A kvantummechanika utalásai a geometria lehetséges elemi objektumaira

Benedict Mihály
SZTE Elméleti Fizikai Tanszék.

Geometria Tanszék szemináriuma 2014 február 13

Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1]).

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

A geometriai föltevések érvényességének kérdése a végtelen kicsiben a tér belső alapjainak metrikus viselkedésére vonatkozó kérdéssel függ össze. Ennél a kérdésnél, amelyet még mindig a tér tudományához tartozónak lehet tekintenünk, használjuk azt a korábbi észrevételt, hogy egy diszkrét sokaságnál a metrikus tulajdonságok elvét már maga a fogalom tartalmazza, míg egy folytonosnál annak kívűlről kell megjelennie. Tehát a valóságból származó tér fogalma vagy egy diszkrét sokaság, vagy a metrikus tulajdonságok alapjait kívül, a rá ható kötő erőkben kell keresnünk.

150 B. RIEMANN, ÜB. DIE HYPOTHESEN u. s. w.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Thatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.

Stetigkeit

und

irrationale Zahlen.

Von

Richard Dedekind,
Professor der höheren Mathematik am Collegium Carolinum zu Braunschweig.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1872.

Folytonosság és a diszkrétség egysége KVANTUMMECHANIKA

Kvantummechanika: részecske állapotait egy Hilbert tér vektoraival adjuk meg, valójában azonban mindig egy bázisra vonatkoztatjuk a vektort, azaz komponenseket (valószínűségi) amplitúdókat adunk meg.
Véges dimenzióban (pl. spin) ez pontosan működik.

A hely (mint állapotjellemző) esetén koordinátatérben viszont a szigorú matematikai értelemben nem egészen működik.
Ott a valószínűségi amplitúdó a hullámfüggvény $\Psi(x)$

$\lvert\Psi(x)\rvert^2 = \varrho(x), \quad \lvert\tilde{\Psi}(p)\rvert^2 = \tilde{\varrho}(p)$ ahol
$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(p) = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(x)) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int \Psi(x)e^{-ipx/\hbar}dp$

Diracnál x éppen olyan vektor mint Ψ és $\Psi(x) = \langle x|\Psi\rangle$ $\langle x|x_0\rangle = \delta(x - x_0)$

Ugyanígy az impulzusra is
Egy megoldás Neumann: spektráltétel: X nem korlátos operátor, tisztán folytonos a spektruma,

Kvantummechanika II

$$\Psi(x) \to X\Psi(x) := x\Psi(x), \quad \tilde{\Psi}(p) \to P\tilde{\Psi}(p) := p\tilde{\Psi}(p)$$

$$P\Psi(x) = -i\hbar\partial_x\Psi(x), \quad e^{-iPa/\hbar}\Psi(x) = \Psi(x+a)$$

Born-Heisenberg

$$XP - PX = i\hbar \quad \to \quad (\Delta X)_\psi(\Delta P)_\psi \geq \hbar/2 \quad \forall\psi \in L^2$$

Intelligens állapotok telítik:

$$\psi_{in}(x) = (\pi\lambda^2)^{-1/4}\exp\{-(x-x_0)^2/2\lambda^2\}\exp\{ip_0x/\hbar\}$$

$$\langle X\rangle_{in} = x_0, \quad \langle P\rangle_{in} = p_0$$

$$(\Delta X)_{in} = \lambda/\sqrt{2} \quad (\Delta P)_{in} = \hbar/(\lambda\sqrt{2})$$

Neumann: Próbáljunk meg megadni X' és P' lineáris operátokat, amelyek távolsága az X és P operátoroktól elegendően kicsi de azoktól eltérően diszkrét és *közös* pontspektrumuk van, ezek lennének a klasszikus koordináta és impulzus

Neumann konstrukció 1929, 1932

Legyen a tetszőleges valós és $b = 2\pi/a$. A

$$\boxed{\varphi_{mn}(x) = \left(\frac{1}{\pi\lambda^2}\right)^{1/4} e^{imbx}\exp\{-(x-na)^2/2\lambda^2\} \quad m,n \in \mathbb{Z},}$$

rendszer a

$$\boxed{x_0 = na, \qquad p_0 = m\hbar b = m\hbar\frac{\hbar}{a} = m\frac{h}{a}}$$

diszkrét adatoknak megfelelő intelligens állapotok,

a teljességük **nem** nyilvánvaló, de nyilvánvaló, hogy **nem** ortogonálisak.

Állítás Neumann: a φ_{mn} állapotrendszer teljes és ortogonalizálható úgy, hogy a már ortogonális $\varphi'_{mn}(x)$-ekre

$\|(X-na)\varphi'_{mn}\| \leq C\lambda/\sqrt{2}$, és $\|(P-m2\pi\hbar/a)\varphi'_{mn}\| \leq C\hbar/(\lambda\sqrt{2})$.

Neumann szerint ez megtehető úgy hogy $C \sim 60$

Ezek a φ'_{mn}-k olyan X' és P' *fölcserélhető* operátorokat jelölnének ki, amelyek egyszerre pontosan lennének mérhetők a φ'_{mn} bázison.

Makroszkopikus és diszkrét koordináta és impulzus.

Nem bizonyítja, mert „hosszadalmas, és semmi új nincs benne”

A teljesség bizonyításáról

A teljesség bizonyítása: Perelomov (1970)

tetszőleges $ab \neq 2\pi$ szorzatot tekint.

a rendszer pontosan akkor teljes , ha $ab = 2\pi$,

nem teljes, ha $ab > 2\pi$,

"túlteljes" overcomplete ha $ab < 2\pi$

Megjegyzés: az $x_0\ p_0$ tetszőleges eset, (túlteljes rendszer)
jól ismert a kvantummechanikában ill. a kvantumoptikában

Sackur-Tetrode entrópia !
Fáziscella mérete

$$\delta x \delta p = h$$

1971 Bargmann, Butera, Girardello, Klauder, ugyanúgy

1975 Bacry, Grossmann, Zak, "elemi" bizonyítás

Legyen a és $b = 2\pi/a$ valós, és $\varphi_0(x) \in L^2$, akkor a

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{mn}(x) &= T_{mn}\varphi_0(x) = e^{imbX}e^{-inaP}\varphi_0(x) = \\ e^{-inaP}e^{imbX}\varphi_0(x) &= e^{imbx}\varphi_0(x-na) \quad m,n \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

függvényrendszer teljes.

A $\varphi_0(x) = (\pi\lambda^2)^{-1/4}\exp\{-x^2/2\lambda^2\}$ ($\lambda^2 = \hbar/m\omega$ esetén HO alapállapot)
a Neumann eset.

Zak reprezentáció

Tekintsük egy tetszőleges $\psi(x) \in L^2$ beli függvény "Zak transzformáltját": $\mathcal{Z}\psi = C_\psi(k,q)$

$$\psi(x) \in L^2 \longrightarrow \mathcal{Z}\psi = C_\psi(k,q) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{ika\ell}\psi(q-\ell a)$$

$$a \in \mathbb{R}, \qquad -\frac{\pi}{a} < k \le \frac{\pi}{a}, \qquad -\frac{a}{2} < q \le \frac{a}{2}$$

Peremföltételek:

$$C_\psi(k+b,q) = C_\psi(k,q)$$
$$C_\psi(k,q+a) = e^{ika}C_\psi(k,q)$$

Operátorok Zak: $X \to i\frac{\partial}{\partial k} + q, \quad P \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$

Ha $\psi(x) \in L^2$, akkor $C_\psi(k,q)$ is négyzetesen integrálható a jelzett intervallumon, és a leképezés őrzi a belső szorzatot, azaz

$$\int \psi^*(x)\chi(x)dx = \int_{a/2}^{a/2}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_\psi^*(k,q)C_\chi(k,q)dkdq$$

Inverz transzformáció:

$$\psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_\psi(k,x)dk$$

A teljesség bizonyítása

A $\varphi_{mn}(x) = e^{imbx}\varphi_0(x-na)$ rendszer teljessége

A rendszer Zak transzformáltjai $\left(C_\psi(k,q) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{ika\ell}\psi(q-\ell a) \right)$

$$C_{\varphi_{mn}}(k,q) =: C_{mn}(k,q) = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{ika\ell} e^{imb(q-\ell a)} \varphi_0(q-na-\ell a) =$$

$$(n+\ell = \ell' \to \ell) = e^{imbq} \left(\frac{a}{2\pi}\right)^{1/2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{ika(\ell-n)} \varphi_0(q-\ell a) = e^{imbq-ikan} C_{\varphi_0}(k,q)$$

Legyen $g(x)$ tetszőleges, és legyen g ortogonális a $\varphi_{mn}(x)$ rendszer minden elemére. Megmutatjuk, hogy $g = 0.$

A belső szorzatot a Zak transzfomáltakkal számítjuk:

$$a_{mn} := \int g^*(x)\varphi_{mn}(x)dx = \int\int g^*(k,q)C_{\varphi_{mn}}(k,q)dkdq$$

$$= \int\int g^*(k,q)C_{\varphi_0}(k,q)e^{imbq-ikan}dkdq = 0$$

Az a_{mn} számok láthatóan a periodikus $g^*(k,q)C_{\varphi_0}(k,q)$ függvény Fourier együtthatói. Eszerint minden Fourier együttható 0, azaz $g^*(k,q)C_{\varphi_0}(k,q) = 0$ azaz $g(k,q) = 0.$

A rendszer ortogonalitásának kérdése

(1) Teljes, de nem ortogonális: ortogonalizálható (Neumann), Viszont az ortogonalizált báziselemek már nem lesznek ilyen jó tulajdonságúak, azaz nem a "jó" φ_0 kezdő állapotból a T_{mn} eltolásokkal generált báziselemeket kapjuk, hanem ilyenek végtelen szuperpozícióját, amelyek már nem lesznek jól lokalizálva az x, p síkon.

(2) Kiderül, hogy más négyzetesen integrálható és mind x-ben mind p-ben véges szórással rendelkező függvényből sem lehet a T_{mn} eltolásokkal ortonormált bázist generálni: Balian-Low tétel.

Ha nem írjuk elő a véges szórást, akkor vannnak ilyen függvények, pl. a szilárdtestfizikában használt Wannier függvények, ezekre egy példa:

$$\tilde{\varphi}_0^W(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{ha } |k| \le \pi \\ 0, & \text{ha } |k| > \pi \end{cases}, \quad \varphi_0^W(x) = \mathcal{F}\tilde{\varphi}_0^W = (2\pi)^{-1/2} \int \tilde{\varphi}_0^W(k) e^{ikx} dk = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

A $T_{mn}\varphi_0^W(x)$ rendszer ortonormált bázis. Ennek sűrűségfüggvénye az impulzustérben $|\tilde{\varphi}_0^W(k)|^2$ $(k = p/\hbar)$ jól lokalizált, de a koordinátában $|\varphi_0^W(x)|^2$ túl lassan tűnik el $\Delta X = \infty$.

Balian-Low tétel

Balian Low tétel

Ha a $\varphi_0(x)$-ből generált $\varphi_{mn}(x) = T_{mn}\varphi_0(x)$ függvények ortonormált bázist alkotnak L^2-n, akkor $X\varphi_0(x) = x\varphi_0(x)$ és $P\varphi_0(x) = -i\hbar\partial_x\varphi_0(x)$

azaz $x\varphi_0(x)$ és $p\tilde{\varphi}_0(p)$

nem lehet egyszerre négyzetesen integrálható.

Tehát vagy az X vagy a P operátor másodrendű momentuma divergens, azaz a $\varphi_0(x)$ állapoton a koordinátát és az impulzust nem lehet egyszerre véges szórással mérni.

$\Rightarrow$ "Jó" $\varphi_0(x)$-ből nem lehet ortonormált bázist generálni az mn rácson.

Balian-Low tétel bizonyítása Battle 1988

A föltétel szerint

$$0 \neq \varphi_0 = \varphi_{00} \in L^2, \quad X\varphi_0 = x\varphi_0 \in L^2, \quad P\varphi_0 = -i\hbar\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \in L^2,$$

Ha $\varphi_{mn} = T_{mn}\varphi_0$ ortonormált bázis, akkor

$$\langle X\varphi_0|P\varphi_0\rangle = \sum_{mn}\langle X\varphi_0|T_{mn}\varphi_0\rangle\langle T_{mn}\varphi_0|P\varphi_0\rangle =$$

$$= \sum_{mn}\langle \varphi_0|XT_{mn}\varphi_0\rangle\langle PT_{mn}\varphi_0|\varphi_0\rangle$$

$$XT_{mn} = [X, T_{mn}] + T_{mn}X \quad PT_{mn} = [P, T_{mn}] + T_{mn}P$$

$$\langle \varphi_0|[X, T_{mn}]\varphi_0\rangle = na\langle \varphi_0|T_{mn}\varphi_0\rangle = 0, \quad \langle [P, T_{mn}]\varphi_0|\varphi_0\rangle = \hbar mb\langle T_{mn}\varphi_0|\varphi_0\rangle = 0$$

$$\langle X\varphi_0|P\varphi_0\rangle = \sum_{mn}\langle \varphi_0|XT_{mn}\varphi_0\rangle\langle PT_{mn}\varphi_0|\varphi_0\rangle =$$

$$\sum_{mn}\langle \varphi_0|T_{mn}X\varphi_0\rangle\langle T_{mn}P\varphi_0|\varphi_0\rangle = \sum_{mn}\langle T_{-m-n}\varphi_0|X\varphi_0\rangle(P\varphi_0|T_{-m-n}\varphi_0) = \langle P\varphi_0|X\varphi_0\rangle$$

Így $\langle \varphi_0|(XP - PX)\varphi_0\rangle = 0$, de tudjuk, hogy $(XP - PX)\varphi_0 = i\hbar\varphi_0$:

$$0 = i\hbar\langle \varphi_0|\varphi_0\rangle \Rightarrow \varphi_0 = 0 \quad \square$$

1982

Wilson bázisok

Phase Space Wannier Functions
in Electronic Structure Calculations 1989

K. G. Wilson

Wilson és munkatársai egy olyan $\psi_{mn}(x)$ ortonormált bázist generáltak numerikusan amelyre

$$\boxed{\psi^{wi}_{mn}(x) = f_m(x - na), \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{ahol}}$$

$$\boxed{\tilde{f}(k) = \mathcal{F}^{-1} f = (2\pi)^{-1/2} \int f(x) e^{-ikx} dk}$$

kétpúpú, $-m/2$ és $m/2$ nél van maximuma, azaz $\tilde{\phi}^{+}(k)$ és $\tilde{\phi}^{-}(k)$ 0-ra centrált függvényekkel

$$\boxed{\tilde{f}_m(k) = \tilde{\phi}^{+}(k - m/2) + \tilde{\phi}^{-}(k + m/2)}$$

Mind a k mind az x térben exponenciálisan lecsengőek, tehát jól lokalizáltak.

Wilson bázis egyetlen induló függvényből

Daubechies, Jaffard, Journée (1991) expliciten konstruáltak Wilson bázist *egyetlen* $\tilde{\phi}$ függvény segítségével:

$$\boxed{\psi_{0n}(x) = \tilde{\phi}(x - na),}$$

$$\boxed{\psi_{mn}(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{a}xm\right)\tilde{\phi}\left(x - n\frac{a}{2}\right), \quad \text{ha } m > 0,\ m+n \text{ páros}}$$

$$\boxed{\psi_{mn}(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{a}xm\right)\tilde{\phi}\left(x - n\frac{a}{2}\right), \quad \text{ha } m > 0,\ m+n \text{ páratlan}}$$

$\tilde{\phi}$-t az szabja meg, hogy a $\phi = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\phi})$ Zak transzformáltja $C_\phi = \mathcal{Z}\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\phi})$ teljesíti a

$$\boxed{|C_\phi(k,q)|^2 + |C_\phi(k,q+a/2)|^2 = 2}$$

föltételt. Egy lehetséges ϕ az intelligens állapotból származtatható

Daubechies et al. rekurzióval generálják az ortogonalitást biztosító együtthatókat

This can be used to write ϕ as a combination of g_{mn}, with coefficients computed recursively. For instance, if g is Gaussian, $g^{\nu}(x) = (2\nu)^{1/4} e^{-\nu\pi x^2}$, then we find

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{A_\nu + B_\nu}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{mn} g^{\nu}_{mn}(x) \tag{6.2}$$

with

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} b^k_{mn}, \\ b^k_{mn} &= \left(1 - \frac{2}{A_\nu + B_\nu}\right) b^{k-1}_{mn} - \frac{2}{A_\nu + B_\nu} \sum_{(m',n') \neq (m,n)} \omega_{mn,m'n'} b^{k-1}_{m'n'}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

where

$$\omega_{mn,m'n'} = \exp\left[i(m'-m)(n+n')\frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2}(n-n')^2 - \frac{\pi}{8\nu}(m-m')^2 \right],$$

$$b^0_{mn} = \delta_{m0}\delta_{n0}.$$

While this seems lengthy, it is very easy to program on a computer. The procedure converges at least as fast as a geometric series in $(B_\nu - A_\nu)/(B_\nu + A_\nu)$. For $\nu = .5$ we find $A_\nu = 1.670$, $B_\nu = 2.361$, $(B_\nu - A_\nu)/(B_\nu + A_\nu) = .1712$; for $\nu = 2^{-1/2}$, we have $A_\nu = 1.533$, $B_\nu = 2.492$, $(B_\nu - A_\nu)/(B_\nu + A_\nu) = .2381$. Figures 1 and 2 give graphs of ϕ and $\hat{\phi}$, for $\nu = .5$ and $\nu = 2^{-1/2}$, respectively.

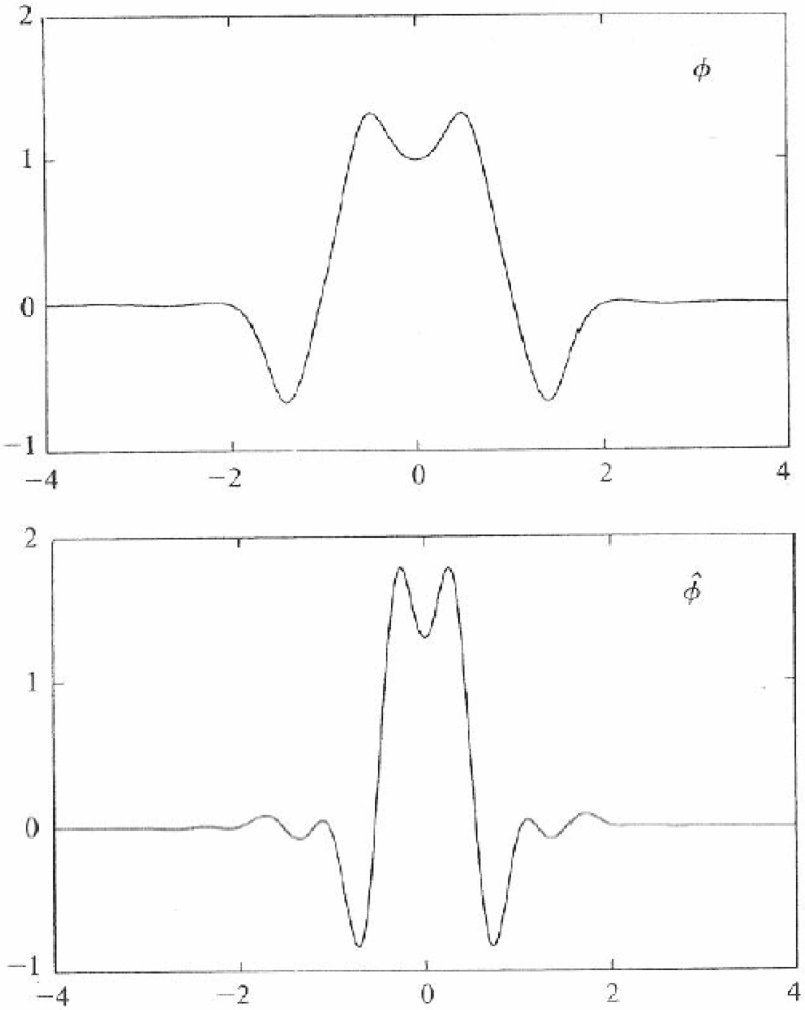

FIG. 2. *Plots of* ϕ *and* $\hat{\phi}$ *constructed from* $g(x)=2^{1/8}\,e^{-\pi x^2/\sqrt{2}}$. *For this choice of* g, *the decay rates of* ϕ *and* $\hat{\phi}$ *are identical (see* (4.18)). *We have again used* (6.2), (6.3) *to compute* ϕ; $\hat{\phi}$ *is simply obtained by replacing* g^{ν}_{mn} *in* (6.2) *by* $(g^{\nu}_{mn})^{\wedge}(y)=(-1)^{mn}\,e^{2\pi iyn}\,g^{1/\nu}(y+(m/2))$.

Zak féle Wilson bázis I. 2002-3

$$\Phi_{mn}(k,q) = \frac{\mathcal{C}_{mn}(k,q)}{S^{1/2}(k,q)}$$

$$\mathcal{C}_{mn}(k,q) = e^{-ikan}\left[\left(\cos\frac{2\pi}{a}(q-\frac{a}{4})m\right)\mathcal{C}_0(k,q) + i\left(\sin\frac{2\pi}{a}(q-\frac{a}{4})m\right)\mathcal{C}_0(k,q-\frac{a}{2})\right]$$

$$S(k,q) = \theta_3\left(ka/2 \mid ia^2/4\pi\right)\theta_3(2\pi q/a \mid i4\pi\lambda^2/a^2)$$

$$\mathcal{C}_0(k,q) = \mathcal{Z}\left((\pi\lambda^2)^{-1/4}\exp\{-x^2/2\lambda^2\}\right) = \left[\frac{a}{2\lambda\pi^{3/2}}\right]^{1/2}\sum_n \exp\left(ikan - \frac{(q-na)^2}{2\lambda^2}\right)$$

$$\theta_3(z|\tau) = \sum_n \exp(2izn + i\pi\tau n^2) \quad \text{Jacobi theta}_3$$

$\mathcal{C}_{mn}(k,q)$ rendszer teljes de nem ortogonális.

$\Phi_{mn}(k,q)$ teljes és ortonormált.

$\mathcal{C}_{mn}(k,q)$ függvények $m = 0$-ra az $x_0 = na,\ p_0 = 0$ intelligens állapotok.

$m \neq 0$-ra 4 intelligens állapot lineáris kombinációi.

Zak féle Wilson bázis II.

Ezek a következő $\{x, p/\hbar\}$ rácspontokon centráltak :

$$\left\{na, m\frac{2\pi}{a}\right\}, \quad \left\{na, -m\frac{2\pi}{a}\right\}$$

$$\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)a, m\frac{2\pi}{a}\right\}, \quad \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)a, -m\frac{2\pi}{a}\right\}$$

A $\Phi_{mn}(k,q)$ hasonló tulajdonságú, ami a centráltságot illeti.

Emiatt ezek x-ben jól lokalizáltak, $a = \sqrt{2\pi}\,\lambda$ esetén

$$\langle X\rangle = a(n+1/4), \quad (\Delta X) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}(1+\pi/4)$$

p-ben nem, p^2-ben viszont igen,

azaz $|p|$ látszik jó közelítő kvantumszámnak.

$$\langle P^2\rangle = \frac{h^2}{a^2}\left(m^2+\frac{1}{4\pi}\right), \quad \Delta(P^2) = \frac{h^2}{2\sqrt{\pi}\,a^2}(1+8\pi m^2)^{1/2}$$

Neumann program X' és $(P^2)'$ esetén végrehajtva

Befejezés: „lehetséges utalások”