

Sokszögekre vonatkozó extrémális problémák

Budai Boglárka

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2010

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Jensen-egyenlőtlenség	4
3. Csillagsokszögek	5
4. Izoperimetrikus probléma sokszögekre	10

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban síkbeli (nemcsak konvex) sokszögekre vonatkozó néhány híres szélsőérték problémát vizsgálunk. Ezekben a problémákban az a közös vonás, hogy mindegyik esetében a szabályos (de nem feltétlenül konvex) n -szög lesz az egyértelmű megoldás. Szabályos sokszögön esetünkben olyan sokszöget értünk, melynek oldalhosszai és szögei rendre egyenlők. Ebbe a definícióba beleférnek például a nemkonvex szabályos csillagsokszögek is.

A dolgozat első részében a konvex függvényekre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenséget mondjuk ki és bizonyítjuk be. Habár a Jensen-egyenlőtlenség közismert és számos tankönyv tartalmazza pontos bizonyítását, mi úgy éreztük, hogy mégis érdemes leírni a Fejes Tóth Lászlótól származó elegáns bizonyítást. A következő részben két, a csillagsokszögek területére vonatkozó egyenlőtlenséget bizonyítunk, ami azért is érdekes, mert ez kiterjesztése a konvex sokszögekre vonatkozó hasonló egyenlőtlenségeknek. Ezt annak a kérdésnek a megválaszolásával folytatjuk, hogy egy fix körben lévő véges sok pontból álló halmazban a pontok mely konfigurációja mellett minimális a pontpárok távolságösszege. Itt is kimutatjuk, hogy a minimum a körbe írt szabályos esetben áll fenn. Ezt követi egy fizikai motivációjú szélsőértékprobléma, ahol egy körbe írt pontrendszer esetén azt az optimális konfigurációt keressük, amikor a pontpárok távolságának reciprokösszege minimális. Végül az utolsó fejezetben a konvex sokszögekre vonatkozó izoperimetrikus jellegű egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Ennek igazolásához szükségünk van, a szokásos Jensen-egyenlőtlenségen kívül a Minkowski által bevezetett külső és belső paraleltartomány fogalmára is.

A dolgozatban szereplő problémák tárgyalása alapvetően Fejes Tóth László [1] *Reguläre Figuren* című iskolateremtő könyvének VI. fejezetén alapszik. Az ott található elegáns gondolatmeneteket próbáltuk magyar nyelvre átültetni, értelmezni és a magunk megjegyzéseivel kiegészíteni.

2. Jensen-egyenlőtlenség

A szabályos sokszögek sok érdekes tulajdonságának bizonyításában felhasználjuk a konvex függvényekre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenséget. Mivel dolgozatunkban ezt a nevezetes egyenlőtlenséget többször is alkalmazni fogjuk, megmutatjuk egy Fejes Tóth Lászlótól származó elegáns bizonyítását.

1. Definíció. Az I intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényt konvexnek nevezzük, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$ esetén igaz, hogy

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

2.1. Tétel (Jensen-egyenlőtlenség). Legyen az I intervallumon értelmezett $f(x)$ valós függvény konvex. Ekkor tetszőleges $x_1, \dots, x_n \in I$ -re és n -re igaz, hogy

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x_1 = \dots = x_n$, vagy ha $f(x)$ a $[\min_i x_i, \max_i x_i]$ intervallumon lineáris.

Bizonyítás. A bizonyítást n -re vonatkozó indukcióval végezzük. Azonban az indukció sajátos módon történik. Először is megjegyezzük, hogy a Jensen-egyenlőtlenség az $n = 2$ esetben éppen az $f(x)$ függvény konvexitásának definíciója, ezért nyilvánvalóan teljesül. Ebből következik a Jensen-egyenlőtlenség $n=4$ -re:

$$f(x_1) + \dots + f(x_4) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_2 + x_4}{2}\right) \geq 4f\left(\frac{x_1 + \dots + x_4}{4}\right),$$

és ugyanígy $n = 8$ -ra, 16 -ra, és $n = 2^k$ -ra, ahol k tetszőleges pozitív egész szám.

Ezután nyilván elég azt megmutatni, hogy az egyenlőtlenség teljesüléséből egy adott n -re következik annak teljesülése $n - 1$ -re is. Ehhez az

$$x_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n - 1}$$

egyenletet használjuk a következőképpen.

$$f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n}\right) = nf(x_n),$$

amiből

$$f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \geq (n-1)f(x_n) = (n-1)f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}\right)$$

következik. □

Azokat az I intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényeket *konkávnak* szoktuk nevezni, amelyekre pont az ellenkező irányú egyenlőtlenségek állnak fent a Jensen-egyenlőtlenségben.

3. Csillagsokszögek

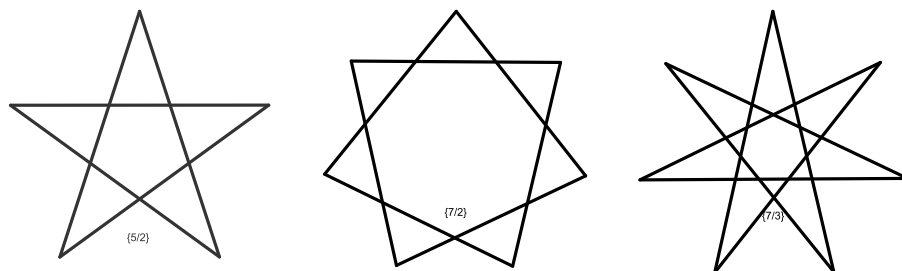
Szabályosnak nevezzük azt a sokszöget, amelynek oldalai egyenlő hosszúságúak és szögei egyforma nagyságúak. Elemi geometriából ismert tény, hogy egy szabályos sokszög beírt köre és körülírt köre koncentrikus. Legyen egy szabályos sokszögnek n oldala és járja körül a beírt körének O középpontját pontosan d -szer. Ekkor a sokszög egy oldala által meghatározott O csúcsú középponti szög éppen $\frac{2\pi d}{n}$ nagyságú. Továbbá n és d relatív prímek, és $2d < n$. Egy ilyen szabályos sokszögre bevezetjük a következő jelölést: $\{\frac{n}{d}\}$, a sokszög ún. Schläfli-szimbólumát. Szokásos módon, a d számot a sokszög sűrűségének nevezzük.

Egyszerűnek hívjuk azt a sokszöget, aminek az oldalai nem átmetszők. Vegyük észre, hogy a szabályos sokszög fenti definíciójában a sokszög pontosan akkor egyszerű, ha $d = 1$. Ha $d > 1$, akkor a sokszöget szabályos csillagsokszögnek nevezzük.

Egy zárt síkbeli ponthalmaz esetén nevezzük beírt körnek azt a nagyobb zárt körlemez, amit a ponthalmaz tartalmaz és körülírt körnek a legkisebb kört, ami a halmazt tartalmazza. Egy csillagsokszög beírt köre a magjának beírt körként van definiálva.

Egy konvex lemez területét $A(\cdot)$ -val jelöljük, Legyen Q_1, Q_2, Q_3 egy háromszög három csúcsa. Speciálisan, jelölje $A(Q_1Q_2Q_3)$ a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög előjeles területét, amely pozitív, ha a Q_1, Q_2, Q_3 csúcsok a háromszög pozitív körüljárását adják, és negatív ha negatív körüljárását. Ennek segítségével definiálhatjuk egy tetszőleges $Q_1Q_2 \dots Q_n$ sokszög (előjeles) területét a következőképpen:

$$A(Q_1Q_2 \dots Q_n) = \sum_{i=1}^n A(OQ_{i-1}Q_i), Q_0 = Q_n,$$



1. ábra. Szabályos csillagsokszögek

ahol O a sík egy tetszőleges pontja.

Most bebizonyítunk egy csillagsokszögre vonatkozó egyenlőtlenséget.

3.1. Lemma. *Egy n oldalú csillagszögre, aminek sűrűsége d és területe A , igaz a következő egyenlőtlenség.*

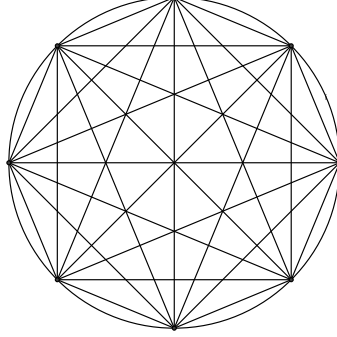
$$r^2 n \tan \frac{\pi d}{n} \leq A \leq \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{2\pi d}{n}, \quad (1)$$

ahol r és R a sokszög beírt és körülírt körének sugarát jelöli. Egyenlőség csakis szabályos csillag- n -szögre áll fenn.

Bizonyítás. Legyenek $Q_1, \dots, Q_n$ a Q csillagsokszög egymást követő csúcsai pozitív körüljárás szerint, és legyen O a beírt körének középpontja. Ekkor

$$A(OQ_{i-1}Q_i) \geq r^2 \tan \frac{\omega_i}{2}, \quad Q_n = Q_o, \quad \omega_i = \angle Q_{i-1}OQ_i.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a beírt kör a $Q_{i-1}Q_i$ szakaszt éppen a felezőpontjában érinti.



2. ábra.

Továbbá $0 < \omega_i < \pi$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 2\pi d$ és a $\tan x$ konvexitása miatt a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ -n a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$A \geq r^2 \sum_{i=1}^n \tan \frac{\omega_i}{2} \geq r^2 n \tan \frac{\pi d}{n}.$$

A lemmában szereplő második egyenlőtlenség bizonyításához először is vetítsük a Q csúcsait az O pontból a körülírt körre. Mivel ezzel Q területe nem csökken, feltehetjük, hogy Q bele van írva a körülírt körébe.

Ha O' a körülírt kör középpontja, akkor

$$A = \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i, \quad \varphi_i = \angle Q_{i-1} O' Q_i.$$

Ha $\varphi_i > \pi$, akkor $\varphi_{i+1} < \pi$, és a $\varphi_i + \varphi_{i+1} < 2\pi$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sin \varphi_i + \sin \varphi_{i+1} < 2 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2}.$$

Ez utóbbit az alábbi módon lehet igazolni.

$$\sin \frac{\varphi_i}{2} \cos \frac{\varphi_i}{2} + \sin \frac{\varphi_{i+1}}{2} \cos \frac{\varphi_{i+1}}{2} < \sin \frac{\varphi_i}{2} \cos \frac{\varphi_{i+1}}{2} + \cos \frac{\varphi_i}{2} \sin \frac{\varphi_{i+1}}{2},$$

$$\sin \frac{\varphi_i}{2} \left(\cos \frac{\varphi_i}{2} - \cos \frac{\varphi_{i+1}}{2} \right) < \sin \frac{\varphi_{i+1}}{2} \left(\cos \frac{\varphi_i}{2} - \cos \frac{\varphi_{i+1}}{2} \right),$$

$$\sin \frac{\varphi_i}{2} > \sin \frac{\varphi_{i+1}}{2}.$$

Így tehát, ha φ_i -t és φ_{i+1} -t helyettesítjük a számtani közepükkel, akkor a $\sum_{i=1}^n \sin \varphi_i$ összeg nő. Ezzel a módszerrel lépésenként eltüntetjük a π -nél nagyobb szögeket, majd alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenséget a $\sum_{i=1}^n \varphi_i = 2\pi d$ segítségével és végül megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget. $\square$

Ha kombináljuk az (1)-ben lévő két egyenlőtlenséget, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{R}{r} \geq \sec \frac{\pi d}{n}.$$

Könnyen megmutatható, hogy egy tetszőleges egyszerű n -szögre igaz, hogy

$$r^2 n \tan \frac{\pi}{n} \leq A \leq \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Ez belátható például úgy, ha az (1) egyenlőtlenségeket a sokszög konvex burkára alkalmazzuk.

A fenti egyenlőtlenségek azt a jól ismert tényt bizonyítják, hogy a kört tartalmazó illetve körben lévő egyszerű n -szögek közül azoknak van a legkisebb illetve legnagyobb területük, amelyek szabályosak és a kör köré illetve abba vannak írva.

Jelölje P a területet. Tetszőleges csillag n -szögre:

$$P \geq 2rn \tan \frac{\pi d}{n}.$$

Azonban az $P \leq 2Rn \sin \frac{\pi d}{n}$ egyenlőtlenség csak „konvex csillagsokszögekre” áll fenn, azaz olyan csillagsokszögekre, amelyekben minden belső szög kisebb mint π .

Most tekinteni fogunk egy másik kérdést, amire a megoldást szabályos sokszögek adják.

Tekintsünk a síkon $n \geq 2$ pontot, amik lefedhetők egy R sugarú körlemezrel. Tegyük fel azt is, hogy R minimális, azaz a megfelelő R sugarú kör a pontthalmaz körülírt köre. Jelölje S a halmazbeli pontpárok távolságainak összegét. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a pontok milyen elhelyezkedése mellett lesz S minimális. A választ a következő lemma adja meg.

3.2. Lemma.

$$S \leq Rn \cot \frac{\pi}{2n}. \quad (2)$$

Továbbá az is igaz, hogy a fenti egyenlőtlenségben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a pontok az R sugarú körülírt körbe írt szabályos n -szög csúcsai.

Bizonyítás. Legyen az O egy tetszőleges rögzített pont a síkon. Ekkor nem nehéz belátni, hogy a QO távolság Q -nak konvex függvénye. Ez abból is jól látszik, hogy

$$|\overrightarrow{OQ}| + |\overrightarrow{OQ'}| \geq |\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ'}|.$$

Ezért

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Q_i Q_j,$$

mint a konvex függvények összege, maga is egy konvex függvénye az egyes Q_i pontoknak.

Mivel egy konvex függvény egy szakaszon a maximumát mindig a szakasz egyik végpontjában veszi fel, ezért feltehetjük, hogy minden Q_i pont a körülírt kör határán, a C körvonalon fekszik.

Legyenek a Q_i pontok ciklikusan indexelve a C körön; továbbá legyen $R = 1$.

Tekintsük a következő összeget:

$$s_k = \sum_{i=1}^n Q_i Q_{i+k} = 2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{2} \widehat{Q_i Q_{i+k}}, \quad (Q_{n+j} = Q_j),$$

ahol $1 \leq k \leq n-1$ és $\widehat{Q_i Q_{i+k}}$ jelöli a C körön a Q_i és Q_{i+k} pontok által meghatározott ívet.

A $0 \leq \frac{1}{2} \widehat{Q_i Q_{i+k}} \leq \pi$ egyenlőtlenségből és a $\sin x$ függvény konkávitásából a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumon következik, hogy

$$s_k = 2n \sin \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \widehat{Q_i Q_{i+k}} \right) = 2n \sin \frac{\pi k}{n}.$$

Most pedig vegyük észre, hogy egyrészt $s_k = s_{n-k}$, és páros n -re az $s_{\frac{n}{2}}$ összeg minden $Q_i Q_{i+\frac{n}{2}}$ távolságot kétszer tartalmaz, így

$$2S = \sum_{k=1}^{n-1} s_k.$$

Következésképpen

$$S \leq n \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = n \cot \frac{\pi}{2n},$$

ami bizonyítja állításunkat. $\square$

3.3. Lemma. *Legyenek a $Q_1, \dots, Q_n$, $n \geq 3$ pontok a C körvonalon. Ekkor az összeg*

$$T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{Q_i Q_j} \quad (3)$$

pontosan akkor éri el a minimumát, ha $Q_1, \dots, Q_n$ egy szabályos n -szög csúcsai.

Bizonyítás. Legyen a Q_i pontok ciklikus sorrendje a C körvonalon $Q_1, \dots, Q_n$, és legyen a C kör sugara 1. A koszekáns (a szinusz függvény reciproka) függvény konvexitása miatt a $(0, \pi)$ intervallumon kapjuk, hogy

$$2T = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Q_i Q_{i+k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \csc \frac{1}{2} \widehat{Q_i Q_{i+k}} \geq \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \csc \frac{\pi k}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\widehat{Q_i Q_{i+k}} = \frac{\pi k}{n}$ (minden i, k -ra), azaz a szabályos esetben. $\square$

A fenti lemma geometriai jelentését jobban megvilágítja a következő. Tegyük fel, hogy a C körön szabadon mozgatható n pont között egy, a távolság négyzetével fordítottan arányos taszító erő hat, mint például az azonos nagyságú egyforma töltések között ható elektrosztatikus taszító erő. A pontrendszer pontosan akkor van fizikai egyensúlyban, ha T minimális. A lemmában megállapítottuk, hogy ez az egyensúlyi állapot a pontok szabályos elhelyezkedésekor következik be.

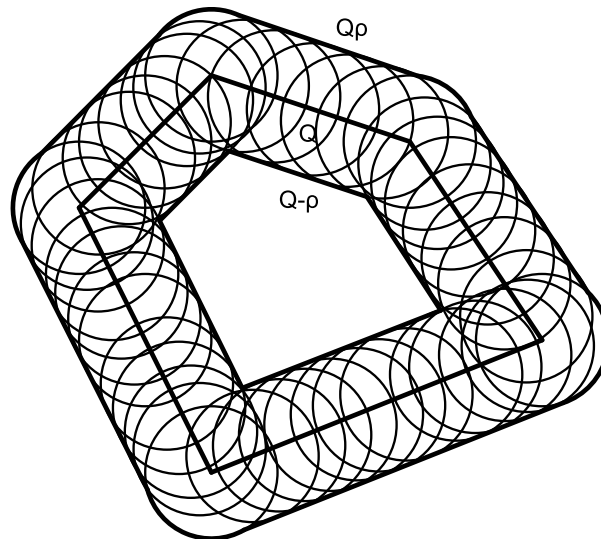
4. Izoperimetrikus probléma sokszögekre

Végül egy sokszögekre vonatkozó klasszikus izoperimetrikus problémát tárgyalunk: Rögzített n esetén keressük meg azokat az n -oldalú sokszögeket, amelyekre az ún. izoperimetrikus hányados $\frac{P^2}{A}$ minimális. Ez egy nagyon

régi gyökerekkel rendelkező probléma, és sok különböző bizonyítás létezik arra a tényre, hogy az izoperimetrikus hányados a konvex szabályos n -szögre minimális. Korábbi megegyezésünk szerint, a szabályos konvex n -szöget a $\{n\}$ szimbólum jelöli.

4.1. Tétel. *Legyen $n \geq 3$ rögzített pozitív egész szám. Az n oldalú sokszögek között a $\frac{P^2}{A}$ izoperimetrikus hányados pontosan a konvex szabályos n -szögekre minimális.*

A következőkben Fejes Tóth László [1] könyvében megjelent elegáns bizonyítást írjuk le.



3. ábra. Paraleltartomány

Bizonyítás. Egy sokszög konvex burkán azt a legszűkebb konvex sokszöget értjük, ami tartalmazza az eredeti sokszöget. Nyilvánvalóan, egy Q tetszőle-

ges sokszög konvex burkának izoperimetrikus hányadosa nem nagyobb, mint az eredeti sokszögé. Ezért elég állításunkat konvex sokszögekre bebizonyítani.

Legyen r a Q konvex sokszög beírt körének sugara és legyen $0 < \varrho < r$ egy valós szám. Jelölje U_ϱ a Q pontjai mint középpontok köré írt ϱ sugarú körlemezek unióját. Most tekintsük a $Q_\varrho = Q \cup U_\varrho$ és $Q_{-\varrho} = Q \setminus U_\varrho$ ($\varrho > 0$) ponthalmazokat. A Q_ϱ halmazt a Q sokszög ϱ sugarú külső paraleltartományának, a $Q_{-\varrho}$ halmazt pedig a Q ϱ sugarú belső paraleltartományának nevezzük. Vegyük észre, hogy $Q_{-\varrho}$ egy szokásos sokszög, míg Q_ϱ egy egyfajta lekerekített sokszög.

Jelöljük a Q_ϱ területét és kerületét A_ϱ -val és P_ϱ -val. Így $\varrho > 0$ -ra nyilvánvalóan igazak a következők:

$$A_\varrho = A + P_\varrho + \pi\varrho^2,$$

$$P_\varrho = P + 2\pi\varrho.$$

Most bevezetünk egy q segédsokszöget. Legyen q az a konvex sokszög, ami az egységsugarú kör köré van írva és amelynek oldalai rendre párhuzamosak Q megfelelő oldalaival. Ezt a q sokszöget a Q indukatrixának is szokták nevezni.

Jelöljük a $Q_{-\varrho}$ indukatrixát $q_{-\varrho}$ -val és legyen $A(q_{-\varrho}) = a_{-\varrho}$, illetve $A(q) = a$.

Vegyük észre, hogy ha ϱ elegendően kicsi, akkor a Q -nak és $Q_{-\varrho}$ -nak egyforma számú oldala van, így ebben az esetben $a = a_{-\varrho}$. Továbbá, olyan kis ϱ -ra, amelyre Q és Q_ϱ oldalainak száma meggyezik, érvényes, hogy

$$A = A_{-\varrho} + P_{-\varrho}\varrho + a_{-\varrho}\varrho^2$$

és

$$P = P_{-\varrho} + 2a_{-\varrho}\varrho.$$

Innen adódik

$$A_{-\varrho} = A - P\varrho + a\varrho^2$$

és

$$P_{-\varrho} = P - 2a\varrho.$$

Figyelembe véve, hogy $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$, $\varrho_1 + \varrho_2 \leq r$, esetén igaz a

$$(Q_{-\varrho_1})_{-\varrho_2} = Q_{-(\varrho_1+\varrho_2)}$$

összefüggés, meghatározhatjuk $A_{-\varrho}$ -t és $P_{-\varrho}$ -t minden $\varrho \leq r$ értékre.

Most tekintsük a következő függvényt:

$$g(\varrho) = -A_{-\varrho} + P_{-\varrho}r_{-\varrho} - a_{-\varrho}r_{-\varrho}^2.$$

Vegyük észre, hogy $r_{-\varrho} = r - \varrho$. A ϱ olyan értékeire, melyre $a_{-\varrho} = a$, a fenti formulák alapján következik, hogy a $g(\varrho)$ függvény konstans:

$$g(\varrho) = -A + Pr - ar^2.$$

Ebből következik, hogy a $g(\varrho)$ függvény minden olyan intervallumon konstans, ahol Q_ϱ oldalainak száma nem változik.

Másrészt $A_{-\varrho}$, $P_{-\varrho}$ és $r_{-\varrho}$ ϱ folytonos függvényei, és $a_{-\varrho}$ nem csökkenő függvénye ϱ -nak, amiből következik, hogy $g(\varrho)$ a ϱ -nak nemnövekvő függvénye. Ezért:

$$g(0) = -A + Pr - ar^2 \geq g(r) = 0.$$

Ezzel ekvivalens:

$$P^2 - 4aA \geq (P - 2ar)^2,$$

amiből

$$\frac{P^2}{A} \geq 4a$$

következik.

Az utolsó egyenlőtlenségben csak $P = 2ar$ esetben van egyenlőség, azaz pontosan akkor, ha Q a beírt köre köré van írva. Ez azt jelenti hogy adott irányú oldalakkal rendelkező konvex sokszögek között annak az izoperimetrikus hányadosa a legkisebb, ami egy kör köré van írva. Ebből következik, hogy minden n -szögre

$$\frac{P^2}{A} \geq 4n \tan \frac{\pi}{n},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az n -szög szabályos. Tehát az azonos kerületű n -szögek között a konvex szabályos n -szögnek ($\{n\}$) van a lehető legnagyobb területe. Innen származik az izoperimetrikus egyenlőtlenség elnevezés. $\square$

Hivatkozások

- [1] Fejes Tóth László, Reguläre Figuren, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
- [2] Fejes Tóth László, Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. (German) Zweite verbesserte und erweiterte Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 65. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [3] Kazarinoff, Nicholas D., Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, Budapest, 1980.
- [4] Szabó László, Konvex geometria, ELTE jegyzet, 1996.

Nyilatkozat

Alulírott Budai Boglárka kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Budai Boglárka