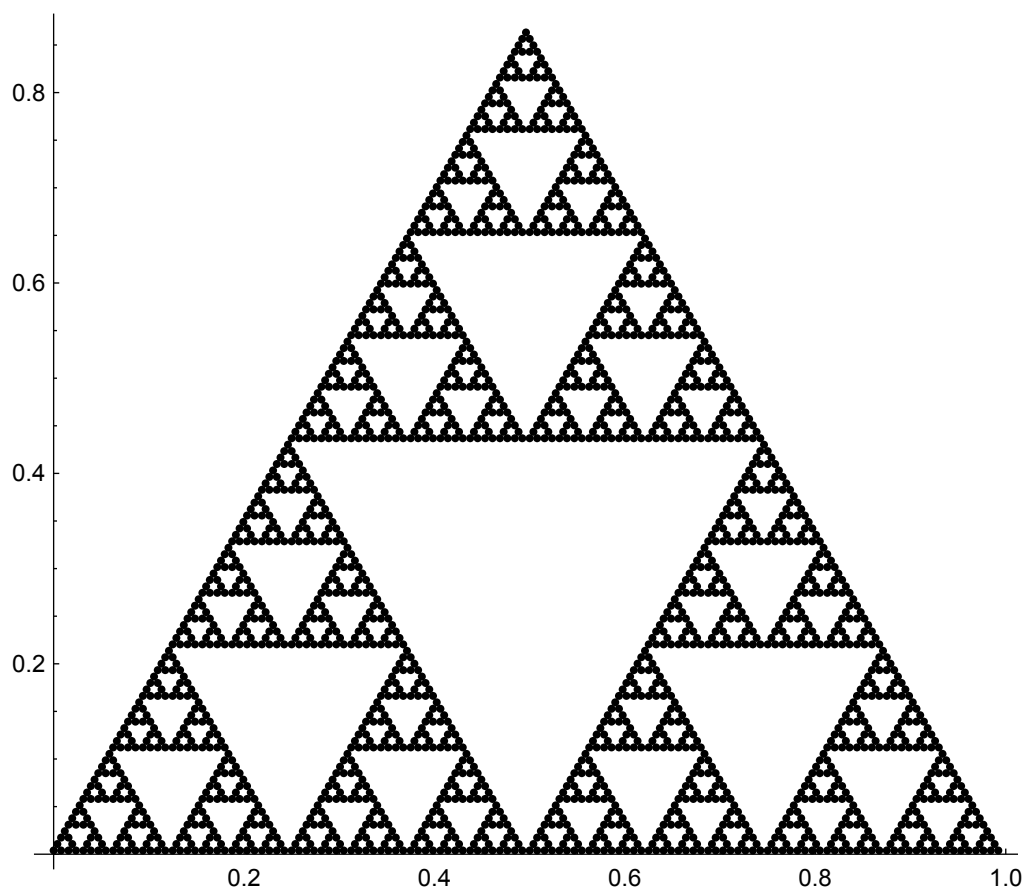
$$\text{jel: } f_i((x_i, y_i), \lambda_i, \omega_i)$$

Állítsuk elő a Sierpinski-háromszöget.

A Sierpinski-háromszög előáll három $\frac{1}{2}$ -ére kicsinyített Sierpinski-háromszögből. Még hozzá, ha megnézzük a konstrukciót, akkor hamar rájövünk, hogy ha az S_0 háromszög csúcsaira $\frac{1}{2}$ arányú nyújtást végzünk akkor megkapjuk S_1 -et. Továbbá, ha ezt megismételjük S_1 -en, akkor megkapjuk S_2 -t, és így tovább. Tehát legyenek

$$f_1\left(0, 0, \frac{1}{2}, 0\right), f_2\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0\right), f_3\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

és tekintsük a $F^8\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)$



Szemlátomást megkaptuk a Sierpinski-háromszög képét. Persze csak közelítőleg.

Vajon mennyire van távol a kapott ponthalmaz az invariáns halmaztól? Használjuk a fent említett tételt a becsléshez. Mivel f_1, f_2, f_3 nem tartalmaz forgatást, az invariáns K halmazra igaz, hogy $K \subseteq S_0$. Mivel K_0 az $(\frac{1}{2}, 0)$ pont volt, ezért $D(F(K_0), K_0)$ legfeljebb a háromszög magasságával egyenlő, most legyen pont annyi azaz $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az r kontrakciós tényezőről tudjuk, hogy $\frac{1}{2}$, mert mind a három függvény esetében $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = \frac{1}{2}$. Mostmár

becsülhetjük a két halmaz közti távolságot:

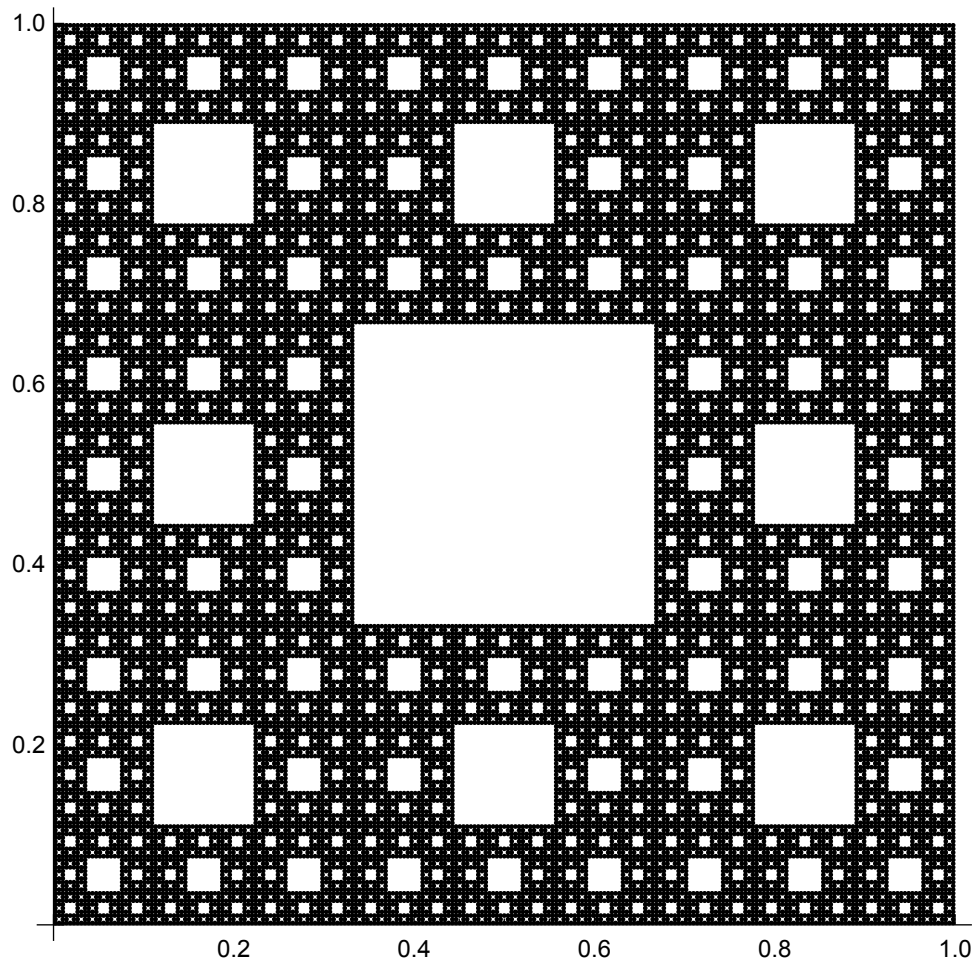
$$D(K, F^8(K_0)) \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,00677$$

Állítsuk elő a Sierpinski-szőnyeget.

A Sierpinski-szőnyeg előáll nyolc darab $\frac{1}{3}$ -ára kicsinyített Sierpinski-szőnyegből. Itt is hamar rá lehet jönni, hogy ha a T_0 négyszög csúcsaira és oldalfelező pontjaira $\frac{1}{3}$ arányú nyújtást alkalmazunk, akkor megkapjuk T_1 -et. T_2 -t megkapjuk, ha ugyan ezt végrehajtjuk T_1 -en, és így tovább. Tehát legyenek

$$\begin{aligned} f_1\left(0, 0, \frac{1}{3}, 0\right), f_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right), f_3\left(0, 1, \frac{1}{3}, 0\right), f_4\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 0\right), \\ f_5\left(1, 1, \frac{1}{3}, 0\right), f_6\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right), f_7\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0\right), f_8\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

és tekintsük az $F^5\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$



Becsüljük az $F^5\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ és a K invariáns halmaz távolságát. Mivel $K_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

és $f_1, \dots, f_8$ nem tartalmaz forgatást így $K \subseteq T_0$, azaz $D(F(K_0), K_0)$ legfeljebb T_0 átlójának fele, azaz $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Valamint $r = \frac{1}{3}$. Tehát

$$D(K, F^5(K_0)) \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,00218$$

Állítsuk elő a Koch-görbét.

A Koch-görbe előáll négy darab $\frac{1}{3}$ -ára kicsinyített Koch-Görbéből. (A félreértések elkerülése végett most a Koch-görbe iteráltjai: $G_0, G_1, \dots$) A G_1 előáll, ha a $(0,0)$ és $(1,0)$ pontokból alkalmazunk $\frac{1}{3}$ arányú nyújtást, valamint egy harmadik pontból $\frac{1}{3}$ arányú nyújtást és $\frac{\pi}{3}$ szögű forgatást, valamint egy negyedik pontból $\frac{1}{3}$ arányú nyújtást és $-\frac{\pi}{3}$ szögű forgatást a G_0 -án.

Határozzuk meg ezeket a pontokat. Tudjuk, hogy egy $\frac{1}{3}$ arányú $\frac{\pi}{3}$ szögű forgatás centrumát keressük, méghozzá úgy hogy ez a transzformáció a $(0,0)$ pontot az $(\frac{1}{3}, 0)$ pontba képezi. Tehát a keresett centrum a $(0,0)$ -tól $3a$ távolságra van, az $(\frac{1}{3}, 0)$ -tól $1a$ távolságra. Tehát van egy háromszögünk $3a, 1a, \frac{1}{3}$ oldalhosszúságokkal. Határozzuk meg a háromszög magasságát, ami a keresett centrum második koordinátája lesz. A Cosinus-tételt átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3} = \sqrt{(3a)^2 + a^2 - 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{7a^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

Legyen a centrumnál lévő szög α , a $(0,0)$ -nál lévő szög γ és az $(\frac{1}{3}, 0)$ -nál lévő szög β . Szinusztételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sin \gamma = \frac{a \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{3}}$$

A keresett m_a magasság:

$$m_a = 3a \cdot \sin \gamma = 9a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

Az első koordináta az m_a talppontjának távolsága a $(0,0)$ csúcstól, azaz

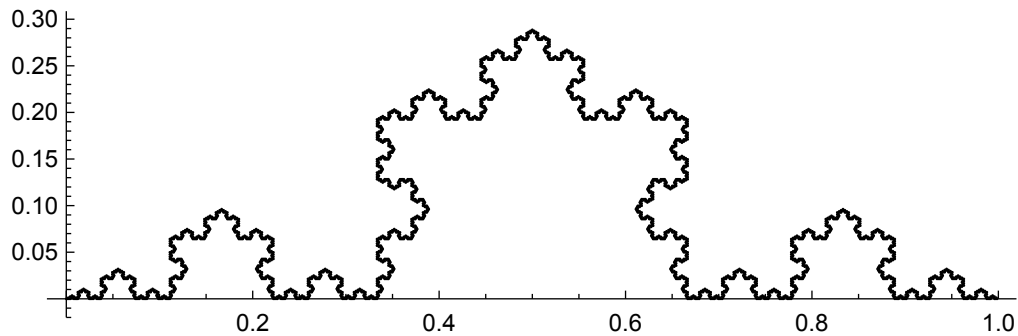
$$\sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{14}\right)^2} = \frac{5}{14}$$

Mivel a másik centrum meghatározása is majd ugyan így megy, ezért a harmadik és negyedik keresett pontok: $\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$ és $\left(\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$. Tehát legyenek

$$f_1\left((0, 0), \frac{1}{3}, 0\right), f_2\left(\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right), \frac{1}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$f_3\left(\left(\frac{9}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right), \frac{1}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), f_4\left((1, 0), \frac{1}{3}, 0\right)$$

és tekintsük a $F^6((0, 0))$ -t



Becsüljük az $F^6((0, 0))$ és a K invariáns halmaz távolságát. Mint azt korábban tárgyaltuk, hogy a Koch-görbe benne van a $(0,0)$ pont körüli $\frac{3}{2}$ sugarú zárt kör Lapban(, amiről persze tudjuk, hogy igen durva becslés). Tudjuk továbbá, hogy $r = \frac{1}{3}$. Tehát

$$D(K, F^6(K_0)) \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^6} \approx 0,00137$$

8. Hasonlósági dimenzió

Egy fraktál önhasznó, de nem igaz, hogy ha egy alakzat önhasznó, akkor fraktál. Például egy szakasz ötödére kicsinyített példányából ötre van szükség, hogy lefedjük az eredeti szakaszt. Egy négyzet harmadára kicsinyített példányából kilencre van szükség, hogy lefedjük az eredetit. Egy kocka negyedére kicsinyített példányából hatvannégyre van szükség, hogy lefedjük az eredetit.

Általánosságban egy d -dimenziós kocka előáll k^d k -ad részére kicsinyített kocka egyesítéseként. A szakasz esetében: $5^1 = 5$, a négyzetnél: $3^2 = 9$, a kockánál: $4^3 = 64$.

Mint korábban láttuk, a Cantor-halmaz előáll két darab egyharmadára kicsinyített Cantor-halmaz egyesítéseként. Tehát a fenti gondolatmenettel analóg módon a Cantor-halmaz dimenziója az a szám, amelyre $3^d = 2$. Azaz

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,631$$

Ami egy 0 és 1 közötti szám. Nem véletlenül hívjuk a fraktálokat törtdimenziós alakzatoknak.

Ezen megfontolások után definiáljuk a hasonlósági dimenziót, ami szigorúan önhasznó halmazokra vonatkozik.

9. DEFINÍCIÓ

Ha $f_1, f_2, \dots, f_n$ hasonlósági transzformációk, amelyeknek hasonlósági tényezője ugyanaz az $r < 1$ szám és K az $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ függvényrendszer invariáns halmaza, akkor a

$$d = \frac{\log n}{\log \frac{1}{r}}$$

számot a K halmaz hasonlósági dimenziójának nevezzük.

Minden logaritmus visszavezethető egy tetszőleges másik alapra:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Azaz teljesen lényegtelen, hogy milyen alapú logaritmust használunk.

A fent definiált d szám megoldása az $r^d + \dots + r^d = 1$ egyenletnek, ahol az egyenlőség bal oldalán n tag áll. A definíció kiterjeszthető olyan függvényrendszerek invariáns halmazaira, ahol a függvények hasonlósági tényezői nem feltétlenül megegyezők.

10. DEFINÍCIÓ

Legyenek $f_1, f_2, \dots, f_n$ hasonlósági transzformációk, melyeknek hasonlósági tényezői az 1-nél kisebb $r_1, r_2, \dots, r_n$ számok és jelöljük K -val az $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ függvényrendszer invariáns halmazát. Ekkor K hasonlósági dimenziójának azt az d nemnegatív számot hívjuk, amelyre teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_n^d = 1$$

Ilyen szám pontosan egy van.

Egyes halmazok több függvényrendszernek is lehetnek invariáns halmazai. Példaként tekintsük $f_1, \dots, f_4$ -t úgy, hogy f_i -k hasonlósági transzformációk, amik centruma egy négyzet csúcsaira illeszkednek és a hasonlósági tényezőjük $r = \frac{1}{2}$. Ekkor a $(f_1, \dots, f_n)$ függvényrendszer invariáns halmaza a centrumok által meghatározott négyzet. Továbbá hasonlósági dimenziója:

$$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

De ha $g_1, \dots, g_4$ hasonlósági transzformációkat nézzük, amiknek ugyan az a centruma mint $f_1, \dots, f_4$ -nek, viszont hasonlósági tényezőjük $\frac{3}{4}$. Akkor ennek a $(g_1, \dots, g_4)$ függvényrendszernek az invariáns halmaza szintén ez a négyzet lesz, viszont hasonlósági dimenziója

$$d = \frac{\log 4}{\log \frac{4}{3}} \approx 4,82$$

A különbséget az okozza, hogy a $(g_1, \dots, g_4)$ függvényrendszernek a $g_1(K), g_2(K), g_3(K), g_4(K)$ négyzetek átfedik egymást. Ha nem engedünk meg ilyen átfedéseket, akkor a hasonlósági dimenzió egyértelműen meghatározott.

Számítsuk ki a Sierpinski-háromszög hasonlósági dimenzióját.

A Sierpinski-háromszög előállítható három hasonlósági transzformációval, amik hasonlósági tényezői $\frac{1}{2}$. Azaz

$$d_S = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$$

Számítsuk ki a Sierpinski-szőnyeg hasonlósági dimenzióját.

A Sierpinski-szőnyeg előállítható nyolc hasonlósági transzformációval, amik hasonlósági tényezői $\frac{1}{3}$. Azaz

$$d_T = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,893$$

Számítsuk ki a Menger-szivacs hasonlósági dimenzióját.

A Menger-szivacs előállítható húsz darab hasonlósági transzformációval, (8 centrum a kocka csúcsain és 12 centrum a kocka élfelezőpontjain,) amik hasonlósági tényezői $\frac{1}{3}$. Azaz

$$d_M = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,727$$

9. A doboz-dimenzió

9.1. Alapfogalmak: doboz-dimenzió

A doboz-dimenzió egy másik módja, hogy mérjük egy H halmaznak a dimenzióját az Euklideszi-térben, vagy általánosabban egy (X, d) metrikus térben.

Hogy kiszámoljuk a H fraktál dimenzióját, tekintsünk egy térrácsot a térben, ami a teret egyforma kockákra bontja. Majd számoljuk meg, hogy hány kockára van szükségünk, hogy lefedjük a halmazt. A doboz-dimenziót úgy kapjuk meg, hogy a térrácsot a végtelenségig finomítjuk. A doboz-dimenziót numerikusan is jól tudjuk számolni.

11. DEFINÍCIÓ

Tegyük fel, hogy $N(\delta)$ a H halmaz lefedéséhez szükséges kockák száma, amik oldalhossza δ . Ekkor a H halmaz doboz-dimenziója:

$$\dim_{\text{box}}(H) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \left(\frac{1}{\delta}\right)}$$

Számítsuk ki a Sierpinski-szőnyeg doboz-dimenzióját.

Mint láttuk korábban T_n előáll 8^n darab 3^{-n} oldalhosszúságú négyzetből, azaz

$$\dim_{\text{box}}(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\delta))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(8^n)}{\ln(3^n)} = *$$

Az L'Hospital-szabályt felhasználva:

$$* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{8^n \ln 8}{8^n}}{\frac{3^n \ln 3}{3^n}} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,893$$

Számítsuk ki a Menger-szivacs doboz-dimenzióját.

Mint láttuk M_n előáll 20^n darab 3^{-n} élhosszúságú kockából, azaz

$$\dim_{\text{box}}(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\delta))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(20^n)}{\ln(3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{20^n \ln 20}{20^n}}{\frac{3^n \ln 3}{3^n}} = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,727$$

Megadunk egy a fentivel ekvivalens definíciót.

12. DEFINÍCIÓ

Fedjük le az H halmazt legfeljebb δ átmérőjű halmazokkal úgy, hogy a lefedő halmazok száma minimális legyen. Jelölje $N(\delta)$ a halmazok számát egy ilyen minimális lefedésben. Ekkor

$$\dim_{\text{box}} H = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\log N'(\delta)}{\log \left(\frac{1}{\delta}\right)}$$

13. TÉTEL

A doboz-dimenzió fenti két definíciója ekvivalens.

Számítsuk ki a Cantor-halmaz doboz-dimenzióját.

C_n előáll 2^n darab 3^{-n} hosszúságú intervallumból. Ezeket fedjük le 3^{-n} átmérőjű zárt körlapokkal. Tehát C doboz-dimenziója:

$$\dim_{\text{box}}(C) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\delta))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n \ln 2}{2^n}}{\frac{3^n \ln 3}{3^n}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631$$

Számítsuk ki a Sierpinski-háromszög doboz-dimenzióját.

S_n előáll 3^n darab 2^{-n} oldalhosszúságú háromszögből. Ezeket fedjük le 2^{-n} átmérőjű zárt körlapokkal. Tehát S doboz-dimenziója:

$$\dim_{\text{box}}(S) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\delta))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n \ln 3}{3^n}}{\frac{2^n \ln 2}{2^n}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$$

Mint láthatjuk a doboz-dimenzió sok halmazra megegyezik a hasonlósági dimenzióval. Viszont a hasonlósági dimenzióval nem tudtuk kiszámolni a Koch-görbe dimenzióját, mivel az előállításához szükséges transzformációkban forgatás is volt. Most viszont ezt is ki tudjuk számolni.

Számítsuk ki a Koch-görbe doboz-dimenzióját.

K_n előáll 4^n darab 3^{-n} hosszúságú szakaszból. Ezeket fedjük le 3^{-n} átmérőjű zárt körlapokkal. Tehát K doboz-dimenziója:

$$\dim_{\text{box}}(K) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\delta))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln(3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n \ln 4}{4^n}}{\frac{3^n \ln 3}{3^n}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,262$$

9.2. Numerikus módszer

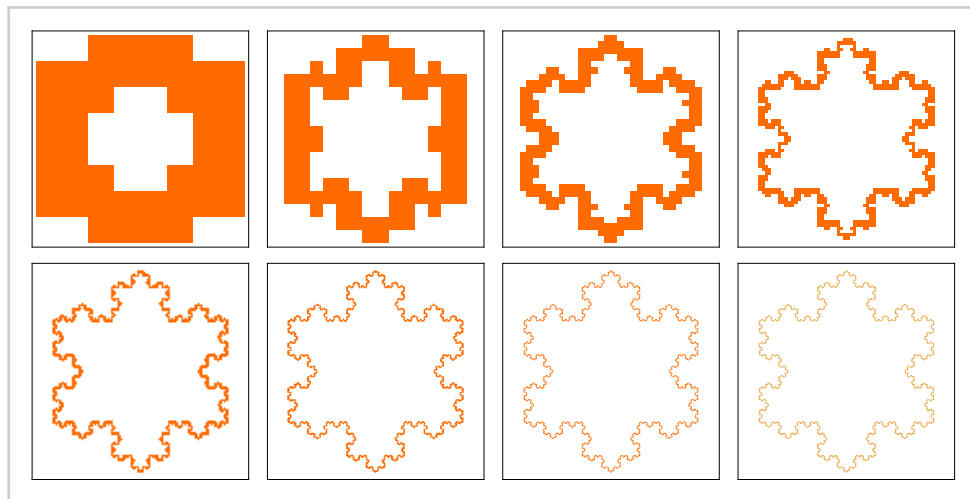
Mint korábban említettük a doboz-dimenzió kiválóan alkalmas arra, hogy numerikusan számítógéppel közelítsük. Nézzük meg ezt egy egyszerű példán keresztül.

Tegyük fel, hogy van egy képünk egy H halmazról. Legyen ez a H halmaz most a Koch-görbe hatodik iteráltja és a kép mérete legyen 1024×1024 pixel(, amit mi generálunk le). Ezt a képet alakítsuk egy bit-mátrixá, úgy

hogyan az RGB ($0 \leq \text{red, green, blue} \leq 255$) színtkomponenseknek adunk egy maximum értéket (jelen esetben 180) és ha bármelyik komponens értéke nagyobb ennél a számnál, akkor a pixelnek megfelelő bit-mátrix elem értéke 0, különben 1.

Az említett bit-mátrixhoz készítünk egy beosztást, amit finomítani fogunk. Legyen az első beosztás 128×128 -as (azaz ennyi pixelt fogunk össze és ez lesz a lefedő négyzetek mérete). Majd a beosztást finomítsuk úgy, hogy mindig megfelezzük a négyzet oldalhosszát.

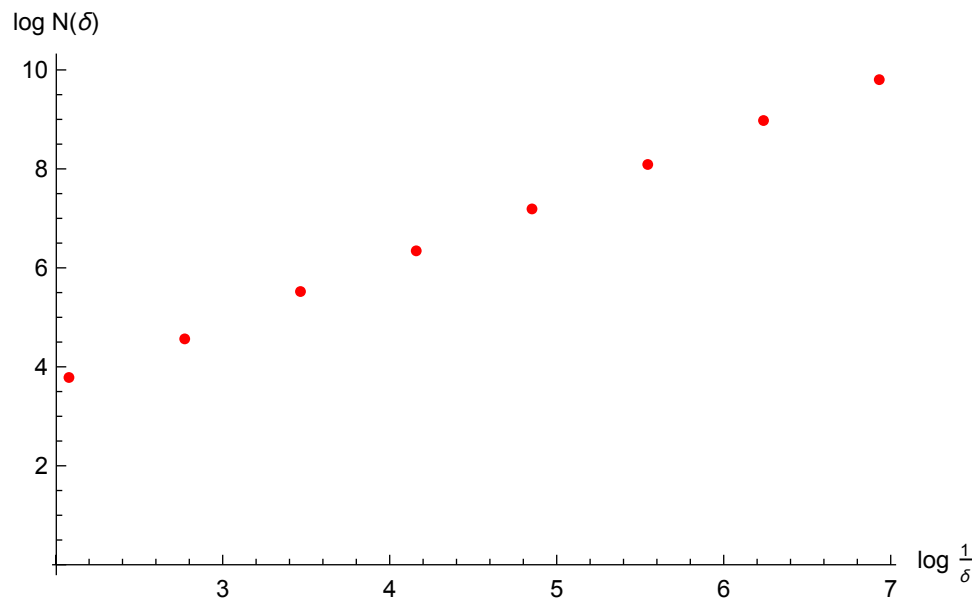
Szükségünk van az adott beosztáshoz tartozó lefedő négyzetek számára. Ezt úgy kapjuk meg, hogy egy adott négyzet pontjainak megfelelő elemeket összeadjuk a bit-mátrixban és ha az összeg nagyobb mint nulla, akkor az azt jelenti, hogy az adott négyzettel lefedtük a vizsgált halmaz egy részét. Ezekből a lefedő négyzetekből is csinálunk egy bit-mátrixot. Nézzük meg mit jelent ez $128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1$ pixel nagyságú beosztás esetén:



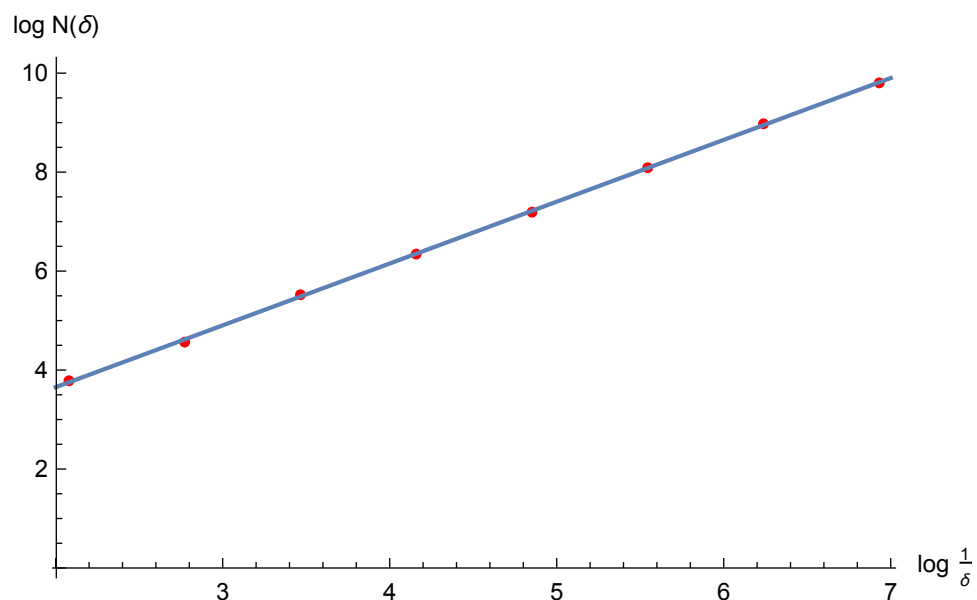
Mostmár csak össze kell számolnunk a lefedő négyzetek számát, ami egymásba ágyazott szummákkal könnyedén kivitelezhető. Ebben a konkrét esetben a beosztásoknak megfelelően rendre 44, 96, 250, 569, 1327, 3259, 7921, 18093 lefedő négyzetünk van. Az ezekhez tartozó δ legyen a kép méretének és a beosztás szélességének hányadosa, azaz:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}$$

Mindenünk megvan ahhoz, hogy kiszámoljuk az alakzat doboz-dimenzióját. Ábrázoljuk a $(\log(\frac{1}{\delta}); \log N(\delta))$ pontokat.



Illeszünk egyenest ezekre a pontokra. Ez az egyenes a $g=1,15496+1,24945$ x .



Látható, hogy az egyenes elég jól illeszkedik ezekre a pontokra. Tegyük fel, hogy az egyenes akkor is jól illeszkedne a pontokra, hogy ha a beosztást tovább finomítjuk. Ekkor a keresett határérték tartani fog az illesztett egyenes meredekségéhez, ha a beosztás mérete tart a 0-hoz.

Tehát a Koch-görbe numerikusan közelített doboz-dimenziója ebben a példában 1,24945. Ez elég közel van a korábban számolt tényleges értékhez.

(A programkódok hűen követik a fent leírt eljárást.)

Megjegyezzük, hogy pontosabb értéket kaphatunk, ha jó nagy ábrát tudunk vizsgálni és ügyesen választjuk meg az RGB tűréshatárt.

Hivatkozások

- [1] Szabó László Imre: Ismerkedés a fraktálok matematikájával, Polygon, Szeged, 2005
- [2] Michael F. Barnsley: Fractals Everywhere, Second Edition, Morgan Kaufmann, 2000
- [3] Leindler László: Analízis, Polygon, Szeged, 2012
- [4] Szabó László: Konvex Geometria, MTA, Budapest, 1996
- [5] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Frakt%C3%A1l> 2018.05.04
- [6] <http://fractal.foundation.org/OFC/OFC-10-4.html> 2018.05.07
- [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Iterated_function_system 2018.04.20

A. Melléklet - Programkódok

■ 2. A Cantor-halmaz

```

vonalc={Line[{0,0},{1,0}]}];
Clear[Cantor]
Cantor[obj_List]:=obj/.Line[{P1_?VectorQ,P2_?VectorQ}]:>
Sequence[Line[{P1,P1+(P2-P1)/3}],
Line[{P1+2(P2-P1)/3,P2}]]
adatC=NestList[Cantor,vonalc,4];
GraphicsColumn[Table[Graphics[{RGBColor[0,0,0.5],
Thickness[0.002],adatC[[i]]},
PlotRange->{{0,1},{-0.1,0.1}},
ImageSize->{400,50},
AspectRatio->Automatic],
{i,1,Length[adatC]}]]

```

■ 3. A Sierpinski-háromszög

```

haromszog={Polygon[{1,0},{0,Sqrt[3]},{-1,0}]}];
Clear[Sierpinsky]
Sierpinsky[obj_List]:=obj/.
Polygon[{P1_?VectorQ,P2_?VectorQ,P3_?VectorQ}]:>
Sequence[
Polygon[{P1,(P1+P2)/2,(P1+P3)/2}],
Polygon[{P2,(P2+P1)/2,(P2+P3)/2}],
Polygon[{P3,(P3+P1)/2,(P3+P2)/2}]
]
adatS=NestList[Sierpinsky,haromszog,6];
GraphicsGrid[Partition[Table
[Graphics[{RGBColor[0.6,0,0],adatS[[i]]},
ImageSize->{100,100}],{i,1,Length[adatS]}],3]]

```

■ 4. A Sierpinski-szőnyeg

```

negyzet={Polygon[{{0,0},{1,0},{1,1},{0,1}}]};
Clear[Sszonyeg]
Sszonyeg[obj_List]:=obj/.Polygon
[{{P1_?VectorQ,P2_?VectorQ,P3_?VectorQ,P4_?VectorQ}}:~
Sequence[
Polygon[{P1,2/3*P1+1/3*P2,2/3*P1+1/3*P3,
2/3*P1+1/3*P4}],
Polygon[{2/3*P1+1/3*P2,2/3*P2+1/3*P1,
2/3*P2+1/3*P4,2/3*P1+1/3*P3}],
Polygon[{2/3*P2+1/3*P1,P2,2/3*P2+1/3*P3,
2/3*P2+1/3*P4}],
Polygon[{2/3*P1+1/3*P4,2/3*P1+1/3*P3,
2/3*P4+1/3*P2,2/3*P4+1/3*P1}],
Polygon[{2/3*P2+1/3*P4,2/3*P2+1/3*P3,
2/3*P3+1/3*P2,2/3*P3+1/3*P1}],
Polygon[{2/3*P4+1/3*P1,2/3*P4+1/3*P2,
2/3*P4+1/3*P3,P4}],
Polygon[{2/3*P4+1/3*P2,2/3*P3+1/3*P1,
2/3*P3+1/3*P4,2/3*P4+1/3*P3}],
Polygon[{2/3*P3+1/3*P1,2/3*P3+1/3*P2,
P3,2/3*P3+1/3*P4}]
]
adatSzonyeg=NestList[Sszonyeg,negyzet,4];
GraphicsGrid[Partition[Table[Graphics
[{{RGBColor[0.3,0,0.6],adatSzonyeg[[i]]},
ImageSize->{200,200}},{i,1,Length[adatSzonyeg]}],2]]

```

■ 5. A Menger-szivacs

```

cube={Cuboid[{0,0,0},{1,1,1}]};
Clear[Menger]
Menger[obj_List]:=obj/.
Cuboid[P1_?VectorQ,P2_?VectorQ]:~
Sequence[
Cuboid[P1,2/3*P1+1/3*P2],

```

```

Cuboid[P1+{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,0},
2/3*P1+1/3*P2+{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,0}],
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,0},
2/3*P1+1/3*P2+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,0}],
Cuboid[P1+{0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0},
2/3*P1+1/3*P2+{0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0}],
Cuboid[P1+{0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0},
2/3*P1+1/3*P2+{0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0}],
Cuboid[P1+{0,0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3},
2/3*P1+1/3*P2+{0,0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{0,0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},
2/3*P1+1/3*P2+{0,0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},2/3*P1+1/3*P2+
{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},2/3*P1+1/3*P2+
{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},2/3*P1+1/3*P2+
{0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},2/3*P1+1/3*P2+
{0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
(P2[[1]]-P1[[1]])/3},2/3*P1+1/3*P2+
{0,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,
(P2[[1]]-P1[[1]])/3},2/3*P1+1/3*P2+
{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0,(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},
2/3*P1+1/3*P2+{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}],
Cuboid[P1+{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,

```

```

2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0},2/3*P1+1/3*P2+
{(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0}},
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0},2/3*P1+1/3*P2+
{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0}},
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},
2/3*P1+1/3*P2+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}},
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0},2/3*P1+1/3*P2+
{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,0}},
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,(P2[[1]]-P1[[1]])/3},
2/3*P1+1/3*P2+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,(P2[[1]]-P1[[1]])/3}},
Cuboid[P1+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3},
2/3*P1+1/3*P2+{2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,
2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3,2*(P2[[1]]-P1[[1]])/3}}]
]
adatmenger=NestList[Menger,cube,3];
TableForm[Table[Graphics3D[adatmenger[[i]],
Boxed->False,ImageSize->{200,200}],
{i,1,Length[adatmenger]}]]

```

■ 6. A Koch-görbe és a Koch-féle pehely

```

vonall0={Line[{{0,0},{1,0}}]};
M=

$$\begin{pmatrix} \cos[\pi/3] & -\sin[\pi/3] \\ \sin[\pi/3] & \cos[\pi/3] \end{pmatrix};$$

Clear[Koch]
Koch[obj_List]:=obj/.
Line[{P1_?VectorQ,P2_?VectorQ}]:>
Sequence[Line[{P1,P1+(P2-P1)/3}],
Line[{P1+(P2-P1)/3,P1+(P2-P1)/3+M.((P2-P1)/3)}],
Line[{P1+(P2-P1)/3+M.((P2-P1)/3),P2-(P2-P1)/3}],
Line[{P2-(P2-P1)/3,P2}]]
GraphicsGrid[Partition[Table[Graphics
[{RGBColor[0,0,1],Nest[Koch,vonall0,i]},
ImageSize->{200,70}],{i,1,6}],2]]

```

```

vonall1={Line[{{1,0},{-1,0}}],Line[{{-1,0},
{0,Sqrt[3]}]},Line[{{0,Sqrt[3]},{1,0}}],};
Graphics[Nest[Koch,vonall1,5],
ImageSize->{400,400}]

```

■ 7. Függvény iterációk

```

forgatas[ω_]:=

$$\begin{pmatrix} \cos[\omega] & -\sin[\omega] \\ \sin[\omega] & \cos[\omega] \end{pmatrix}$$

fokusz[x_,y_,λ_,ω_]={{x,y},λ,forgatas[ω]};
kontrakcio[x_,y_,λ_,ω_,a_,b_]:=Point[
(fokusz[x,y,λ,ω][[3]].(
(1-fokusz[x,y,λ,ω][[2]])*fokusz[x,y,λ,ω][[1]]
+fokusz[x,y,λ,ω][[2]]*{a,b}
-fokusz[x,y,λ,ω][[1]]))
)+fokusz[x,y,λ,ω][[1]]]

```

```

Clear[kochI]
kochI[obj_List] :=
obj/.Point[P1_?VectorQ] =>
Sequence[
kontrakcio[0,0,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[5/14,Sqrt[3]/14,1/3, $\pi$ /3,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[9/14,Sqrt[3]/14,1/3,- $\pi$ /3,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[1,0,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]]
]
kezdopont1={Point[{0,0}]};
adatkochI=Nest[kochI,kezdopont1,6];
Graphics[adatkochI,Axes->True]

```

```

Clear[sierpinskihI]
sierpinskihI[obj_List] :=
obj/.Point[P1_?VectorQ] =>
Sequence[
kontrakcio[0,0,1/2,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[1,0,1/2,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[1/2,Sqrt[3]/2,1/2,0,P1[[1]],P1[[2]]]
]
kezdopont2={Point[{0,0.5}]};
adatsierpinskihI={PointSize[0.005],
Nest[sierpinskihI,kezdopont2,8]};
Graphics[adatsierpinskihI,Axes->True]

```

```

Clear[sszonyegI]
sszonyegI[obj_List]:=
obj/.Point[P1_?VectorQ]:>
Sequence[
kontrakcio[0,0,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[0,0.5,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[0,1,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[0.5,1,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[1,1,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[1,0.5,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[1,0,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]],
kontrakcio[0.5,0,1/3,0,P1[[1]],P1[[2]]]
]
kezdopont4={Point[{0.5,0.5}]};
adatsszonyegI=Nest[sszonyegI,kezdopont4,5];
Graphics[adatsszonyegI,Axes->True]

```

■ 9. A doboz-dimenzió

```

hatvany=10;
is=2^hatvany;

```

```

vonall0={Line[{{0,0},{1,0}}]};
M= $\begin{pmatrix} \cos[\pi/3] & -\sin[\pi/3] \\ \sin[\pi/3] & \cos[\pi/3] \end{pmatrix}$ ;
Clear[Koch]
Koch[obj_List]:=obj/.
Line[{P1_?VectorQ,P2_?VectorQ}]:>
Sequence[Line[{P1,P1+(P2-P1)/3}],
Line[{P1+(P2-P1)/3,P1+(P2-P1)/3+M.((P2-P1)/3)}],
Line[{P1+(P2-P1)/3+M.((P2-P1)/3),P2-(P2-P1)/3}],
Line[{P2-(P2-P1)/3,P2}]]
vonall1={Line[{{1,0},{-1,0}}],
Line[{{-1,0},{0,Sqrt[3]}]},
Line[{{0,Sqrt[3]},{1,0}}],};

```

```
Graphics[Nest[Koch,vonal1,6],
ImageSize→{is,is}]
```

```
img=Rasterize[%,RasterSize→is]
```

```
tureshatar=180;
data=(img[[1,1]]/.
{u_/;u<tureshatar,v_/;v<tureshatar,
w_/;w<tureshatar}→1)/.{u_,v_,w_}→0;
```

```
racs=Table[is/(2^k),{k,3,hatvany}];
pixelek[p_]=is/p;
ijpixelosszeg[i_,j_,p_]:=
Sum[Sum[data[[ (i-1)*p+v,(j-1)*p+w]],
{v,1,p}]],{w,1,p}];
```

```
data2=
Table[Table[Table[
If[ijpixelosszeg[i,j,racs[[z]]]>0,1,0]
,{j,1,pixelek[racs[[z]]]}],
{i,1,pixelek[racs[[z]]]}]
,{z,1,Length[racs]}];
```

```
GraphicsGrid[Partition[
Table[MatrixPlot[data2[[k]],
FrameTicks→None],
{k,1,Length[data2]}],4]]
```

```
lefedesek=Table[
Sum[Sum[data2[[z,i,j]]
,{j,1,Length[data2[[z,1]]]}],
{i,1,Length[data2[[z,1]]]}]
,{z,1,Length[data2]}]
```



```
hosszδ=Table[
  racs[[z]]/Dimensions[data][[1]]
, {z, 1, Length[racs]}]
```

```
hanyados=Table[
  Log[lefedesek[[z]]]/Log[1/hosszδ[[z]]]
, {z, 1, Length[racs]}]
```

```
koordinatak=Table[
  {Log[1/hosszδ[[z]]], Log[lefedesek[[z]]]}
, {z, 1, Length[racs]}]
```

```
ListPlot[koordinatak,
  AxesLabel→{"log  $\frac{1}{\delta}$ ", "log N( $\delta$ )"},
  PlotStyle→Red]
```

```
illesztettegyenes=Fit[koordinatak, {1, x}, x]
```

```
Show[ListPlot[
  koordinatak, AxesLabel→{"log  $\frac{1}{\delta}$ ", "log N( $\delta$ )"},
  PlotStyle→Red],
  Plot[illesztettegyenes, {x, 2, 7}]]
```

Nyilatkozat

Alulírott Gehér Péter kijelentem, hogy a szakdolgozatban/diplomamunkában foglaltak a saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat/diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

.....