

GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Kurzus-példatár

SZERKESZTETTE

S Z A B Ó   Z O L T Á N  
egyetemi docens

Lektor

NAGY PÉTER  
tanszékvezető egyetemi  
docens

S Z E G E D  
1985

Bolyai Intézet

## T A R T A L O M J E G Y Z É K

### Bevezető

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 1.§. Az euklideszi geometria axiómái                        | 1   |
| 2.§. Izometriák                                             | 6   |
| Párhuzamos eltolások                                        | 10  |
| Forgások                                                    | 16  |
| Irányítást fordító izometriák                               | 27  |
| 3.§. Hasonlóságok                                           | 35  |
| 4.§. Kristálycsoportok, rács geometria, szabályos testek    | 46  |
| 5.§. Műveletek vektorokkal (belső-vektor és vegyes-szorzás) | 58  |
| 6.§. Affin geometria, konvex geometria                      | 81  |
| 7.§. Kör geometria, körtartó transzformációk                | 91  |
| 8.§. Elliptikus geometria                                   | 108 |
| 9.§. Hiperbólikus geometria                                 | 116 |
| Irodalomjegyzék                                             |     |

## B E V E Z E T Ő

Példatárunkban a klasszikus geometriákkal (euklideszi geometria, rács geometria, affin geometria, kör és gömb geometria, elliptikus geometria, hiperbolikus geometria) illetőleg ezek transzformációs csoportjaival kapcsolatos feladatokat gyűjtöttük össze. Minden fejezet elején bevezető található, amiben az illető geometriára vonatkozó elméleti eredményeket és fogalmakat ismertetjük. Ezek a bevezetők "felépítettek" abban az értelemben, hogy egy lehetséges előadás vázlatainak is tekinthetők. Minde mellett önmagukban is tanulmányozhatók, mivel nem tételeznek fel előismereteket.

Az elméleti ismeretek elmélyítéséhez, főként az irodalomjegyzékben felsorolt példatárakból, mintegy 500 feladatot gyűjtöttünk össze. Ezeknél a feladatoknál a pontos hivatkozást is megadtuk, hogy az olvasó a megfelelő könyvben szereplő útmutatásokat is felhasználhassa.

### 1.§. Az euklideszi geometria axiómái

Az euklideszi sík axiomatikus felépítésénél az alap-  
elemek a pontok és az egyenesek (a pontok bizonyos rész-  
halmazai), amikre a következő illeszkedési és rendezési  
axiómák érvényesek:

- $I_1$  Létezik legalább két különböző egyenes és bármely  
egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- $I_2$  Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illesz-  
kedik.  $[A$   $g_1$  és  $g_2$  egyeneseket párhuzamosnak mondjuk,  
(jelben  $g_1 \parallel g_2$ ) ha  $g_1 = g_2$  vagy  $g_1 \cap g_2 = \emptyset$  teljesül.  
A többi esetben az egyeneseket metszőknek mondjuk.
- $I_3$  Minden  $g$  egyeneshez és  $P$  ponthoz pontosan egy a  $P$   
pontra illeszkedő és a  $g$  egyenessel párhuzamos egye-  
nes létezik.

1.1. Igazoljuk az eddigi axiómákból, hogy két egyenes  
vagy párhuzamos vagy pedig egy és csak egy pontban met-  
szik egymást.

1.2. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamosság, mint reláció  
ekvivalencia reláció. A párhuzamossági osztályokat ne-  
vezzük irányoknak.

1.3. Nevezzük pontoknak az  $A, B, C, D$  betűket, egyeneseknek  
pedig az  $\{A, B\}$   $\{A, C\}$   $\{A, D\}$   $\{B, C\}$   $\{C, D\}$   $\{B, D\}$  két elemű  
részhalmazokat. Bizonyítandó, hogy az így definiált pont  
egyenes rendszer kielégíti az illeszkedési axiómákat.

$R_1$  Bármely egyenesen adott két egymással inverz teljes  
rendezés.

$R_2$  Ha valamely  $g$  egyenes az  $ABC$  háromszög egyik csúcsára sem illeszkedik, de az egyik oldalát metszi, akkor pontosan még egy másik oldalt is metsz.

1.4. A fenti rendezési axiómák segítségével vezessük be a félsík fogalmát a következő módon. A pontok  $\Pi$  halmazából vegyük el egy  $g$  egyenes pontjait, és az így nyert  $\Pi \setminus g$  halmazon vezessük be a következő  $\rho$  relációt:

$$P \rho Q \iff \overline{PQ} \cap g = \emptyset, \text{ ahol } \overline{PQ} \text{ a } P, Q \in \Pi \setminus g$$

pontok által meghatározott szakaszt jelöli.

Bizonyítandó, hogy a  $\rho$  reláció ekvivalencia reláció, amelynek legfeljebb két ekvivalencia osztálya létezik. Ezeket az ekvivalencia osztályokat nevezzük félsíkoknak. A két félsík létezése csak egy további feltétel mellett igazolható.

Bizonyítsuk be, hogy ha bármely egyenesen bármely pont előtt is és után létezik pont, akkor bármely egyeneshez pontosan két félsík létezik.

A következő metrikus axiómákban azt tesszük fel, hogy bármely két  $P, Q$  ponthoz egy  $|PQ|$  jellel jelölt valós szám (távolság) adott a következő tulajdonságokkal:

$$M_1 \quad |PQ| \geq 0 \text{ és } |PQ| = 0 \iff P=Q,$$

$$M_2 \quad |PQ| = |QP|,$$

$$M_3 \quad |PQ| + |QR| \geq |PR| \text{ és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha } Q \in \overline{PR},$$

$M_4$  Minden  $(g \leq)$  rendezett egyeneshez,  $P \in g$  ponthoz és  $\lambda \geq 0$  valós számhoz létezik  $Q \in g$  pont, amelyre  $P \leq Q$  és  $|PQ| = \lambda$  teljesül.

1.5. Bizonyítandó, hogy az  $M_4$  axiómában szereplő  $Q$  pont egyértelműen meghatározott.

A pontok valamely  $\alpha: \Pi \rightarrow \Pi$  leképezését izometriának nevezzük, ha megőrzi a pontok távolságát.

1.6. Igazolandó, hogy az izometriák bijekciók, amelyek az szakzt szakaszra, félegyenesest félegyenesre, egyenesest egyenesbe transzformálnak.

A sík axiómái között az utolsót, az u.n. tengelyes tükrözések axiómáját vezetjük be.

$I_1$  Minden  $g$  egyeneshez létezik olyan  $\tau_g$  involutív izometria, amelyik a  $g$  egyenest pontonként fixen hagyja, a hozzá tartozó két félsíkot pedig felcseréli.

1.7. Igazolandó, hogy minden  $g$  egyeneshez a  $\tau_g$  tükrözés egyértelműen meghatározott.

A  $h$  egyenes merőleges a  $g$  egyenesre (jelben  $h \perp g$ ), ha  $h \neq g$  és  $\tau_g(h) = h$  érvényes.

1.8. Bizonyítandó a  $h \perp g \Rightarrow g \perp h$  szimmetria, valamint az, hogy tetszőleges  $g$  egyenesre tetszőleges  $P$  ponton keresztül pontosan egy merőleges bocsátható.

Egy szakasz felezőpontjában a szakaszra állított merőleges a felező merőleges.

1.9. Igazolandó, hogy a felező merőleges azon pontok halmaza, amelyek a két végponttól azonos távolságra helyezkednek el.

A tér axiómáit hasonlóan csoportosítjuk, mint a sík axiómáit. Itt az alapelemek a pontok  $\Pi$  halmaza, a síkok  $\Sigma$  halmaza és az egyenesek  $\Gamma$  halmaza. Ezekkel az axiómákkal hosszadalmasságuk miatt nem foglalkozunk. A további részleteket ld. [5<sub>2</sub>] 1. fejezetében.

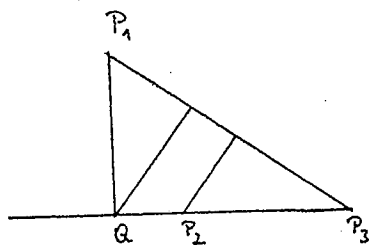
Végezetül az axiómák gyakorlásához Sylvester híres feladatát említjük:

1.10. Ha a sík  $n$  pontja nem fekszik egy egyenesen, akkor létezik olyan egyenes, amelyik a pontok közül pontosan kettőt tartalmaz.

Bizonyítás: A problémát Sylvester 1893-ban vetette fel, de csak jóval később Gallai Tibornak sikerült igazolnia. Ma már egy nagyon egyszerű bizonyítás is ismeretes:

Tekintsük a  $(P_i, P_j, P_k)$  pont-egyenes párokat, ahol  $P_i \in P_j P_k$ . Ezek közül legyen a  $(P_1, P_2, P_3)$  pár olyan, hogy a  $P_1$  pont  $[P_1 Q]$  távolsága a  $P_2 P_3$  egyenestől az adott párokra a legkisebb. Ekkor a  $P_2 P_3$  egyenes már más  $P_j$  pontot nem tartalmazhat.

Valóban, ha a  $P_2 P_3$  egyenes még egy további  $P_4$  pontot tartalmazna, akkor a 3 pont közül kettő, pl. a  $P_2, P_3$  pontok a  $Q$  pontnak ugyanarra az oldalára esne úgy, hogy  $Q \leq P_2 \leq P_3$  is teljesül. (Ez átjelöléssel elérhető).



1. ábra

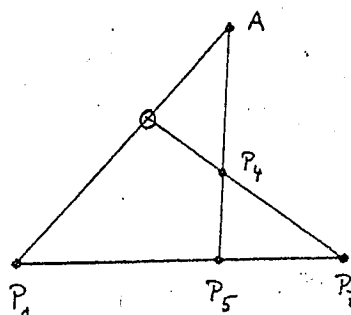
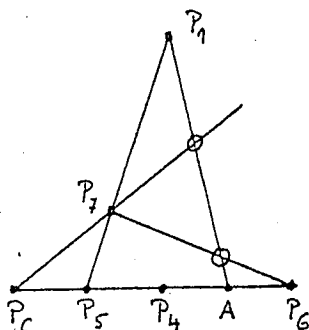
Ekkor viszont a  $P_2$  pont közelebb lenne a  $P_1P_3$  egyeneshez, mint a  $P_1$  pont a  $P_2P_3$  egyeneshez, ami ellentmondás.

Gallai Tibor bizonyítása az  $R_2$  Pasch-féle axiómán alapul:

A  $P_1P_2\dots P_n$  pontokat jelöljük be úgy, hogy a  $P_1, P_2, P_3$  pontok ne legyenek kollineárisok. A  $P_1$  pontot a többivel összekötő egyenesek a  $P_2P_3$  egyenest véges sok pontban metszik, és legyen  $Q$  ezen az egyenesen ezektől a metszéspontoktól különböző pont. A  $P_iP_j$  egyenesek a  $P_1Q$  egyenest véges sok pontban metszik, amik az egyenest szakaszokra bontják. Legyen  $P_1A$  egy ilyen szakasz (amit már a  $P_iP_j$  egyenesek nem metszenek), továbbá az  $A$  pontot a  $P_4P_5$  egyenes messe ki. Ha a  $P_4P_5$  már más  $P_1$  pontot nem tartalmaz, akkor a bizonyítás kész. Ha ezen van még egy  $P_6$  pont is akkor ezek számozását úgy végezzük el, hogy a  $P_5A$  a  $P_4$ -et tartalmazza, a  $P_6$  pontot pedig ne tartalmazza.

A  $P_1P_5$  egyenes már nem tartalmazhat több pontot a  $P_1$  pontok közül.

Valóban, ha  $P_7 \in P_1P_5$  teljesülne, akkor vagy  $P_7 \in \overline{P_1P_5}$  vagy pedig  $P_7 \notin \overline{P_1P_5}$  érvényes.



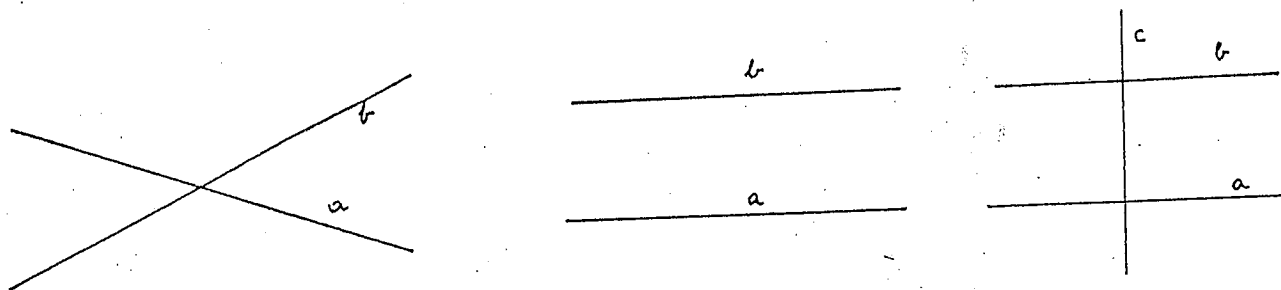
2. ábra

Az első esetben Pasch axiómáját a  $P_5$  A  $P_1$  háromszögre és a  $P_7P_6$  egyenesre alkalmazva a  $P_7P_6$  metszené a  $P_1A$  oldalt, a második esetben pedig a  $P_7P_4$  egyenes metszené a  $P_1A$  oldalt. Ez pedig ellentmondás, vagyis a  $P_1P_5$  már további pontot nem tartalmaz, ami az állítást igazolja.

## 2.§. Izometriák

A sík izometriái között a tengelyes tükrözéseket axiomatikusan vezettük be. Nyilvánvaló, hogy tengelyes tükrözések szorzatával újabb izometriákhoz jutunk. Az izometriák leírásánál fontos tétel, hogy minden síkizometria tengelyes tükrözések szorzataként fejezhető ki, sőt minden síkizometria legfeljebb 3 tengelyes tükrözés szorzataként írható fel. Amikor egy izometriát tengelyes tükrözések szorzataként fejezünk ki, akkor a tengelyek ill. ezek száma nem egyértelmű, viszont a tengelyek számának paritása egyértelműen meghatározott. Páros számú tengelyes tükrözés szorzataként felírható izometriákat mozgásoknak, míg a többit irányítást fordító izometriának nevezzük.

A tengelyes tükrözésekkel speciális izometriák definiálhatók.



3. ábra

Két, metsző tengelyekre vonatkozó tükrözések szorzatát forgásnak nevezzük. A tengelyek metszéspontja a forgás centruma. Megmutatható, hogy közös centrumú forgások Abel féle transzformációs csoportot alkotnak, valamint a tengelyeket a centrum körül tetszőlegesen (együtt) elforgatva az új tengelyekre vonatkozó tengelyes tükrözések szorzata az eredeti forgást adja. Merőleges tengelyek esetén a forgást centrális tükrözésnek nevezzük.

A párhuzamos eltolásokat párhuzamos tengelyekre vonatkozó tükrözések szorzataként definiáljuk. Ezek a transzformációk is Abel féle transzformációs csoportot alkotnak, valamint a tengelyeket együttesen tetszőlegesen párhuzamosan eltolva az általuk meghatározott eltolás nem változik.

Az eddig elmondottakból könnyen látható, hogy három közös pontra illeszkedő vagy egymással párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzata ismét tengelyes tükrözés. Az is megmutatható, hogy páros számú centrális tükrözés szorzata párhuzamos eltolás, míg páratlan számú szorzata ismét centrális tükrözés.

Ha három,  $\tau_a, \tau_b, \tau_c$  tengelyes tükrözésnél  $a \parallel b$  és  $a, b \perp c$  teljesül, akkor a  $\tau_a \tau_b \tau_c$  szorzatot csúsztatva tükrözésnek nevezzük.

Tetszőleges izometriára megmutatható, hogy vagy tengelyes tükrözés vagy forgás vagy párhuzamos eltolás vagy pedig csúsztatva tükrözés.

A tengelyes tükrözések felcserélhetőségére vonatkozóan még megjegyezzük a

$$\tau_a \tau_b = \tau_{\tau_a(b)} \tau_a$$

felcserélési szabályt, amiből könnyen adódik, hogy

$$\tau_a \tau_b = \tau_b \tau_a \quad \Leftrightarrow \quad \text{ha } a=b \text{ vagy } a \perp b \text{ teljesül.}$$

A térizometriák tárgyalása hasonlóan történhet.

Ekkor axiómatikusan a síkra vonatkozó tükrözéseket vezethetjük be és ezek segítségével definiálhatók a többi speciális izometriák. Pl. Két metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzatát tengely körüli forgásnak nevezzük, míg ha a két sík párhuzamos, akkor a szorzatot párhuzamos eltolásnak nevezzük. A térizometriákra vonatkozó részletes tárgyalást ld.[52] 2. fejezetében.

A geometria fogalmi rendszerének kiépítésében az izometriák a lehető legalapvetőbb szerepet játszik. Ez a későbbiekben is nyomon követhető, és itt csak az irányítás, szög és terület fogalmakat említjük.

A síkot irányítottnak nevezzük, ha minden rendezett  $(g \leq)$  egyenesének kitüntetjük az egyik  $\Sigma_g^+$  félsíkját (jobbpartját) úgy, hogy ha valahányszor egy  $\varphi$  mozgás a  $(g \leq)$  egyenest a  $(h \leq)$  rendezett egyenesbe transzformálja, mindannyiszor a jobb part jobb partba kerül.

A teret úgy irányítjuk, hogy az irányított síkok jobb part rendszerét tüntetjük ki mozgásinvariáns módon. A térnek is pontosan két irányítása létezik.

Elemi szögnek az  $(a_+, b_+)$  alakú párokat nevezzük, ahol  $a_+$  és  $b_+$  közös kezdőpontú félegyenesek. A síkban az irányított szögeket az elemi szögeknek mozgásokra vonatkozó egybevágósági osztályaiként definiáljuk. Ezek között, a

reprezentánsok segítségével definiált  $\angle (a_+ b_+) + \angle (b_+ c_+) = \angle (a_+ c_+)$  összeadás Abel csoportot definiál.

A reprezentánsok segítségével természetes rendezés is bevezethető, és bebizonyítható a szögmérésre vonatkozó

következő tétel: Legyen  $\chi > 0$  valós szám. Ekkor létezik <sup>pontosan egy</sup>

olyan  $\phi$  hozzárendelés, amelyik az irányított szögekhez a  $[0, \chi)$  intervallumba eső számot rendel úgy, hogy (1)

$$\phi(\alpha + \beta) = (\phi(\alpha) + \phi(\beta)) \bmod \chi; (2) \phi(\alpha) \leq \phi(\beta) \text{ ha } \alpha \leq \beta,$$

továbbá: (3) a  $\phi$  a derékszöghöz a  $\chi/4$  értéket rendel.

A  $\phi$  függvényt  $\bmod \chi$  szögmérésnek nevezzük.

Az elemi szögeknek izometriákra vonatkozó egybevágósági osztályait skaláris vagy irányítatlan szögeknek nevezzük.

A térben csak ezek a szögek definiálhatók, az irányított szögek nem. A szögekre a különféle szögfüggvényeket a szokásos módon értelmezzük.

Valamely ponthalmazt konvexnek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az ezeket összekötő szakaszt is tartalmazza. A konvex halmazok metszete is konvex, és egy ponthalmaz konvex burkán a ponthalmazt tartalmazó konvex ponthalmazok metszetét értjük. A konvex burok az a minimális konvex ponthalmaz, amelyik az adott ponthalmazt tartalmazza.

Itt a terület és a térfogat mérést csak ezekre a konvex ponthalmazokra vezetjük be.

Bebizonyítható a következő tétel:

Létezik egy és csak egy  $V$  hozzárendelés, amelyik a sík ill. tér konvex  $K$  ponthalmazaihoz  $V(K)$  valós számot rendel a következő tulajdonságokkal

(1)  $V(K) \geq 0$ .

(2) Ha  $K = K_1 \cup K_2$  és  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ , akkor  
 $V(K) = V(K_1) + V(K_2)$  (additivitás).

(3) Bármely  $\psi$  izometriára

$V(\psi(K)) = V(K)$  (invariancia).

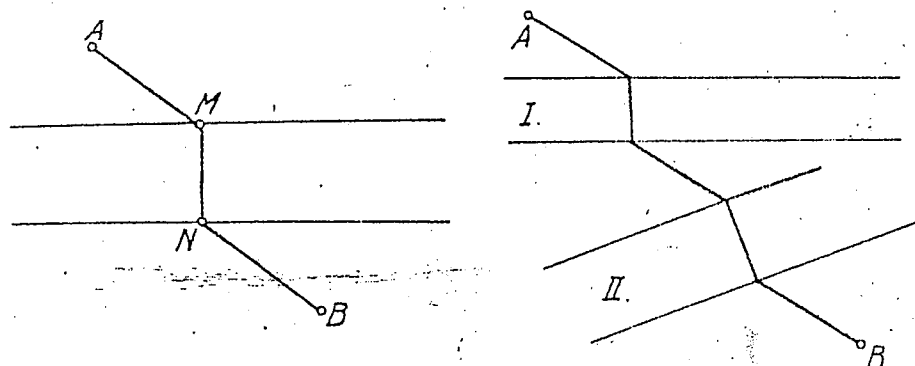
(4) A  $V$  a síkban az egységnégyzethez ill. a térben az egységkockához az 1 értéket rendeli.

A  $V$  hozzárendelést a síkban terület-mérésnek a térben pedig térfogat-mérésnek nevezzük. A következőkben ismertnek tételezzük fel a különféle geometria alakzatok (háromszögek, tetraéderek, paralelepipedonok) terület-ill. térfogat-képleteit is.

Feladatok párhuzamos eltolásokra (M.10-19.o.- V.66-71, 144-151.o.)

2.1. Adottak az  $S_1$   $S_2$  körök és az  $l$  egyenes. Huzzunk  $l$ -el párhuzamosan olyan  $l'$  egyenest, amelynek az  $S_1$ ,  $S_2$  körökkel való metszéspontjai adott  $a$  távolságra vannak egymástól.

2.2/a. Hová kell építeni egy folyóra az MN hidat, ha azt akarjuk, hogy az A és B falvak közötti ut a legrövidebb legyen (4./a. ábra).



4/a-b ábra

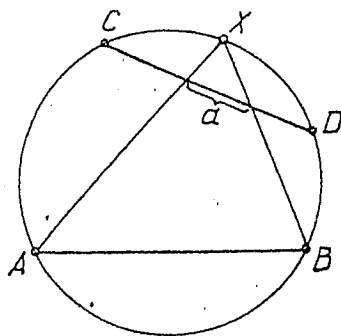
Feltételek: Az A és B falvak a folyó különböző pontjain helyezkednek el, a folyót pedig két párhuzamos egyenes által meghatározott sávnak tekintjük, a hid irányba merőleges a folyó irányára.

b) Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a két falut több folyó is elválaszthatja, amelyek mindegyikén hidat akarunk építeni. (A feltételek az előzőek (4/b ábra)).

2.3/a. Határozzuk meg azoknak az M pontoknak a halmazát, amelyeknek az adott  $l_1$  és  $l_2$  egyenesektől mért távolságösszege egy előre adott szakasz  $a$  hosszával egyezik meg.

b) Határozzuk meg azoknak az M pontoknak a halmazát, amelyeknek az adott  $l_1$  és  $l_2$  egyenesektől mért távolságuk különbsége ismert  $a$  hosszúság.

2.4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy ABCD négyszög MN középvonalnak a hossza megegyezik az AB és a CD oldaluk számtani közepével, akkor a négyszög trapéz. (M az AD, N pedig a BC oldal felezési pontja.)



5. ábra

2.5. Ismerjük egy kör AB és CD húrjait. Keressük a körön olyan X pontot, hogy az AX és a BX hurok a CD hurból adott a hosszúságú EF szakaszt vágjanak ki (5. ábra).

2.6/a. Az  $S_1$  és  $S_2$  körök metszéspontjait jelöljük A-val és B-vel. Huzzunk

az A ponton át olyan  $l$  egyenest, amelynek az  $S_1$  és  $S_2$  körök belsejébe eső része adott  $a$  nagyságu szakasz lesz.

b) Szerkesszünk adott háromszöggel egybevágó háromszöget, amelynek az oldalai három adott ponton haladnak át.

2.7. Adott két kör az  $S_1$  és az  $S_2$ . Szerkesszünk olyan  $l$  egyenest amely:

a) párhuzamos egy adott  $l_1$  egyenessel, és az  $S_1$  és  $S_2$  körökből egyenlő húrokat metsz ki.

b) párhuzamos az adott  $l_1$  egyenessel és az  $S_1$  és  $S_2$  körök olyan hurokat metszenek ki belőle, amelyeknek az összege ( vagy a különbsége) adott  $a$  nagyságu szakasszal egyezik meg.

c) áthalad egy A ponton, és az  $S_1$  és az  $S_2$  körök egyenlő hurokat metszenek ki belőle.

2.8. Adott a  $g$  és az  $l$  metsző egyenes meg egy  $ABC \triangle$ .

Szerkesszünk az adottal egybevágó háromszöget úgy, hogy annak egyik oldala a  $g$ , szemközti csúcsa pedig az  $l$  egyenesen legyen!

2.9. Adott az  $ABC \triangle$  és az  $i$  irány. Szerkesszük meg az  $i$  iránnyal párhuzamos  $e$  egyenest úgy, hogy az  $AB$  oldalt olyan  $X$ , a  $BC$ -t pedig olyan  $Y$  pontban messe, amelyekre teljesül az  $AX:BY=m:n$  adott arány!

2.10. Adott az  $a_1$  meg az  $a_2$  egyenes és az  $r_1, h_1, r_2, h_2$  szakaszok, valamint az  $i$  irány. Szerkesszünk olyan két kört, amelyek közül az  $r_1$  sugarú az  $a_1$ -ből  $h_1$ , az  $r_2$  sugarú az

$a_2$ -ből  $h_2$  hosszúságú hűrt metsz ki, és olyan pontban érintik egymást, amelyhez tartozó közös érintőjük  $i$ -vel párhuzamos!

2.11. Adott a  $k$  kör, a  $P$  pont és a  $c$  szakasz. Írjunk az adott körbe olyan  $ABC \triangle$ -et, amelynek  $c$  oldala nagyságra és irányra az adott  $c$  szakasszal egyező, a  $y$  szög felezője pedig az adott  $P$  ponton megy át!

2.12. Adott a  $k$  kör és benne az  $AB, CD$  húrok, továbbá az  $FG$  szakasz. Szerkesszünk a körön olyan  $X$  pontot, amelyből  $AB$ -t  $CD$ -re vetítve, a vetület hossza  $FG$ !

2.13. Adott az  $ABC \triangle$  és egy  $t$  szakasz. Keressünk az  $AB$  oldalon olyan  $X$ , a  $BC$  oldalon pedig olyan  $Y$  pontot, amelyekre érvényes az  $XY=t$  egyenlőség, és az  $AX:CY=m:n$  arány adott!

2.14. Adott két kör  $(O_1, r_1)$ ,  $(O_2, r_2)$ , az  $i$  irány meg a  $t$  szakasz. Szerkesszünk  $i$ -vel párhuzamosan olyan egyenest, amelyből az adott körök olyan húrokat metszenek ki, hogy azok hosszainak összege az adott  $t$  szakasz hosszával egyenlő!

2.15. Egy adott  $P$  ponton át szerkesszünk olyan egyenest, amelyből két adott kör egyenlő hosszú húrokat metsz ki!

2.16. Két adott  $(O_1, r_1)$ ,  $(O_2, r_2)$  körben olyan párhuzamos sugarakat kell szerkesztenünk, amelyek egy adott  $P$  pontból egyenlő szög alatt látszanak.

2.17. Szerkesszünk olyan trapézt, amelynek adott a két átlója, a középvonala és egy szöge!

2.18. Szerkesszünk olyan négyszöget, amelynél adott az  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  oldalak hossza és az  $\alpha$  szög!

2.19. Szerkesszünk olyan négyszöget, amelynél adva van az  $e$  és az  $f$  átlók hossza, az  $\varphi$  szög ( $= \varphi$ ), továbbá a négyszög két szemközti szöge ( $\alpha$  és  $\beta$ ) !

2.20. Szerkesszük meg azt a trapézt, amelynél adott az  $e$  és az  $f$  átlók hossza, az  $\varphi$  szög ( $= \varphi$ ), valamint két szomszédos oldal összege ( $a+b$ )!

2.21. Szerkesszünk olyan húrnégyszöget, amelyben adott az  $e$  és az  $f$  átlók hossza, ezek  $\varphi$  hajlásszöge, továbbá az egyik átlónak az egyik oldallal bezárt szöge!

2.22. Adott a négyszög  $e$  és  $f$  átlójának hossza, azoknak  $\varphi$  hajlásszöge, az  $a$  és  $b$  oldalak aránya ( $a:b=p:q$ ) és a másik két oldalnak ( $c,d$ )  $\gamma$  hajlásszöge. Szerkesszük meg a négyszöget!

2.23. Adott az ABCD négyszögben két szemközti ( $AB$ ,  $CD$ ) oldalának hossza, továbbá a következő három szög:  $\angle BAC$ ,  $\angle ACD$ ,  $\angle BDA$ . Szerkesszük meg a négyszöget!

2.24. Szerkesszük meg a négyszöget két szemközti oldalából ( $AB$ ,  $CD$ ) és négy szögéből!

2.25. Szerkesszük meg a trapézt két átlójából ( $e,f$ ), ezek szögéből ( $\varepsilon$ ) és az egyik oldalából ( $AB$ )!

2.26. Szerkesszük meg az ABCD négyszöget  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  oldalaiából meg  $\alpha$  és  $\beta$  szögeiből!

2.27. Adott az ABCD négyszögnek két szemközti oldala ( $AD$  és  $BC$ ), ezek  $\varphi$  hajlásszöge, valamint a két átló ( $e$  és  $f$ ). Szerkesszük meg a négyszöget!

2.28. Szerkesszünk trapézt, ha adott  $m$  magassága, a párhuzamos oldalainak  $d$  különbsége és  $r$ , a körülírt kör sugara!

2.29. Adott az ABCD trapézban az  $e$  és az  $f$  átló, a párhuzamos oldalak felezési pontjait összekötő  $k$  szakasz, meg az átlók felezési pontjait összekötő  $t$  szakasz. Szerkesszük meg a trapézt!

2.30. Adott a kör és azon a D, E, F pontok. Irjunk a körbe olyan ABC  $\triangle$ -et, hogy az ehhez tartozó három ív felezési pontja D, E, F legyen!

2.31. Tükrözzük az A pontot egymás után a  $P_1, P_2, P_3, P_4$  paralelogramma négy csúcsára! Bizonyítsuk be, hogy ha eltérünk a ciklikus sorrendtől, akkor a négy tükrözés eredője olyan transzláció, amelynek mértéke valamelyik oldal hosszának négyszerese!

2.32. Adott az A pont és az egy egyenesen fekvő  $P_1, P_2$  és  $P_3$  pontok. Szerkesszük meg azt az O pontot, amelyre való tükrözéssel helyettesíthető az A pontjak az adott pontokra ( az adott sorrendben) való egymás utáni tükrözése!

2.33. Helyettesíthető-e a  $P_1$  és a  $P_2$  centrumokra való egymás utáni tükrözés egyetlen pontra való tükrözéssel?

2.34. Adva van négy párhuzamos sík ( $S_1 \parallel S_2 \parallel S_3 \parallel S_4$ ).

Tükrözzünk egy tetszőleges P pontot a négy síkra egymás után:  $P_1, P_{12}, P_{123}, P_{1234}$ . Hol lesz  $P_{1234}$ ?

2.35. A szabályos oktaéder három csúcstengelyének végpontjai legyenek: 1 és 4, 2 és 5, 3 és 6. Tükrözzünk egy tetszőleges A pontot az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben úgy, hogy az első tükörkép  $A_1$ , ennek tükörképe  $A_{12}$ ,  $A_{123}, \dots, A_{1-6}$  legyen! A végeredmény mivel helyettesíthető?

2.36. Valamely kocka egy csúcsából kiinduló három élének végpontjai legyenek 1,3 és 5. E csúcsokkal átellenes csúcsok legyenek 4,6 és 2. Tükrözzünk egy tetszőleges A pontot a következő sorrendben: 1,2,3,4,5,6 úgy, hogy az első tükrökép  $A_1$ , ennek tükröképe  $A_{12}$ , ennek tükröképe  $A_{123}, \dots$

$A_{1-6}$  legyen! Mivel helyettesíthető a végeredmény?

2.37. Adva van egy ponton átmenő három sík:  $S_1, S_2, S_3$  és egy  $ABC \triangle$ . Adjunk meg egy  $i$  vektort úgy, hogy a háromszöget avval eltolva, a három pont a három síkra illeszkedjék!

2.38. Adva van három kitérő egyenes:  $e_1, e_2, e_3$ . Szerkeesszük meg azt a téglalapot, amelynek két csúcsa az egyik egyenesen van, a másik két csúcsa pedig a másik két egyenesen van!

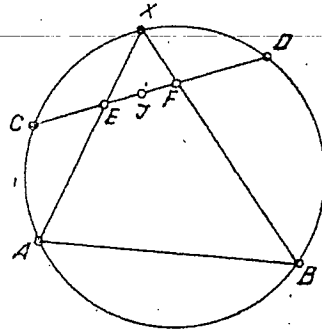
2.39. Adva van három olyan kitérő egyenes, amelyek ugyanazon  $S$  síkkal párhuzamosak. Olyan deltoidot kell szerkeszteni, amelynél az egyik átló merőleges  $e_1$ -re is meg  $e_2$ -re is és végpontjai e két egyenesen vannak. A harmadik csúcs az  $e_3$ -on van és e csúcsához tartozó átló hossza adott  $d$  távolság.

Forgások, centrális tükrözések (M.15-28, V 66-71, 144-151.o.)

2.40. Adott egy  $S$  kör, egy  $l$  egyenes és egy  $A$  pont. Huzzunk az  $A$  ponton keresztül olyan egyenest, melynek az  $l$  egyenessel és az  $S$  körrel való metszéspontjának távolságát az  $A$  pont felezi.

2.41. Huzzunk az  $S_1$  és  $S_2$  körök közös  $A$  pontján át olyan  $l$  egyenest, melyre teljesül hogy:

- a) Az  $S_1$  és  $S_2$  körök az  $l$ -ből egyenlő hurokat metszenek ki.
- b) Az  $S_1$  és  $S_2$  körök által kimetszett hurok különbsége adott  $a$  hosszúságú szakasz legyen.

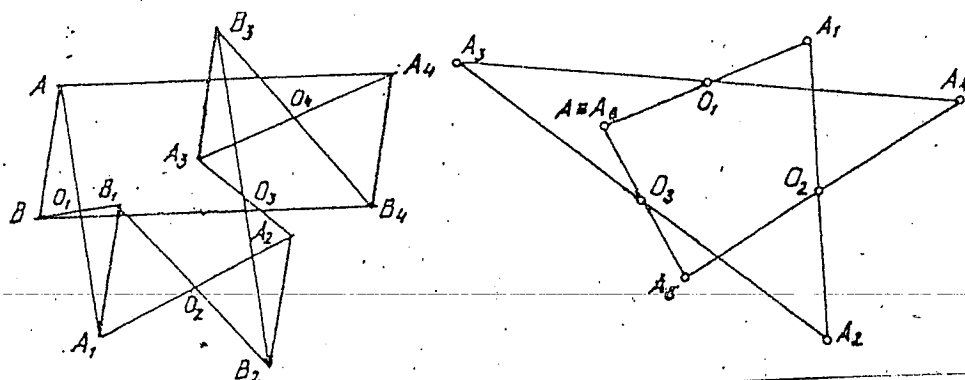


6. ábra

2.42. Adottak egy  $S$  kör  $AB$  és  $CD$  húrjai, továbbá a  $CD$  húr egy  $J$  pont. Szerkesszünk a körön olyan  $X$  pontot, hogy az  $AX$  és  $BX$  hurok a  $CD$  hurból olyan  $EF$  szakaszt vágjanak ki, melynek a  $J$  pont a felezési pontja (6.ábra)

2.43. Két párhuzamos egyenes által meghatározott sávnak nyilvánvalóan végtelen sok szimmetriaközéppontja van. Létezik-e olyan alakzat, melynek  $l$ -nél több, de véges sok szimmetriacentruma van? (Pl. olyan alakzat, melynek kettő és csak kettő szimmetriacentruma van.)

2.44. Tekintsük a sík  $O_1, O_2, \dots, O_n$  páros számú pontját és az  $AB$  szakaszt. Az  $AB$  szakasz  $O_1$  pontra vonatkozó tükörképét jelöljük

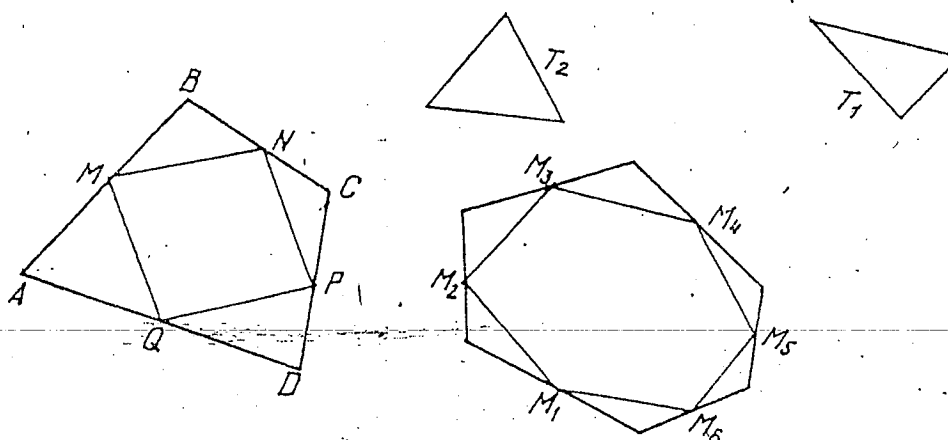


7/a-b ábra

$A_1B_1$ -gyel, az  $A_1B_1$  szakasz  $O_2$  pontra vonatkozó tükörképét  $A_2B_2$ -vel, stb. végül az  $A_{n-1}B_{n-1}$  szakasz  $O_n$  pontra vonatkozó tükörképét  $A_nB_n$ -nel. Bizonyítsuk be, hogy  $AA_n = BB_n$ . Helyes marad-e az állítás, ha  $n$  páratlan? (A 7./a. ábra az  $n=4$  esetet ábrázolja).

2.44/b. Az  $O_1, O_2, \dots, O_n$  pontok a sík pontjai. Tegyük fel, hogy  $n$  páratlan. Tükrözzük a sík egy tetszőleges  $A$  pontját az  $O_1, O_2, \dots, O_n$  pontokra, majd folytatólagosan ismételtén tükrözzük a kapott tükörképet az  $O_1, O_2, \dots, O_n$  pontokra. A  $2n$  darab tükrözés után kapott pontot jelöljük  $A_{2n}$ -nel. Bizonyítsuk be, hogy  $A_{2n} = A$ . (A 7/b. ábrán az  $n=3$  esetet láthatjuk.) Igaz marad-e az állítás, ha  $n$  páros?

2.45. Adott a síkon páratlan számú pont. Legyenek ezek a pontok egy  $n$ -oldalú sokszög oldalfelező pontjai. Szerkesszük meg az  $n$ -oldalú sokszög oldalait. Vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor  $n$  páros!



8/a-b ábra

2.46/a. Bizonyítsuk be, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg! (8/a ábra).

2.46/b. Egy hatszög oldalfelezési pontjait jelöljük  $M_1, M_2, \dots, M_6$ -tal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan  $T_1$  háromszög, melynek oldalai párhuzamosak és egyenlők az  $M_1M_2, M_5M_6$  szakaszokkal, és létezik olyan  $T_2$  háromszög, melynek oldalai párhuzamosak és egyenlők az  $M_2M_3, M_4M_5$  szakaszokkal (8/b ábra).

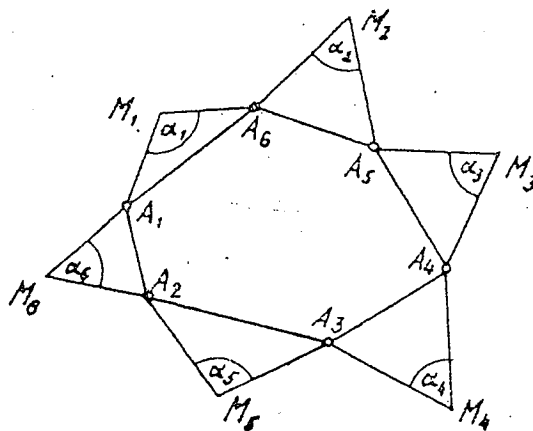
2.47. Adott az  $l_1$  és az  $l_2$  egyenes, az A pont és egy  $\alpha$  szög. Szerkesszünk olyan A középpontú kört, amelyben az  $l_1$  és  $l_2$  egyenesek által kimetszett körívhez tartozó középponti szög  $\alpha$ .

2.48. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, melynek a csúcsai három párhuzamos egyenesen, vagy pedig három koncentrikus körön helyezkednek el.

2.49. Adott az S kör, az A és B pontok valamint egy  $\alpha$  szög. Szerkesszünk az S körön olyan C és D pontokat, amelyekre igaz, hogy  $CA \parallel DB$  és a CD ívhez tartozó középponti szög  $\alpha$ .

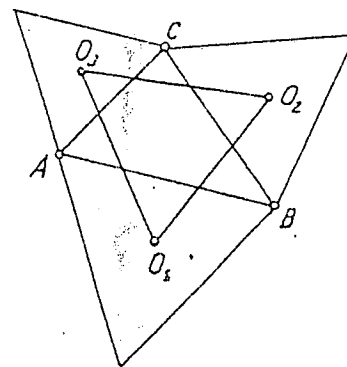
2.50. Adottak az  $S_1$  és  $S_2$  körök, az A pont és egy  $\alpha$  szög.  
Szerkesszünk az A ponton át olyan  $\alpha$  nagyságú szöget bezáró  $l_1$  és  $l_2$  szelőket, amelyekből az  $S_1$  és  $S_2$  körök egyenlő nagyságú hurokat metszenek ki.

2.51. Szerkesszünk n-szöget, ha ismerjük azt az n darab pontot, melyek az' n szög oldalaira mint alapra szerkesztett, adott  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  szárasszögű, egyenlőszárú háromszögek csúcsai (9. ábra n=6).



9. ábra

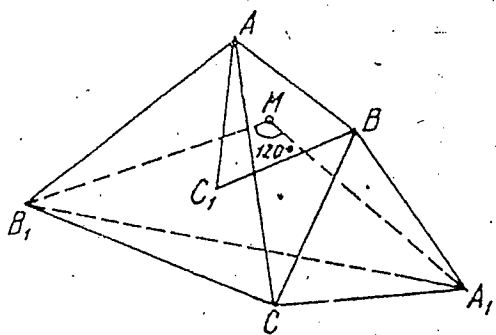
2.52. Egy ABC háromszög oldalaira kifelé szabályos háromszögeket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a háromszögeknek az  $O_1, O_2, O_3$  középpontjai ismét szabályos háromszöget határoznak meg (10. ábra). Változik-e a feladat állítása, ha a szabályos háromszögeket nem kifelé, hanem befelé szerkesztjük?



10. ábra

b) Egy  $ABC$  háromszög oldalaira szerkesszünk kifelé egyenlő szárú háromszögeket. A  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ ,  $ABC_1$  egyenlő szárú háromszögek szárszögeit, azaz az  $A_1, B_1, C_1$  csucsnál levő szögeket jelöljük  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$ -val. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ , akkor az  $A_1B_1C_1$  háromszög szögei  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$  és  $\frac{\gamma}{2}$ . Tehát az  $A_1B_1C_1$  háromszög szögei függetlenek az  $ABC$  háromszög megválasztásától. Változik-e a feladat állítása, ha az egyenlő szárú háromszögeket befelé szerkesztjük?

2.53. Szerkesszünk egy  $ABC$  háromszög oldalaira szabályos  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ ,  $ABC_1$  háromszögeket. Az  $A_1$  és  $A$  pontok a  $BC$  oldal, a

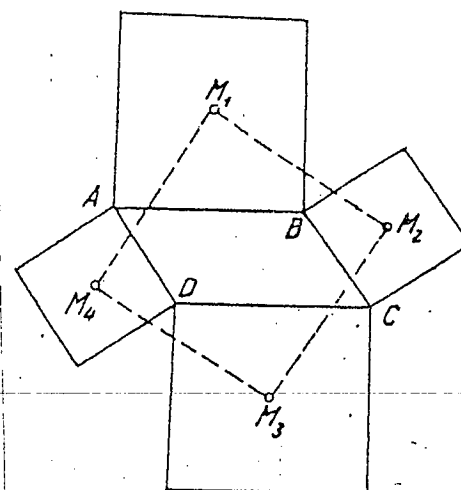


11. ábra

$B_1$  és  $B$  pontok pedig az  $AC$  oldal különböző pontjain helyezkednek el, a  $C_1$  és  $C$  pontokat viszont ne válassza el az  $AB$  oldal. Jelöljük  $M$ -mel az  $ABC_1$  háromszög középpontját. Bizonyítsuk be, hogy az  $A_1B_1M$  háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, melynek az  $M$ -csucsnál levő szöge  $120^\circ$  (11. ábra).

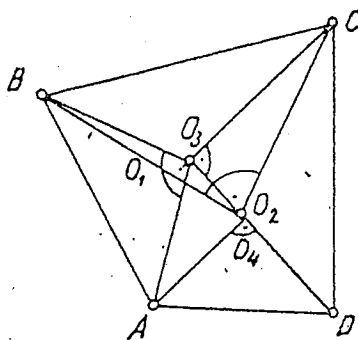
2.54. Egy  $ABCD$  paralelogramma oldalai fölé szerkesszünk kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be,

hogyan ezeknek a négyzeteknek az  $M_1, M_2, M_3, M_4$  középpontjai négyzetet határoznak meg (12. ábra). Megváltozik-e a feladat állítása, ha minden négyzetet befelé rajzolunk?



12. ábra

2.55. Adott egy ABCD konvex négyszög. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $ABO_1$  és a  $CDO_3$  egyenlőszáru derékszögű háromszögek  $O_1$  és  $O_3$  csúcsai egybeesnek, akkor a  $BCO_2$  és a  $DAO_4$  egyenlőszáru derékszögű háromszögek  $O_2$  és  $O_4$  csúcsai is egybeesnek (13. ábra). Az ábrán mind a négy háromszög a négyszög belsőjében van.



13. ábra

2.56. Adva van az AB szakasz meg a vele egyenlő hosszú  $A_1B_1$  szakasz úgy, hogy  $AB \nparallel A_1B_1$ . (Ismeretes, hogy ekkor van egy olyan  $O_1$  pont, amely körüli forgatással a két szakasz megfelelő pontjai fedésbe hozhatók). Toljuk el

az  $A_1B_1$  szakaszt egy tetszőleges irányban az  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3, \dots$  helyzetekbe! Mi lesz az eredeti AB szakaszt az új helyzetekbe átvivő forgatások  $O_2, O_3, \dots$  forgási középpontjainak mértani helye?

2.57. Adva van az AB szakasz meg a vele egyenlő hosszú  $A_1B_1$  szakasz úgy, hogy  $AB \nparallel A_1B_1$ . Forgassuk el az  $A_1B_1$  szakaszt egy tetszőleges K pont körül az  $A_2B_2, A_3B_3, \dots$  helyzetekbe! Mi lesz az eredeti AB szakaszt az új helyzetekbe átvivő forgatások  $O_2, O_3, \dots$  forgási centrumainak halmaza?

2.58. Adva van az AB szakasz meg a vele egyenlő hosszú és párhuzamos  $A_1B_1$  szakasz. Forgassuk el egy tetszőleges  $K_1$  pont körül az  $A_1B_1$  szakaszt az  $A_2B_2, A_3B_3, \dots$  helyzetekbe! Mi lesz az eredeti AB-t ezekbe a helyzetekbe vivő  $O_2, O_3, \dots$  forgási centrumok halmaza?

2.59. Adott az ABCD négyszög négy csúcsa, a négyszög szögei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Forgassuk a sík tetszőleges P pontját a négy csúcs körül rendre egymás után  $\alpha, \beta, \gamma$  és  $\delta$  szöggel! a) Mi a négy forgatás eredője? b) Mikor lesz ez azonosság?

2.60. Az ABC  $\triangle$ -ben adott  $\alpha, b+c$ , továbbá a  $BD+CD$  összeg, ahol D az  $m_b$  magasság talppontja. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.61. Adottak az  $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$  körök és az A pont. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek egyik csúcsa A, a másik kettő pedig egy-egy adott körön van!

2.62. Adott két párhuzamos egyenes és az egyiken egy A pont, továbbá egy tetszőleges P pont. Szerkesszünk az A és a P pontokon át olyan két párhuzamos egyenest, amelyek az adott két egyenessel együtt rombuszt határoznak!

2.63. Adott egy körszelet és egy háromszög. Szerkesszünk az adott háromszöggel egybevágó háromszöget úgy, hogy annak csúcsai a körszelet húrján, illetve ívén legyenek!

2.64. Adott egy kör és egy P pont. Szerkesszünk a körbe olyan ABC  $\triangle$ -et, amelynek adott az a oldala, az  $s_a$  súlyvonal és a súlyvonalnak a P ponton kell áthaladnia!

2.65. Adott három koncentrikus kör. Szerkesszünk olyan egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek minden csúcsa egy-egy körön, a derékszög csúcsa pedig a legnagyobb sugarú körön van!

2.66. Adott egy paralelogramma és az ABC egyenlő szárú háromszög, melynek főcsúcsa C. Szerkesszünk a paralelogrammába az adothoz hasonló háromszöget úgy, hogy C csúcsa a paralelogramma egyik csúcsában legyen, másik két csúcsa pedig egy-egy oldalán!

2.67. Adott a paralelogramma és az  $\omega$  szög. Irjunk e paralelogrammába olyan téglalapot, amelyben az átlók szöge  $\omega$ !

2.68. Adottak az  $(O_1, r_1)$ ,  $(O_2, r_2)$ ,  $(O_3, r_3)$  körök. Keressünk a körökön egy-egy  $(A_1, A_2, A_3)$  pontot úgy, hogy az  $A_1A_2A_3$

$\triangle$  az  $O_1O_2O_3$   $\triangle$ -gel egybevágó legyen!

2.69. Adva van négy olyan sík ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ ) amelyek egy  $t$  egyenesre illeszkednek. Tükrözzünk egy  $P$  pontot a négy síkra egymás után! Hol lesz  $P_{1234}$ ?

2.70. Adva van négy sík:  $S_1 \parallel S_2$ , és  $S_3 \parallel S_4$ , de  $S_2 \nparallel S_3$ . Mivel helyettesíthető a négy sík való egymás utáni tükrözés?

2.71. Adva van négy sík:  $S_1, S_2, S_3, S_4$  úgy, hogy azok ugyanazon  $t$  egyenessel párhuzamosak. Mi lesz a négy egymás utáni tükrözés eredője?

2.72. Adva van négy sík úgy, hogy  $S_1, S_2$  illeszkedik ugyanazon  $t$  egyenesre,  $S_4$  viszont a többihez képest általános helyzetű. Mi lesz a négy egymás utáni tükrözés eredője?

2.73. Mi az összefüggés a szabályos tetraéder lapszöge és a szabályos oktaéder lapszöge között?

2.74. Adva van a szabályos tetraéder négy lapjának síkja:  $S_1, S_2, S_3$  és  $S_4$ . Az  $S_1, S_2, S_3$  síkok közös pontján át vegyünk egy új síkot ( $S_3'$ ), mely párhuzamos  $S_4$ -gyel! Állapítsuk meg, hogy az egy ponton átmenő négy sík mit alkot!

2.75. Adva van egy szabályos tetraéder négy határoló síkja:  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . A négy általános síkra való tükrözésnél tanult módon végezzük el három forgatást úgy, hogy végül is  $S_3$  meg  $S_4$  és  $S_2$  meg  $S_1$  is merőlegesek legyenek egymásra! Mutassuk meg az eredményt rajzban és számításban együtt!

2.76. Adva van a szabályos oktaéderből egy csúcsban összefutó háromszöglap:  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Forgassuk el metszésvonaluk körül  $S_1$ -et és  $S_2$ -t, majd  $S_3$ -at és  $S_4$ -et úgy, hogy  $S_2$  és  $S_3$  azonos legyen mint átlós sík! Keressük meg az  $S_1$  és az  $S_4$  metszésvonalát!

2.77. Az ABC szabályos háromszög alapú gúla alapéle  $2\sqrt{2}$ , oldaléle  $\sqrt{3}$ . Mit állapíthatunk meg a gúla D főcsúcsában összefutó három lap vetületi hároméléről?

2.78. Adva van egy szabályos tetraédernek egy csúcsban összefutó három lapja. Határozzuk meg a vetületi háromél élszögeinek összegét!

2.79. Adva van a térben egy O ponton átmenő négy egyenes:  $a_1, a_2, a_3, a_4$  általános helyzetben. (Ez természetesen azt is jelenti, hogy legfeljebb két egyenes van egy síkban). Tükrözzünk egy tetszőleges P pontot, majd annak tükrképét a négy egyenesre egymás után! Mi lesz a négy tükrözés eredménye, és hogyan érhetjük azt el?

2.80. Legyen a szabályos oktaéder egyik (O) csúcsában összefutó négy él:  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Alkalmazzuk rajzban az előző feladatot erre az esetre!

2.81. Adva van egy ponton átmenő három egyenes úgy, hogy azok páronként merőlegesek egymásra (egy kocka élei). Tükrözzünk egy P pontot, majd annak tükrképét sorban mind a három egyenesre! Mi lesz az eredő elmozdulás?

2.82. Adva van egy O ponton átmenő öt sík általános helyzetben. (Ez természetesen azt is jelenti, hogy egy metszésvonalra több sík nem illeszkedik). Tükrözzünk egy P pontot, majd tükrképét sorban a négy egyenesre egymás után! Mi lesz az eredő mozgás?

2.83. Egy kocka középpontjára illeszkedik a négy csúcstengely:  $d_1, d_2, d_3, d_4$ . Tükrözzünk egy tetszőleges P pontot, majd annak tükrképét sorban a négy egyenesre egymás után! Írjuk le, hogy mivel helyettesíthető a végeredmény!

Irányítást fordító izometriák (M 29-52, V.66-71, 144-151.o)

2.84. Vegyünk fel az MN egyenes egyik partján egy A és egy B pontot. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, hogy az AX és a BX egyenesek az MN egyenessel egyenlő szögeket zárjanak be.

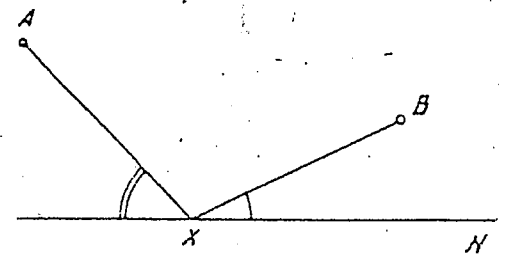
b) Vegyünk fel az MN egyenes egyik oldalán egy  $S_1$  és egy  $S_2$  kört. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, melyből a körhöz huzott érintők egyenlő szögeket zárnak be az MN egyenessel.

c) Vegyünk fel az MN egyenes egyik partján egy A és egy B pontot. Szerkesszünk az MN egyenesen olyan X pontot, hogy az AX egyenes kétszer akkor szöget zárjon be az MN egyenessel, mint a BX egyenes, azaz  $\angle AXM = 2\angle BXN$  (14.ábra).

2.85. Adott egy ponton áthaladó három egyenes. Jelöljük ezeket az egyenesek  $l_1$ ,  $l_2$  és  $l_3$ -mal. Vegyünk fel az egyiken egy A pontot. Szerkesszünk olyan ABC háromszöget, melynek az  $l_1$ ,  $l_2$  és az  $l_3$  egyenesek a szögfelezői!

b) Adott egy S kör és a kör középpontján áthaladó  $l_1$ ,  $l_2$  és  $l_3$  egyenes. Irjunk a kör köré olyan háromszöget, melynek csúcsai az adott egyeneseken vannak.

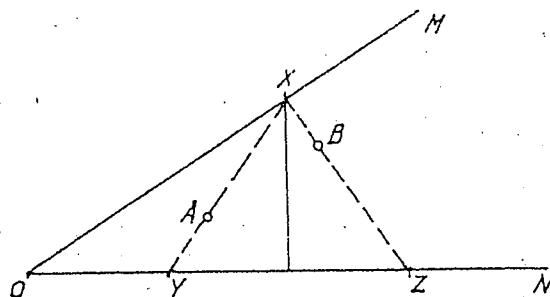
c) Adott egy ponton áthaladó három egyenes. Jelöljük ezeket az egyeneseket  $l_1$ ,  $l_2$  és  $l_3$ -mal. Az egyiken vegyünk fel egy  $A_1$  pontot. Szerkesszünk olyan ABC háromszöget, hogy az  $A_1$  pont a BC oldal felezőpontja, az  $l_1$ ,  $l_2$  és  $l_3$  egyenesek pedig a háromszög oldalfelező merőlegesei legyenek.



14. ábra

2.86. Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismerjük az  $AB = a$  hosszúságu oldalát, ehhez az oldalához tartozó  $m_a$  magasságát és az oldalon fekvő szögek különbségét, a  $\gamma$ -t.

b) Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük két oldalának a hosszát és a harmadik oldalon fekvő szögek különbségét!



15.ábra

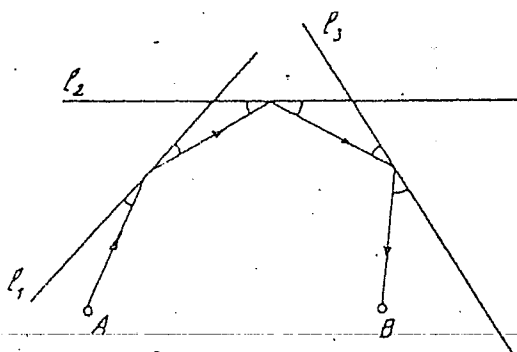
2.87. Adott egy  $MON$  szög és két pont, az  $A$  és a  $B$ . Szerkesszünk az  $OM$  egyenesen olyan  $X$  pontot, hogy az  $XYZ$  háromszög egyenlőszárú háromszög legyen (15.ábra).

2.88. Ismerjük az  $ABCD$  négyszög minden oldalának a hosszát. Szerkesszük meg a négyszöget ha tudjuk, hogy az  $AC$  átlója felezi az  $A$  csucsnál levő szöget!

b) Szerkesszük meg az  $ABCD$  érintőnégyszöget, ha ismerjük az  $AB$  és az  $AD$  oldalak hosszát, valamint a  $B$  és  $D$  csucsoknál levő szögek nagyságát.

2.89. Tudjuk, hogy a biliárdgolyó egy egyenes falról ugyanakkora szög alatt verődik vissza, mint amekkora szögben nekiütközött.

Adott a síkban  $n$  egyenes és a két pont. Jelöljük az egyeneseket  $l_1, l_2, \dots, l_n$ -nel a két pontot pedig  $A$ -val és  $B$ -vel.



16. ábra

Milyen szög alatt kell ellökni a golyót az A pontból, hogy egymásután mindegyik egyenesről való visszaverődés után a B pontba jusson a golyó (16. ábra  $n=3$ ).

b) Vizsgáljuk meg ennek a feladatnak azt a speciális esetét, amikor az A pont megegyezik a B ponttal,

$n=4$  és az  $l_1, l_2, l_3, l_4$  egyenesek téglalapot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben a biliárdgolyó által megtett ut a téglalap átlójának a kétszeresével egyezik meg (azaz a megtett ut nagysága független az A pont megválasztásától.) Bizonyítsuk be azt is, hogy ha a golyó az A pontba történő visszatérése után tovább mozog, akkor újabb négy visszaverődés után ismét visszatér az A pontba.

2.90 Adott az  $l$  egyenes különböző partjain egy A és egy B pont. Szerkesszünk az egyenesen olyan X pontot, hogy az AX és BX szakaszok összege adott a hosszúságú szakasszal egyezzen meg.

b) Adott az  $l$  egyenes különböző partjain egy A és egy B pont. Szerkesszünk az egyenesen olyan X pontot, hogy az AX és a BX szakaszok hosszkülönbsége adott a hosszúság legyen.

2.91. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetszőleges ABC háromszög magasságpontját tükrözzük az oldalakra, akkor a tükörképek a háromszög köré írt körön lesznek.

b) Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha ismerjük a magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképeit!

2.92. Vegyük fel a síkban az  $A_1, A_2, A_3, A_4$  pontokat úgy, hogy az  $A_4$  pont az  $A_1A_2A_3$  háromszög magasságpontja legyen.

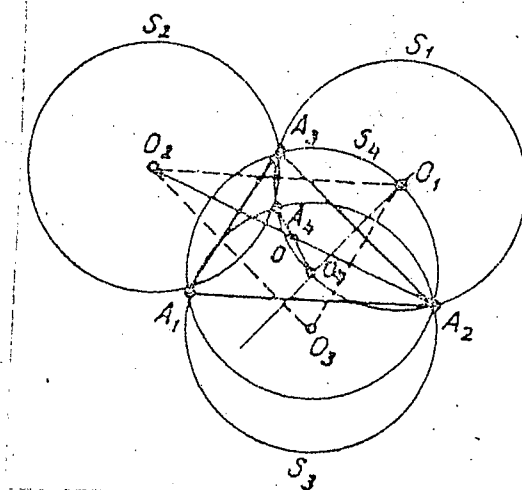
Jelöljük az  $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4$  és az  $A_2A_3A_4$  háromszögek köré írt köröket  $S_4, S_3, S_2$  és  $S_1$ -gyel, a középpontjaikat pedig  $O_4, O_3, O_2$  és  $O_1$ -gyel.

Bizonyítsuk be, hogy:

a) Az  $A_1$  pont az  $A_2A_3A_4$  háromszögnek, az  $A_2$  pont az  $A_1A_3A_4$  háromszögnek, az  $A_3$  pont pedig az  $A_1A_2A_4$  háromszögnek a magasságpontja.

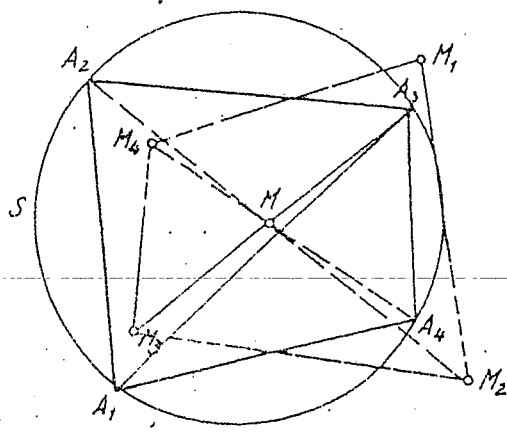
b) Az  $S_1, S_2, S_3$  és az  $S_4$  körök sugarai megegyeznek.

c) Az  $O_1O_2O_3O_4$  négyszög valamilyen  $O$  pontja vonatkozóan az  $A_1A_2A_3A_4$  négyszög tükörképe (17. ábra). (A feladat c) részét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az  $A_iO_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) szakaszok felezőpontjai egybeesnek.)



17. ábra

2.93. Adott a síkban négy pont. Jelöljük ezeket a pontokat  $A_1, A_2, A_3, A_4$  -gel. Jelöljük az  $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4, A_2A_3A_4$  háromszögek magasságpontjait rendre



18. ábra

$M_4, M_3, M_2, M_1$  -gyel. Bizonyítsuk be, hogy ha az  $A_1A_2A_3A_4$  pontok egy körön helyezkednek el, akkor:

a) Az  $M_1M_2M_3M_4$  négyszög az  $A_1A_2A_3A_4$  négyszögnek valamilyen  $M$  pontra vonatkozó tükörképe lesz (18. ábra). (Azt is mondhatjuk, hogy az  $A_iM_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) szakaszok felezéspontjai megegyeznek, ez lesz az  $M$  pont).

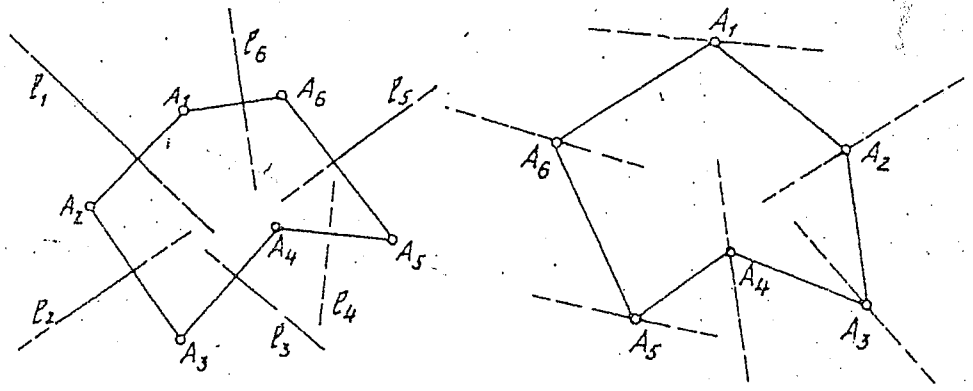
b) az  $A_1A_2M_3M_4$ ,  $A_1A_3M_2M_4$ ,  $A_1A_4M_2M_3$ ,  $A_2A_3M_1M_4$ ,  $A_2A_4M_1M_3$ ,  $A_3A_4M_1M_2$  és  $M_1M_2M_3M_4$  pontnégyesek egy-egy körön helyezkednek el, és ezeknek a köröknek a sugarai egyenlők.

2.94. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sokszögnek kettőnél több szimmetriatengelye van, akkor azok mind egy pontban metszik egymást!

2.95. Adott az  $l$  egyenes egyik oldalán két pont, az  $A$  és a  $B$ , valamint egy  $a$  hosszúságú szakasz. Keressünk az  $l$  egyenesen olyan  $a$  hosszúságú  $XY$  szakaszt, hogy az  $AXYB$  töröttvonal hossza minimális legyen.

2.96. Szerkesszük meg az  $ABCD$  négyszöget, ha tudjuk, hogy a  $C$  és a  $D$  csucsánál levő szögek egyenlők, továbbá ismerjük az  $AB$  és a  $CD$  oldalak hosszát, valamint a  $BC$  és az  $AD$  oldalak összegét és az  $A$  pontnak a  $CD$  oldaltól való  $d$  távolságát.

2.97. A fénysugár a síktükörről úgy verődik vissza, hogy a beesési szög és a visszaverődési szög megegyezik. Helyezzünk el a síkon két egymással  $\alpha$  szöget bezáró síktükört. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\alpha = \frac{90^\circ}{n}$ , ahol  $n$  egész szám, akkor bármely olyan fénysugár, amely bejut ebbe a tartományba, bizonyos számú visszaverődés után a bejövő iránnyal ellentétes irányban jut ki ebből a tartományból.



19/a-b ábra

2.98. Adottak a sík  $l_1, l_2, \dots, l_n$  egyenesei. Szerkesszünk olyan  $A_1 A_2 \dots A_n$  sokszöget, amelynek ezek az egyenesek

- a) az oldalfelező merőlegesei (19/a ábra),
- b) a csucsoknál levő külső vagy belső szögfelezői (19/b ábra).

Vizsgáljuk meg külön azt az esetet, amikor  $n$  páros; és azt az esetet, amikor  $n$  páratlan! Milyen esetekben nem lesz a feladatnak megoldása, és milyen esetekben lesz a feladat határozatlan?

2.99. Adott a síkon  $n - 1$  darab egyenes az  $l_2, l_3, \dots, l_n$  és egy  $M$  pont. Szerkesszünk olyan  $A_1 A_2 \dots A_n$   $n$  oldalú sokszöget, amelynél

a) az  $A_1 A_2$  oldal felezőpontja  $M$ , a többi oldal felezőmerőlegesei pedig az adott egyenesek.

b) Az  $A_1$  csucsánál levő szög nagysága  $\alpha$  és ennek a szögnek a szögfelezője haladjon át az  $M$  ponton, az  $A_2, A_3, \dots, A_n$  csucsoknál levő szögek szögfelezői pedig az adott  $l_2, \dots, l_n$  egyenesek legyenek.

2.100. Szerkesszünk egy adott sugarú körbe beírt  $n$  oldalú sokszöget, amelynek az oldalai párhuzamosak a sík előre megadott  $n$  darab egyenesével!

2.101. Adott az  $ABC \triangle$   $b$  oldala  $\alpha$  szöge és az  $a-c$  különbség. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.102. Adott az  $ABC \triangle$  -ben az  $a$  oldal, az  $\alpha$  szög és a  $b-c$  különbség. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.103. Adott az  $ABC \triangle$  -ben az  $m_a$  magasság, a  $\beta - \gamma$  különbség és  $r$ , a körülírt kör sugara. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.104. Adott az  $ABC \triangle$   $a$  oldala  $m_a$  magassága, valamint a  $\beta - \gamma$  különbség. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.105. Adott az  $ABCD$  négyszög négy oldala, és tudjuk, hogy az  $AC$  átló az  $\alpha$  szög felezője. Szerkesszük meg a négyszöget!

2.106. Képzeljünk el egy háromszög alakú biliárdasztalt és azon két pontszerű golyót. Milyen irányban kell az egyik

golyót ellökni, hogy az asztal mindhárom oldalán visszaverődve, eltalálja a másik golyót?

2.107. Adott az ABCD négyszög oldalainak négy felező merőlegese (helyzetüket tekintve). Szerkesszük meg a négyszöget!

2.108. Adott a  $k_1$  meg a  $k_2$  kör és egy  $g$  egyenes. Szerkesszünk a két körhöz egy-egy olyan  $t_1$ , illetve  $t_2$  érintőt, hogy azok metszéspontja  $g$ -n legyen, továbbá a  $t_1g$  szög a  $gt_2$  szöggel egyenlő legyen!

2.109. Adott egy hegyesszög két szára ( $a$  és  $b$ ), továbbá a szögtartományon belül a  $P$  és a  $Q$  pontok. Szerkesszünk olyan ABC egyenlő szárú háromszöget, melynek főcsúcsa,  $A$  a  $b$  egyenesen van, alapja ( $BC$ ) az  $a$  egyenesen, továbbá egy-egy szára a  $P$  és a  $Q$  pontokon halad át!

2.110. Adott az  $A$  és a  $B$  pont s a  $B$ -re illeszkedő  $b$  egyenes. Keressünk a  $b$ -n olyan  $X$  és  $Y$  pontot, amelyek  $B$ -től egyenlő távol vannak, s az  $XY$  szakasz az  $A$  pontból adott  $\alpha$  szög alatt látszik!

2.111. Adott a két metsző kör. Az egyik metszésponton ( $P$ ) át olyan szelőt szerkesszünk, amely a köröket még egy-egy olyan pontban metszi, hogy a velük meghatározott szakasznak  $P$  a felezési pontja legyen!

2.112. Adott ABCD négyszögbe írjunk paralelogrammát úgy, hogy csúcspontjai a négyszög oldalain, átlóinak metszéspontjai pedig egy adott  $P$  pontban legyen!

2.113. Adott egy  $ABC \triangle$  a oldala,  $s_b$  súlyvonala és az  $s_a b \sphericalangle = \lambda$  szög. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.114. Adott az  $ABC \triangle \sphericalangle$  szöge,  $s_b$  súlyvonala és az  $as_c \sphericalangle = \varepsilon$  szög. Szerkesszük meg a háromszöget!

2.115. Adva van két egybevágó  $ABC \triangle$  és  $A_1 B_1 C_1 \triangle$  úgy, hogy körüljárásuk ellentétes.

I. Szerkesszük meg azt az  $e_1$  tükrözési tengelyt, amelyhez tartozó csúszó tükrözéssel a két háromszög fedésbe hozható!

II. Forgassuk el egy tetszőleges  $K$  pont körül az  $A_1 B_1 C_1 \triangle$ -et az  $A_2 B_2 C_2$ ,  $A_3 B_3 C_3, \dots$  helyzetekbe! Az eredeti  $ABC \triangle$ -nek ezen új helyzetekbe való transzformálása csúszó tükrözéssel különböző  $e_2, e_3, \dots$  tengelyek mellett lehetséges. Mit mondhatunk ezekről a tengelyekről?

### 3.§. Hasonlóságok

A hasonlóságok vizsgálatánál a vektorokat is és a párhuzamos szelők tételét is használjuk, így mindenképp előtte az idetartozó fogalmakat tekintjük át.

A  $(P, Q)$  rendezett pontpárokat elemi vektoroknak vagy a  $P$  pontban kötött vektoroknak nevezzük, de használjuk a  $Q$  pontnak a  $P$ -re vonatkozó helyvektora elnevezést is. Két elemi vektort ekvivalensnek tekintünk, ha párhuzamos eltolással egymásba transzformálhatók. Az így nyert ekvivalencia osztályokat nevezzük vektoroknak.

A  $(P, Q)$  által reprezentált vektort  $\underline{PQ}$  jellel jelöljük.

A reprezentációk segítségével definiálható a

$$\underline{PQ} + \underline{QR} := \underline{PR}$$

összeadás művelete, amelyre nézve a vektorok Abel csoportot alkotnak. Ha  $\lambda$  valós szám, akkor a  $\lambda \underline{PQ}$  vektor definíció szerint a  $\lambda \underline{PQ} := \underline{PR}$ , ahol  $R$  a  $(PQ, \leq)$ ,  $P \leq Q$ , rendezett egyenesen az a pont, amelyre  $|\underline{PR}| = |\lambda| |\underline{PQ}|$  és  $\lambda \geq 0$  esetén,  $R \geq P$  ill.  $\lambda < 0$  esetén  $R \leq P$ , teljesül. Megmutathatók a következő műveleti szabályok:

$$0 \cdot \underline{x} = \underline{0},$$

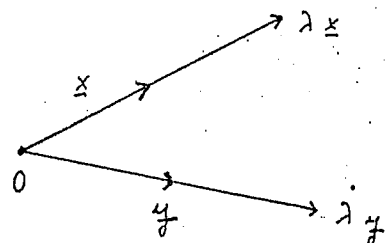
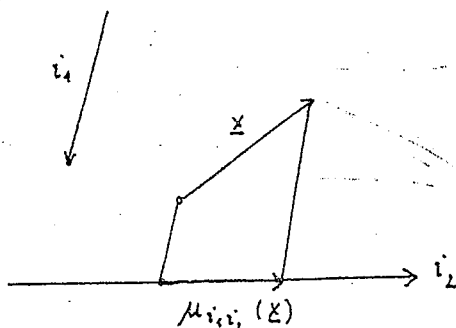
$$1 \cdot \underline{x} = \underline{x},$$

$$(\alpha + \beta) \underline{x} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{x},$$

$$(\alpha \beta) \underline{x} = \alpha (\beta \underline{x}),$$

$$\alpha (\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y},$$

Az utolsó disztributív tulajdonság a következő u.n. párhuzamos szelők tételéből igazolható. Legyen  $i_1$  és  $i_2$  a sík két különböző iránya. Ekkor a sík bármely  $\underline{x}$  vektora az  $i_1$  irányból



20. ábra

az  $i_2$  irányba levetíthető (ld. az ábrát). Jelöljük ezt a vetületi vektort a  $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$  jellel. Ekkor a párhuzamos szelők tétele úgy is megfogalmazható, hogy a  $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$  függvény homogén és additív, vagyis

$$\mu_{i_1 i_2}(\lambda \underline{x}) = \lambda \mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$$

$$\mu_{i_1 i_2}(\underline{x} + \underline{y}) = \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}) + \mu_{i_1 i_2}(\underline{y})$$

teljesül.

Tekintsünk most egy  $O$  pontot és  $\lambda \neq 0$  valós számot, és minden  $O$  pontban kötött helyvektort nyujtsuk meg

$\lambda$ -szorosára. Ekkor a síkban vagy térben olyan  $O_\lambda$  ponttranszformációt kapunk, amelyről a párhuzamos szelők tételének többszörös alkalmazásával megmutatható, hogy minden szakaszt  $|\lambda|$ -szorosára nyújt meg. Ezeket a ponttranszformációkat centrális hasonlóságoknak nevezzük. Ezek azzal a tulajdonsággal is rendelkeznek, hogy minden egyenest önmagának párhuzamos egyenesbe transzformálnak.

Általánosan a hasonlóságokat olyan  $P \rightarrow P'$  ponttranszformációként definiáljuk, amelyeknél bármely  $P, Q$  pontra  $|P'Q'| / |PQ| = \lambda > 0$  (konstans). A  $\lambda$  a hasonlóság paramétere, és a hasonlóságot  $H_\lambda$  jellel jelöljük.

Mivel az  $O_\lambda \circ H_\lambda = \alpha$  leképezés izometria, ezért minden hasonlóság  $H_\lambda = O_\lambda \circ \alpha$  alakban egy izometriának

és egy centrális hasonlóságnak a szorzata. Ebből adódik, hogy a hasonlóságok egyenes- és szög-tartóak. Egy  $H_\lambda$  hasonlóságot irányítás tartónak ill. irányítás fordítónak nevezünk, ha a  $H_\lambda = O_\lambda \alpha$  előállításban az  $\alpha$  izometria irányítás tartó ill. irányítás fordító.

A hasonlóságokra érvényes a következő fixpont tétel:

Ha egy hasonlóság nem izometria, akkor egy és csak egy fixpontja létezik.

Ha  $H_\lambda = O_\lambda \alpha$  előállítás és a fenti fixpont tétel módot nyújt arra, hogy az izometriákra adott osztályozás segítségével a hasonlóságokat is osztályozzuk. E szerint a síkban a nem izometrikus hasonlóságok vagy tükrözve nyújtások vagy forgatva nyújtások. A tér hasonlóságaira is ilyen osztályozás adható, de a kérdés akkor természetesen összetettebb.

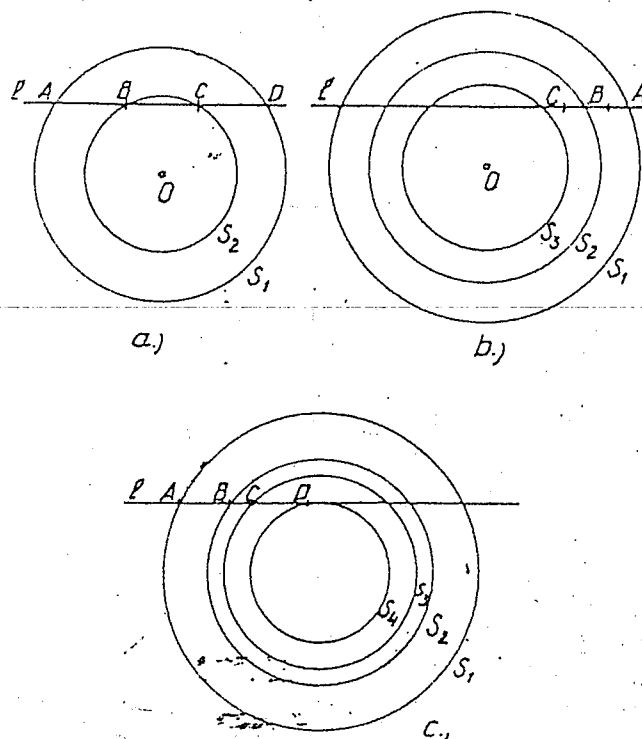
3.1. Adott két egyenes,  $l_1$  és  $l_2$ , valamint az A pont. Az A ponton át húzzunk olyan  $l$  egyenest, amelyből  $l_1$  és  $l_2$  olyan BC szakaszt metsz ki, hogy  $AB:AC = m:n$ .

3.2. Adott egy S kör és rajta egy A pont. Határozzuk meg az A ponton átmenő hurok középpontjainak halmazát.

b) Adott egy S kör és rajta három pont A, B és C.

Szerkesszük meg azt az AX hurt, amelyet a BC hur felez.

3.3. Adott két koncentrikus kör  $S_1$  és  $S_2$ . Szerkesszünk olyan  $l$  egyenest, mely ezeket a köröket az egymásután következő A, B, C és D pontokban metszi úgy, hogy  $AB=BC=CD$  (21/a ábra).



21/a-b-c. ábra

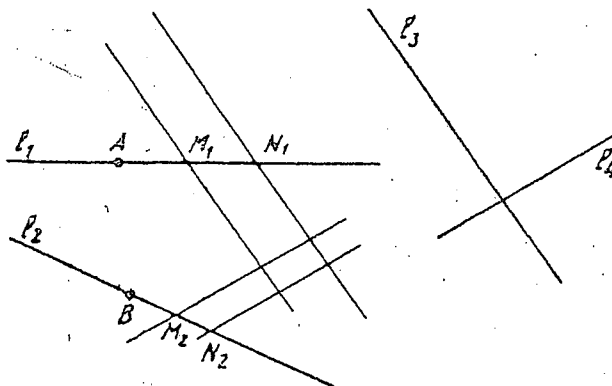
b) Adott három koncentrikus kör  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$ . Szerkesszünk olyan egyenest, mely az  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  köröket az egymásután következő A, B és C pontokban metszi és  $AB=BC$  ( 21/b. ábra).

c) Adott négy koncentrikus kör  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  és  $S_4$ . Szerkesszünk olyan  $l$  egyenest, amely a köröket rendre az A, B, C és D pontokban metszi úgy, hogy  $AB=CD$  (21/c. ábra).

3.4. Irjunk az adott ABC háromszögbe négyzetet úgy, hogy két csúcsa az AB oldalra, a másik kettő pedig az AC és BC oldalakra essen.

b) Irjunk az ABC háromszögbe olyan háromszöget, melynek oldalai párhuzamosak az  $l_1$ ,  $l_2$  és  $l_3$  egyenesekkel.

3.5. Adott az  $l_1$  és  $l_2$  egyenes:  $l_1$ -en az A pont,  $l_2$ -n a B pont. Mérjük fel az  $l_1$  és  $l_2$  egyenesekre az A illetve B pontból kiindulva olyan  $AM_1$  és  $BM_2$  szakaszokat, hogy az  $\frac{AM_1}{BM_2} = n$  arány előre adott legyen.  $M_1$  és  $M_2$  pontokon át húzzunk az adott  $l_3$  illetve  $l_4$  egyenessel párhuzamost (22. ábra). Határozzuk meg a különböző  $n$  értékeknél kapott egyenesek metszéspontjainak halmazát.



22. ábra

b) Az  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  sokszöget változtassuk meg úgy, hogy oldalai adott irányokkal párhuzamosak maradjanak  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  csucsai pedig az adott  $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$  egyeneseken csusszanak. Határozzuk meg az  $A_n$  csucsok halmazát.

c) Írjunk adott sokszögbe olyan sokszöget, melynek oldalai adott egyenesekkel párhuzamosak<sup>1/</sup>

<sup>1/</sup> Adott sokszögbe írt sokszög alatt azt értjük, melynek minden csucsa az adott sokszög oldalaira (minden oldalon egy csucs) vagy azok meghosszabbítására esik.

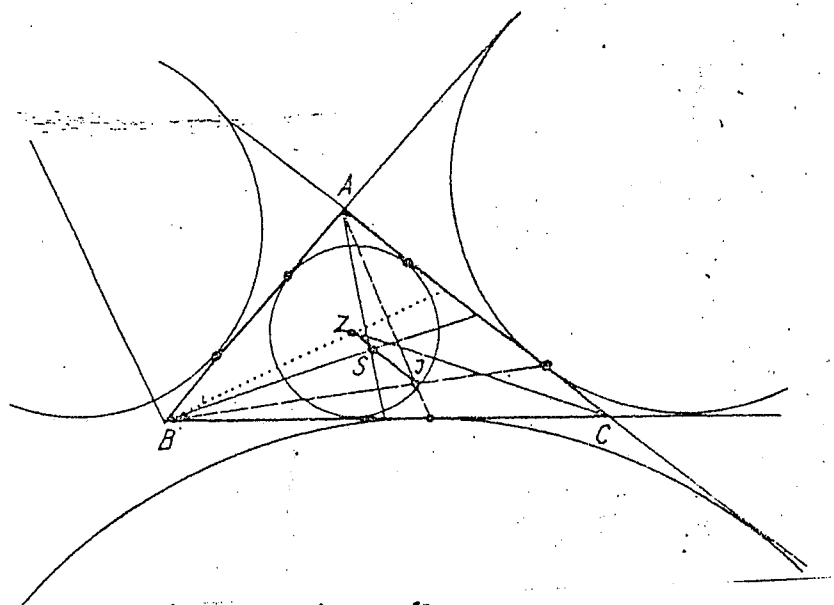
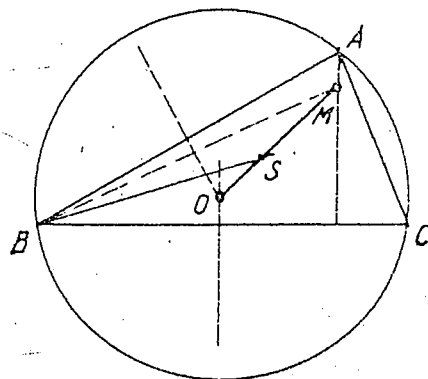
3.6. Szerkesszünk olyan  $S$  kört, amely

a) Két adott  $l_1$  és  $l_2$  egyenest érint és átmegy az adott  $A$  ponton;

b) átmegy két adott ponton,  $A$ -n és  $B$ -n, és az adott  $l$  egyenest érinti;

c) két adott  $l_1$  és  $l_2$  egyenest és egy  $S$  kört érint.

3.7. Bizonyítsuk be, hogy az  $ABC$  háromszög súlyvonalainak  $S$  közös pontja, a körülírt kör  $O$  középpontja és az  $M$  magasságpont egy egyenesen van és  $\frac{MS}{SO} = \frac{2}{1}$  (23/a ábra).  
(Ezt az egyenest a háromszög Euler egyenesének nevezzük).



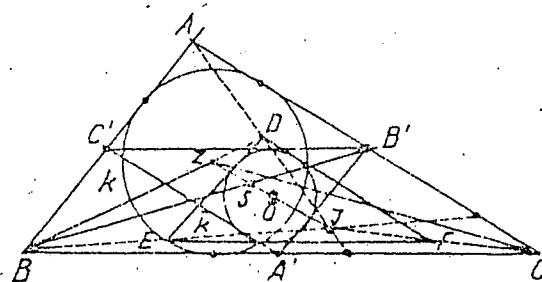
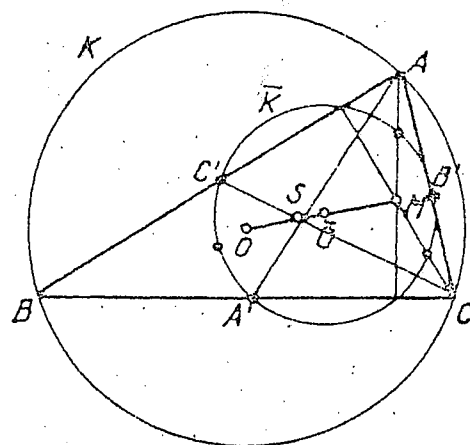
23/a-b ábra.

b) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög oldalfelező pontjain átmenő és a szemközti szögfelezővel párhuzamos egyenesek egy pontban metszik egymást.

c) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög csucsait a szemben levő oldal hozzáírt körének érintési pontjával összekötő egyenesek egy J pontban metszik egymást. Ez a pont a súlyvonalak S metszéspontjával és a beírt kör Z középpontjával egy egyenesen van és

$$\frac{JS}{SZ} = \frac{2}{1} \quad (23/b. \text{ábra}).$$

3.8. Legyen M az ABC háromszög magasságpontja, S pedig a súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy az a K kör, amelyet a K körülírt körből M középpontu,  $\frac{1}{2}$  arányu hasonlósággal kapunk, származtatható K-ból S középpontu,  $-\frac{1}{2}$  arányú hasonlósággal is. Ez a kör átmegy az A', B', C' oldalfelező pontokon, magasságok talppontjain, és az MA, MB, MC szakaszok felezőpontjain (24/a ábra).



24/a-b ábra.

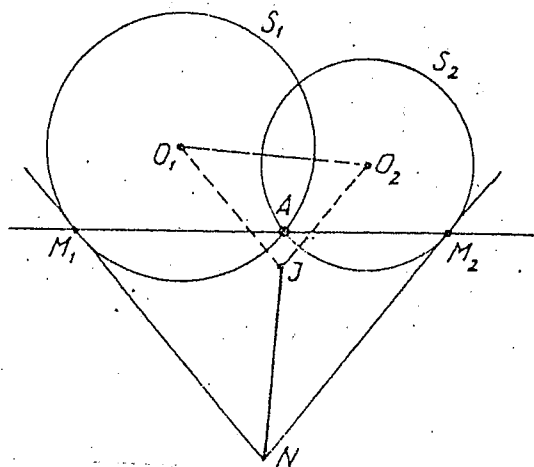
(A K kört a háromszög Euler körének, Feuerbach körének vagy kilenc pont körének is nevezzük.)

b) Legyen J az ABC háromszög csucsait a szemben levő oldalak és a hozzáírt körök érintési pontjaival összekötő

egyenesek közös pontja és  $S$  a háromszög súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy az a  $\bar{K}$  kör, mely középpontosan hasonló a  $k$  beírt körhöz a  $J$  hasonlósági középpontra vonatkozóan  $\frac{1}{2}$  aránnyal, származtatható  $k$ -ből  $S$  középpontu,  $-\frac{1}{2}$  arányú hasonlósággal is. Ez a kör érinti az  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  középvonalakat és a  $JA$ ,  $JB$ ,  $JC$  szakaszok felezéspontjait ( $D$ ,  $F$ ,  $E$ ) összekötő egyeneseket (24/b ábra).

3.9. Az  $ABC$  háromszögbe írjunk olyan  $PXY$  háromszöget ( $P$  az  $AB$  oldal adott pontja), mely egy adott  $LMN$  háromszöghöz hasonló.

b) Az  $ABCD$  paralelogrammába írjunk egy adott  $KLMN$  paralelogrammához hasonló paralelogrammát.



25. ábra

3.10. Az  $S_1$  és  $S_2$  kör egyik közös pontján,  $A$ -n húzzunk egy tetszőleges egyenest. Ennek a körökkel való második metszéspontjait jelöljük  $M_1$ -gyel és  $M_2$ -vel. Ezután a körök  $O_1$  és  $O_2$  középpontjaiból húzzunk az  $M_1$  illetve  $M_2$  pontokba húzott  $M_1N$  és  $M_2N$  érintőkkel párhuzamos egyeneseket ( $O_1J$  és  $O_2J$ ), (25. ábra). Bizonyítsuk be, hogy a  $JN$  egyenesek egy ponton mennek át, és a  $JN$  szakasz hossza állandó ( az  $M_1AM_2$  egyenes megválasztásától független).

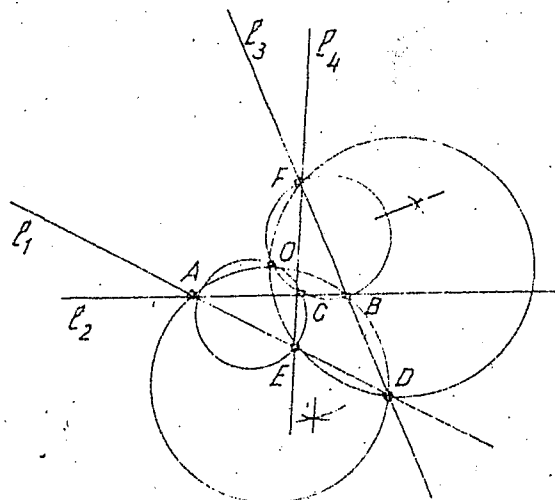
3.11. Szerkesszünk olyan ABCD hurnégyszöget, melynek oldalai adottak:  $AB=a$ ,  $BC=b$ ,  $CD=c$ , és  $DA=d$ .

b) Szerkesztendő ABCD négyszög, ha adott a B és D csúcsainál levő szögeinek összege és oldalainak hossza:  $AB=a$ ,  $BC=b$ ,  $CD=c$ , és  $DA=d$ .

Az a) feladat a b) speciális esete.

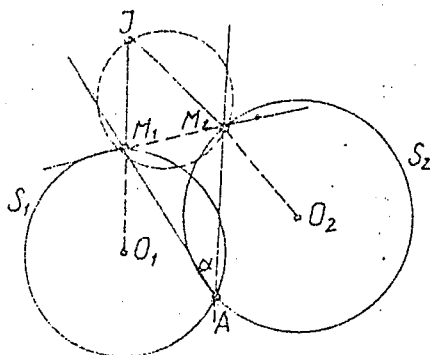
3.12. Szerkesszünk olyan S kört, mely két egyenest  $l_1$ -et és  $l_2$ -t érint, és az adott  $\bar{S}$  kört  $\alpha$  szög alatt metszi. (Két metsző kör hajlásszögén, a metszéspontjukban húzott érintőik által bezárt szöget értjük).

3.13. A síkon adott négy olyan egyenes  $l_1, l_2, l_3$  és  $l_4$ -, melyekből bármely három nem megy át egy ponton, és bármely kettő nem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott négy háromszög körülírt körei egy ponton mennek át (26. ábra).



26. ábra

3.14. Legyen  $S_1$  és  $S_2$  két, egymást az A pontban metsző  $O_1$  és  $O_2$



27. ábra

középpontú kör. Tekintsük egy tetszőleges  $\alpha$  szöget, melynek csúcsa az A pontban van. Legyen  $M_1$  és  $M_2$  a szög szárainak  $S_1$  és  $S_2$  körrel való metszéspontja. J pedig az  $O_1M_1$  és  $O_2M_2$  egyenesek metszéspontja (27 ábra).

a) Bizonyítsuk be, hogy ha a szöget az A pont körül forgatjuk az  $M_1M_2J$  háromszög körülírt köre mindig átmegy egy rögzített O ponton.

b) Keressük meg a különböző  $\alpha$  szögekhez tartozó O pontok halmazát.

3.15. Rajzoljunk egy n-szög oldali fölé előre adott háromszögekhez hasonló háromszögeket. Ezek csúcsai legyenek rendre  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .  $M_1, M_2, \dots, M_n$  és az adott háromszögek ismeretében szerkesszük meg az eredeti n-szöget. Mikor nincs megoldás, és a feladat mikor nem meghatározott?

3.16. Adott az l egyenes, rajta az A pont és az  $S_1, S_2$  körök. Szerkesszünk olyan ABC háromszöget, melyben az l egyenes az A csúcsnál levő szöget felezi, a B és C csúcsok az  $S_1$  illetve  $S_2$  körön vannak, és az AB, AC oldalak aránya az adott m:n érték.

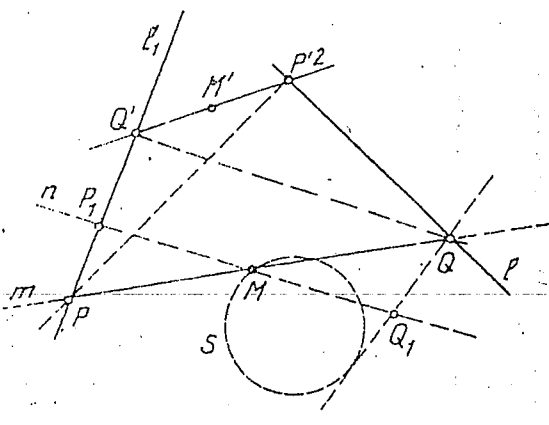
3.17. Szerkesszünk olyan ABCD négyszöget, amelynek AC átlója az A csúcsnál levő szög szögfelezője, ha

a) adott az AB és CD oldal, az AC átló és a B és C csúcsoknál levő szögek különbsége;

b) adott a BC és CD oldal, valamint az AB és AD oldalak aránya és a B és D csúcsoknál levő szögek különbsége.

c) adott az AB és AD oldal, AC átló valamint a BC és CD oldalak aránya.

3.18. Oldjuk meg a 3.17. feladatot - az AC átló az A csúcsnál levő szög szögfelezője- feltétel helyett azzal az általánosabb kikötéssel, hogy a BAC és DAC szögek adott  $\gamma$  - val különbözzenek.



28.ábra

3.19. A síkon adott két egyenes  $l_1$  és  $l_2$ . A sík minden  $M$  pontjának feleltessünk meg egy új  $M'$  pontot a következőképpen: Legyen  $m$  az  $M$ -en átmenő olyan egyenes, melynek  $l_1$  és  $l_2$  közé eső  $PQ$  szakaszát az  $M$  pont felezi,  $P'$  és  $Q'$  pedig  $P$  és  $Q$   $l_2$ -re, illetve  $l_1$ -re való merőleges vetületei és  $M'P'Q'$  szakasz felezőpontja

(28.ábra). Mozgassuk az  $M$  pontot egy körön. Mi lesz ekkor az  $M'$  pontok halmaza? (M. 53-77.o)

#### 4.§. Kristály-csoportok, rács-geometria.

Valamely ponthalmazt invariánsan hagyó izometriák nyilvánvalóan csoportot alkotnak, amit a ponthalmaz szimmetria csoportjának nevezünk. A szimmetria csoportban a mozgások részcsoportot alkotnak. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a mozgásokra vonatkozó szimmetria csoportokat vizsgáljuk.

A síkban vagy térben egy ponthalmazt diszkrétnek nevezük, ha zárt és a halmaz minden pontja a többitől gömbkörnyezettel elválasztható. Legyen most  $G$  a mozgások valamely részcsoportja. Ekkor egy  $x$  pontnak a  $G$ -re vonatkozó  $G(x)$  pályáján a

$$G(x) := \{ g(x) \mid g \in G \}$$

ponthalmazt értjük, vagyis amibe a  $G$  elemei az  $x$  pontot kimozdítják.

A  $G$  részcsoportot diszkrétnek mondjuk, ha minden  $x$  pontra a  $G(x)$  pálya diszkrét pontthalmaz.

Ha  $G$  a sík mozgásainak diszkrét részcsoportja, akkor párhuzamos eltolásokat és forgásokat tartalmaz csupán. Így durván  $G_0, G_1, G_2$  csoportokat különböztethetünk, ahol az index annyit jelent, hogy hány független irányban tolhatunk el párhuzamosan a csoport elemei által.

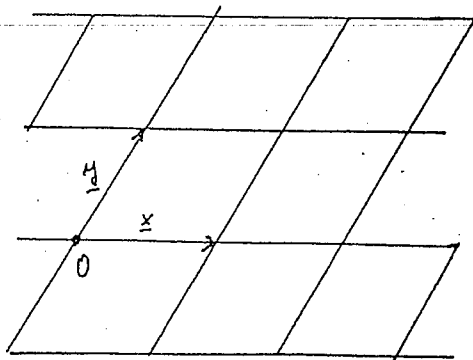
(1) A  $G_0$  csoportok csak forgásokat tartalmazznak és megmutatható, hogy csak azonos centrumú forgásokat. Fontosabban, szerepel benne egy  $2\pi/n$  szöggel forgató u.n. minimális  $\varphi$  forgás, és a csoport ennek a hatványai-ból áll:  $G_0 = \{ \varphi^0 = id, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n-1} \}$ .

(2) Egy  $G_1$  csoportban a párhuzamos eltolások egy  $P_1$  részcsoportot alkotnak. A  $P_1$  csoportban szerepel egy u.n. minimális  $\varphi$  eltolás, és a  $P_1$  többi eleme ennek a hatványaiként állítható elő:  $P_1 = \{ \varphi^0 = id, \varphi^{\pm 1}, \varphi^{\pm 2}, \dots \}$ . Ha egy  $G_1$  tartalmaz forgást is, akkor az csak centrális tükrözés lehet. Ekkor, ha a minimális eltolás egységnyi, akkor a centrumok sorban egy, az eltolás irányába fekvő egyenesen,  $1/2$ -távolságra helyezkednek el.

(3) Egy  $G_2$  csoportban a párhuzamos eltolások egy  $P_2$  jellel jelölt részcsoportot alkotnak. A  $P_2$  tartalmaz két független irányú  $\varphi, \gamma$  minimális eltolást, és a  $P_2$  ezek hatványainak szorzataiból áll:

$$P_2 = \{ \varphi^m \gamma^n \mid m, n \in \mathbb{N} \}.$$

Valamely 0 pontnak  $P_2(0)$  pályája rácsot alkot, abban az értelemben, hogy a pontok az  $\underline{x} = 0 \varphi(0)$ ,  $\underline{y} = 0 \gamma(0)$



29. ábra

független, 0-ra vonatkozó helyvektorok egész együtthatós lineáris kombinációjaként állnak elő:  $P_2(0) = \{ m\underline{x} + n\underline{y} \mid m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}.$

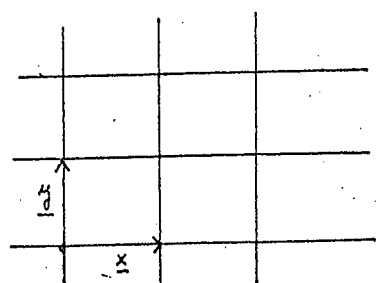
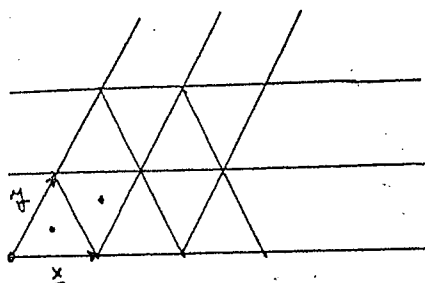
Ha egy  $G_2$  csoport tartalmaz forgást, akkor Barlow tétele szerint ezek csak  $\pi/3, \pi/2,$

$2\pi/3$  vagy  $\pi$  szögűek lehetnek és  $\pi/2$  szögű forgás sosem szerepel együtt  $\pi/3$  vagy  $2\pi/3$  szögű forgással.

Ez a tétel módot ad a  $G_2$  csoportok teljes osztályozására. Öt eset lehetséges:

$$(3)_1 \quad G_2 = P_2 = \{ \varphi^m \gamma^n \mid m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}.$$

(3)<sub>2</sub> Tekintsünk egy szabályos háromszögekből felépülő rácsot. Ekkor a  $P_2 \subset G_2$  csoport a fent leírt csoport, a forgások pedig a következők:



30. ábra

Minden rácspontban vesszük a  $\pi/3$ ,  $2\pi/3$  és  $\pi$  szögű forgásokat. Minden szabályos háromszög középpontjában vesszük a  $2\pi/3$  szögű forgást és a háromszögek oldalain a felező pontban pedig a  $\pi$  szögű forgást.

(3)<sub>3</sub> A rács és a  $P_2$  ugyanaz, mint fent. Továbbá minden rácspontban és a háromszögek középpontjában  $2\pi/3$  szögű forgásokat tekintünk.

(3)<sub>4</sub> Tekintsünk egy négyzetrácsot és az általa definiált  $P_2$  csoportot. A  $G_2$  csoport forgásai a rácspontokban elhelyezett  $\pi/2$  és  $\pi$  szögű forgások, valamint az oldalak felezőpontjában  $\pi$  szögű forgásokat tekintünk.

(3)<sub>5</sub> Egy tetszőleges rács minden rácspontjában centrális tükröseket tekintünk. A  $P_2 \subset G_2$  csoport természetesen a (3)<sub>1</sub>-ben definiált csoport.

Az itt leírt csoportokat 2-dimenziós kristály-csoportoknak is nevezik. [Most pedig rátérünk a rácsok geometriájának vizsgálatára.

A rácsban egy paralelogrammát üres-vagy alapparalelogrammá-  
nak nevezzük, ha csúcsai rácspontok, de sem a határán sem a belselyében már más rácspontot nem tartalmaz. Valamely rácsba különféle, egymással nem egybevágó alapparalelogrammák írhatók. Viszont igaz az a tétel, hogy ezeknek az alapparalelogrammáknak a területe megegyezik, és így a rácsra jellemző állandó.

Minkowski a következő tételt nevezetes számelméleti vizsgálatainál alkalmazta:

Legyen  $K$  egy síkrácsban olyan konvex ponthalmaz, amelyik egy rácspontra nézve centrálszimmetrikus továbbá területe nagyobb, mint négy alapparalelogramma területe. Ekkor a  $K$  a centrumon kívül további rácspontot is tartalmaz.

A fenti tételek magasabb dimenziós esetekre is kiterjeszthetők. Azonban a diszkrét mozgáscsoportok száma már 3-dimenzióban is igen megnő. Ezeket a csoportokat használták a kristályok osztályozására, de ezek a csoportok fontos szerepet játszanak a modern kvantumelméletben is. (ld. pl. Wigner Jenő: Szimmetriák a kvantumelméletben című munkáját).

Még további néhány fontos fogalmat vezetünk be.

A térben a poliédereket véges sok zárt féltér metszeteként, a politopokat pedig véges sok pont konvex burkaként definiáljuk. Megmutatható, hogy a politopok nem mások mint a korlátos poliéderek. Valamely poliéderre természetes módon definiálhatók a lapok, élek és a csúcsok. Ha ezek számát rendre az  $l, e, c$  jelekkel jelöljük, akkor konvex politopokra érvényes az

$$l - e + c = 2$$

U.n. Euler féle formula.

Egy konvex politopot szabályosnak vagy Platon féle testnek nevezünk, ha lapjai egybevágó szabályos sokszögek és minden csúcsába azonos számú él fut be. Az Euler formula

alkalmazásával megmutatható, hogy pontosan 5 féle szabályos test létezik, a tetraéder, a kocka, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.

Platon ezeket a testeket filozófiájában a különféle alapelemekkel ( föld, víz, levegő, tűz és a világmindenség burka) azonosította. Innen ered elnevezésük.

4.1. Keressük meg a következő sorminták szimmetria csoportjait

...b b b b ...  
...b p b p ...  
...b d b d ...  
...b q b q ...  
...b d p q b d p q ...

4.2. Adjunk meg a síkban olyan szabályosan ismétlődő mintákat, amelyek mozgás-szimmetria csoportjai a  $G_2$  csoportot 5 típusához tartoznak.

4.3. Melyik csoport a ciklois ill. a szinusgörbe szimmetria csoportja.

4.4. Bizonyítsuk be Pick tételét:

$V_2$  amely rácshban tetszőleges olyan egyszerű rácshsokszög területét, amelynek csúcsai rácspontok az

$$\frac{1}{2} b + c - 1$$

képlet adja meg, ahol  $b$  a határvonalon lévő rácspontok száma,  $c$  pedig a belső rácspontok száma ( az alapparalelogrammák területe egységnyi)

4.5. Bizonyítandó, hogy minden konvex négyszögnek van két szomszédos oldala, amelyeket paralelogrammává egészítve ki a négyszög tartalmazza a paralelogrammát.

4.6. Bizonyítandó, hogy egy rássban egy üres konvex rácsidom vagy háromszög, vagy paralelogramma.

4.7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsparalelogramma páratlan számú rácspontot tartalmaz, akkor a középpontja rácspont.

4.8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rácsháromszög, határán nincs a csúcsokon kívül rácspont, a belsejében pedig csak egy van, akkor ez a háromszög súlypontja.

4.9. Bizonyítandó, hogy minden rácsban van olyan üres rácsháromszög, amelyik nem tompaszögű, és egy rács összes ilyen háromszögei egybevágók.

4.10. Bizonyítsuk be, hogy síkbeli paralelogrammarácsban nem lehet egyidejűleg olyan négyzet is és olyan szabályos háromszög is, amelyiknek a csúcsai rácspontok.

4.11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy síkbeli paralelogrammarácsban van rácsnégyzet, akkor minden rácsegyeneshez van rá merőleges rácsegyenes.

Igaz marad-e az állítás, ha csak annyit teszünk fel, hogy van két egymásra merőleges rácsegyenes?

4.12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenesen van két rácspont, akkor végtelen sok van.

4.12. Egy rácssokszöget üresnek nevezünk, ha sem a határán, sem a belsejében nincs a csúcsokon kívül rácspont.

Bizonyítsuk be, hogy minden üres konvex rácsnégyszög paralelogramma.

4.14. Bizonyítsuk be, hogy négyzetrácsban nincs a négyzeten kívül szabályos rácssokszög.

4.15. Egy paralelogramma  $A, B, C, D$ , csúcsait rendre kössük össze a  $BC, CD, DA, AB$  oldalak felező pontjaival. Így középen egy kis paralelogrammát kapunk. Ennek területe az  $ABCD$  területének egyötöde. Ha az  $A, B, C, D$  csúcsokat rendre a  $CD, DA, AB, BC$  oldalak felezőpontjaival kötjük össze, akkor a másik ilyen paralelogrammával közös része olyan középpontosan szimmetrikus nyolcszög, amelynek területe az  $ABCD$  területének egyhatoda.

4.16. Az  $ANM, BLN, CML, LMN$  háromszögek területe közül csak akkor lehet az utolsó területe a legkisebb, ha  $L, M, N$  a  $BC, CA, AB$  oldalak felezőpontjai.

4.17. Általánosítsuk Minkowski tételét magasabb dimenzióra.

4.18. Ha egy poliédernek van körülírt gömbje, középgömbje és beírt gömbje, továbbá a három gömb koncentrikus, akkor a poliéder szabályos (c.166.o.)

4.19. Melyik testnek van öt csúcsa a hat háromszög alakú lapja? (c.159.o.)

4.20. Milyen alakzatban metsz (a) egy szabályos tetraédert egy olyan sík, amely két szemközti éllel párhuzamos, és azoktól egyenlő távolságra halad (b) egy kockát a két szemközti csúcsa által meghatározott szakasz merőleges felezősíkjára: (c) egy dedekédert két szemközti lapjának felezősíkjára? (c.159.o.)

4.21. Hat olyan egybevágó rombuszból, amelynek szögei  $60^\circ$  és  $120^\circ$ -osak, romboédert (torz kockát) készíthetünk. A kapott test két "hegyes" sarkából le lehet vágni két

szabályos tetraédert úgy, hogy a visszamaradt test oktaéder legyen. Másképp szólva, egy oktaédert és két alkalmas méretű tetraédert összeillesztve romboédert kapunk. Mutassuk meg, hogy az ilyen tetraéder és az oktaéder lapszögei kiegészítő szögek, és hogy a két test végtelen sok példányával a tér hézagmentesen kitölthető. (c. 159.o.)

4.22. Tekintsünk egy olyan tetszőleges poliédert, amelynek nem minden tagja ugyanolyan oldalszámú  $p$ -szög, és nem minden csúcsában találkozik ugyanannyi  $q$  él. Erre a poliéderre az alábbi egyenletek érvényesek:

$$\sum q = 2e = \sum p,$$

ahol az első összegezés az összes csúcsra, a második az összes lapra vonatkozik. Mutassuk meg, hogy minden poliédernek van vagy  $p=3$  alakú lapja, vagy  $q=3$  típusú csúcsa ( esetleg mindkettő). (Útmutatás: Ha nem így volna, akkor  $\sum q \geq 4c$  és  $\sum p \geq 4l$  teljesülne). (c. 163.o.)

4.23. Ha mind a lapok, mind az élek, mind a csúcsok is egyformák, akkor a lapok szabályosak. Mutassunk példát arra, hogy ez a poliéderekre vonatkozó eredmény mozaikokra nem érvényes. (c. 163.o.)

4.24. Tekintsünk egy olyan, egységnyi oldalú kockát, amelynek egyik csúcsa a derékszögű koordinátarendszer origójában van, és három éle egy-egy tengelyre illeszkedik. E kocka nyolc csúcsa az a nyolc  $(x,y,z)$  pont, amelynek koordinátái a 0 és 1 értékeket az összes lehetséges módon felveszik. (c. 167 o.).

4.25. Annak a 2 élhosszúságú kockának, amelynek középpontja a derékszögű koordinátarendszer origója, élei pedig párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, a nyolc csúcsa az a nyolc pont, amelynek koordinátái a +1 és -1 értéket veszik fel az összes lehetséges módon.

4.26. Hol van annak a nyújtásnak a középpontja, amely az előző feladatokban leírt két kockát egymásban transzformálja? ( a nyújtások definícióját ld. a 6.§.t).

(c.167.o.)

4.27. Válasszunk ki egy kocka nyolc csúcsa közül - az élek mentén haladva és minden második csúcsot elhegyvánegy olyan csúcsot, amelyek egy szabályos tetraédert alkotnak. Irjuk fel ezeknek a koordinátáit, továbbá a tetraéder-lapok síkjának egyenletét. Számítsuk ki a lapok szögét. (c. 167.o.)

4.28. A425 feladatban szereplő kocka lapközéppontjainak kijelölésével határozzuk meg egy oktaéder csúcsainak koordinátáit. Irjuk fel a lapok síkjainak egyenletét és számítsuk ki két-közös éllel rendelkező - lap szögét.

( c. 167.o.)

4.29. Az előző feladatban szereplő oktaéder test  $(x,y,z)$  pontjaira fennáll az

$$|x| + |y| + |z| \leq 1$$

összefüggés. (c.167.o.)

4.30. Egy szabályos tetraéder éleit kivetítjük a köré írt gömb főköreinek íveire. Milyen szögben metszik egymást ezek az ívek? Irjuk fel a hat főkör síkjának egyenletét. (c.167.o.)

(St./I/9-13 o.)

A továbbiakban az egyszerű poliéderekkel kapcsolatban használni fogjuk a következő jelöléseket:

- $l$  a lapok száma,
- $l_i$  az  $i$  oldalú lapok száma ( $i=3,4,\dots$ ),
- $c$  a csúcsok száma,
- $c_i$  az  $i$  élű csúcsok száma ( $i = 3,4,\dots$ ),
- $e$  az élek száma.

4.31. Létezik-e olyan nem egyszerű poliéder, amelyre  
 $l + c = e + 2$  ?

4.32. Bizonyítsuk be, hogy

$$2e = 3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + \dots = 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + \dots$$

4.33. Igazoljuk, hogy  $3l \leq 2e$  és  $3c \leq 2e$ .

4.34. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket:

- a)  $6l - 12 \geq 2e \geq 3l \geq e+6$ ,
- b)  $6c - 12 \geq 2e \geq 3c \geq e+6$ ,
- c)  $l+4 \leq 2c$ ,
- d)  $l_3 + c_3 \geq 8$ .

4.35. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű poliéder, amelynek hét éle volna!

4.36. Igazoljuk, hogy az egyszerű poliéderek esetében

- a) mindegyik lap ötszögnél nagyobb oldalszámú sokszög nem lehet;
- b) nem futhat mindegyik csúcsba öt élnél több él.

4.37. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű poliéder mindegyik csucsába három él fut össze és minden lapja ötszög vagy hatszög, akkor  $l_5 = 12$ .

4.38. Igazoljuk, hogy ha  $l_3 = l_4 = 0$ , akkor  $l_5 \geq 12$  és  $c_3 \geq 20$ .

4.39. Valamely egyszerű poliédert  $m$  oldalú sokszögek határolják, testátlóinak száma  $d$ . Hány csucsa és hány éle van? Határozzuk meg  $d$  és  $m$  között olyan összefüggéseket, hogy a csucokra és élekre egész számú megoldást nyerjünk.

4.40. Fejezzük ki az egyszerű poliédert határoló sokszögek szögeinek összegét

a) az  $e$ ,  $l$  segítségével,

b) a  $c$  segítségével.

4.41. Egy kocka éle  $a$ .

a) Mekkora az átlói?

b) Számítsuk ki két nem párhuzamos és nem egy csúsból kiinduló élek felezőpontjának távolságát!

4.42. Számítsuk ki az  $a$  élű kocka

a) átlósmetszeteinek,

b) az egyik lap középpontján és a szemközti lap egyik élén átmenő síkmetszetének,

c) végül az egy csúsból kiinduló három él másik végpontjai által meghatározott síkmetszetének a területét!

4.43. Számítsuk ki az  $a$  élű kocka egyik élének és ezt az élt nem metsző testátlóinak a távolságát!

4.44. Egy kocka élének hossza  $a$ .

- a) Mekkora távolságra vannak az egyes csucok az egyik testátlótól?
- b) Hogyan osztják fel a testátlót a csucok merőleges vetületei?

4.45. Metszhető-e egy kocka szabályos hatszögben?

4.46. Metszhető-e a szabályos tetraéder négyzetben?

4.47. Mekkora szöget zár be egymással a szabályos tetraéder két szemköztli éle?

4.48. Az ABCD szabályos tetraéder. A csucsából a BCD síkra bocsátott magasság felezőpontja legyen O. Bizonyítsuk be, hogy a BO, CO, DO egyenesek páronként merőlegesek egymásra.

4.49. Milyen távol van egymástól az a élű szabályos oktaéder két kitérő élének felezőpontja?

4.50. Szabályos oktaéder metszhető-e szabályos hatszögben?

### 5.§. Vektorok, műveletek vektorokkal

A vektorokat már a 3.§-ban bevezettük a köztük definiált összeadás és valós számmal való szorzással együtt. Most további műveleteket definiálunk.

#### Belső-szorzat

Ennél a szorzatnál két  $\underline{x}, \underline{y}$  vektorhoz az

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := |\underline{x}| |\underline{y}| \cos \alpha$$

valós számot rendeljük, ahol  $\alpha$  a két vektor szöge. A párhuzamos szelők tétele segítségével megmutatható, hogy

a  $\langle \ , \ \rangle$  belső-szorzat szimmetrikus ( $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ )

4.44. Egy kocka élének hossza  $a$ .

- a) Mekkora távolságra vannak az egyes csúcsok az egyik testátlótól?
- b) Hogyan osztják fel a testátlót a csúcsok merőleges vetületei?

4.45. Metszhető-e egy kocka szabályos hatszögben?

4.46. Metszhető-e a szabályos tetraéder négyzetben?

4.47. Mekkora szöget zár be egymással a szabályos tetraéder két szemközti éle?

4.48. Az ABCD szabályos tetraéder. A csúcsából a BCD síkra bocsátott magasság felezőpontja legyen O. Bizonyítsuk be, hogy a BO, CO, DO egyenesek páronként merőlegesek egymásra.

4.49. Milyen távol van egymástól az a élű szabályos oktaéder két kitérő élének felezőpontja?

4.50. Szabályos oktaéder metszhető-e szabályos hatszögben?

### 5.§. Vektorok, műveletek vektorokkal

A vektorokat már a 3.§-ban bevezettük a köztük definiált összeadás és valós számmal való szorzással együtt. Most további műveleteket definiálunk.

#### Belső-szorzat

Ennél a szorzatnál két  $\underline{x}, \underline{y}$  vektorhoz az

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := |\underline{x}| |\underline{y}| \cos \alpha$$

valós számot rendeljük, ahol  $\alpha$  a két vektor szöge. A párhuzamos szelők tétele segítségével megmutatható, hogy

a  $\langle \ , \ \rangle$  belső-szorzat szimmetrikus ( $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ )

alakban írható, ahol az  $(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$  számok az  $\underline{x}$  vektor-  
nak az adott bázisra vonatkozó u.n. koordinátái.

Egy véges dimenziós vektorteret euklideszinek mondunk,  
ha egy  $(\langle \ , \ \rangle$  jellel jelölt) pozitív definit, szimmetrikus  
bilineáris forma definiált benne. A vektorokat a 0-ra vo-  
natkozó helyvektorokként pontnak tekintve két  $\underline{x}, \underline{y}$  pont  
távolságát a

$$|\underline{x}, \underline{y}|^2 := \langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} \rangle$$

képlettel definiáljuk. Az  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$  bázist ortonor-  
málnak mondjuk ha  $\langle \underline{x}_i, \underline{x}_j \rangle = \delta_{ij}$ . (Kronecker féle  
függvény) érvényes. A rávonatkozó koordináta rendszer az  
u.n. Descartes féle koordináta rendszer. Ebben a belsőszor-  
zat

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^i y_i^i$$

alakban írható.

Általános koordináta környezetekben a  $d$ -dimenziós  
alterek  $k$ -d egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszerrel  
írhatók le. Ezek részletesebb leírását ld. a következő §-ban.

#### Terület és térfogat forma

Az irányított sík két  $\underline{x}, \underline{y}$  vektorára az

$$F(\underline{x}, \underline{y}) = |\underline{x}| |\underline{y}| \sin \alpha$$

képlet a két vektor által kifeszített paralelogramma előjeles  
területét adja. Itt  $\alpha$  az  $\underline{x}$  és  $\underline{y}$  vektorok irányított szögét  
jelöli.

Az  $F(\underline{x}, \underline{y})$  formáról megmutatható, hogy antiszimmetrikus  
 $(F(\underline{x}, \underline{y}) = -F(\underline{y}, \underline{x}))$  bilineáris forma, és ha  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  orto-  
 normált bázis, akkor

$$F(\underline{x}, \underline{y}) = \det \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}$$

Az irányított tér valamely  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$  bázisát jobb  
 sodrásúnak mondjuk ha az  $\underline{x}_3$  az  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  vektorok irányít-  
 ott síkjának (az  $\underline{x}_2$  az  $\underline{x}_1$  jobb partjába mutat!) a jobb  
 partjába mutat. A bázis  $\varepsilon$  előjelét  $+1$ -nek definiáljuk,  
 ha jobbsodrású és  $-1$ -nek, ha balsodrású. Így a térfo-  
 gatforma

$$(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) := \varepsilon V(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$$

definíciójában a forma a vektorok által kifeszített para-  
 lelepipedon előjeles térfogatát jelenti. Erről a formáról  
 is megmutatható, hogy antiszimmetrikus (vagyis két elem  
 cseréjére előjelet vált) továbbá mindegyik komponensében  
 homogén és additív. Ha  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  a tér <sup>jobbsodrású</sup> ortonormált  
 bázisa, akkor

$$(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \det \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

A fenti formát térfogat-formának vagy vegyesszorzatnak  
 is nevezik.

#### Vektor-szorzat

Ezt a műveletet az irányított tér vektorai között definiáljuk.

Belátható, hogy pontosan egy olyan  $\underline{x} \times \underline{y}$  művelet létezik, amelyre minden  $\underline{z}$  vektorra

$$\langle \underline{x} \times \underline{y}, \underline{z} \rangle = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$$

érvényes. Az  $\underline{x} \times \underline{y}$  vektorról megmutatható, hogy lineárisan független  $\underline{x}, \underline{y}$  vektorok esetén az  $\underline{x} \times \underline{y}$  az az egyértelműen meghatározott vektor, amelyik merőleges az  $\underline{x}, \underline{y}$  vektorokra, az  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{x} \times \underline{y}$  vektor-rendszer jobbsodrású, valamint  $|\underline{x} \times \underline{y}| = |\underline{x}| |\underline{y}| \sin(\angle \underline{x}, \underline{y})$  érvényes.

További tulajdonságok:

$$\underline{x} \times \underline{y} = - \underline{y} \times \underline{x}$$

$$\underline{x} \times (\alpha \underline{y} + \beta \underline{z}) = \alpha \underline{x} \times \underline{y} + \beta \underline{x} \times \underline{z}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \underline{b} - \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle \underline{a} \quad (\text{kifejtési tétel})$$

$$\sigma(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} := (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} + (\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} + (\underline{c} \times \underline{a}) \times \underline{b} = 0$$

A  $\sigma$  ciklikus összeget jelöl, az utolsó azonosságot pedig Jacobi azonosságnak nevezzük. Descartes féle koordináták segítségével a vektorszorzás

$$\underline{x} \times \underline{y} = \det \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

alakban írható.

Feladatok összeadásra, kivonásra, koordinátákra (R 1-66)

5.1. Egy  $n$  oldalú sokszög oldalait valamilyen körüljárás szerint irányítjuk, más sorrendben egymáshoz fűzve újabb sokszöget kaphatunk. Legfeljebb hány különböző sokszög nyerhető ily módon?

5.2. Bizonyítsuk be, hogy véges sok zárt töröttvonal szakaszait egymáshoz lehet úgy fűzni, hogy egyetlen zárt töröttvonalat alkossanak.

5.3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges zárt töröttvonal szakaszai eltolhatók úgy, hogy konvex sokszöget határoljanak.

5.4. Bizonyítsuk be, hogy egy kocka éleit lehet irányítani, úgy, hogy az élvektorok összege  $\underline{0}$  legyen.

5.5. Mutassuk meg, hogy egy konvex ötszög éleit és átlóit lehet úgy irányítani, hogy az élvektorok és átlóvektorok összege  $\underline{0}$  legyen.

5.6. Az  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  egysíkú vektorok olyanok, hogy valamennyiük kezdőpontja közös, és valamennyi az  $\underline{a}_1$  és  $\underline{a}_n$  által meghatározott tompaszögű szögtartományban helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy összegük nem lehet  $\underline{0}$ .

5.7. Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  egyenlő hosszú vektorok, és összegük  $\underline{0}$ . Mekkora szöget zár be az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$ ?

5.8. Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$  egyenlő hosszú, egysíkú vektorok, és összegük  $\underline{0}$ . Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő, amelyek egymásnak ellentettjeik.

5.9. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög súlypontja megkapható, a következő különböző módokon: (Valamely  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  vektorok súlypontja az  $\underline{a} = \sum \underline{a}_i / n$  pont. Sokszögek súlypontja a csúcsok súlypontja).

a) két szemközti oldal felezőpontjait összekötő szakasz középpontja;

b) a két átló felezőpontjait összekötő szakasz közép-pontja;

c) tetszőleges három csúcs meghatározza háromszög súly-pontját a negyedik csúccsal összekötő szakasznak a súly-ponthoz legközelebbi negyedelőpontja.

5.10. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder súlypontja azonos az alábbi módon definiált pontokkal:

a) két tetszőleges szemközti él felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja;

b) tetszőleges lapsúlypontot a szemközti csúccsal összekötő szakasznak a laphoz közelebbi negyedelőpontja.

5.11. Az  $n$  számú pontból álló pontrendszer súlyvonalainak nevezzük azokat a szakaszokat, amelyek a pontrendszer tetszőleges pontját a többi  $n-1$  pont súlypontjával kötik össze. Bizonyítsuk be, hogy a súlyvonalak egy pontban metszik, és  $1 : (n-1)$  arányban osztják egymást.

5.12. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges pontrendszer súlyvonalait eltolhatjuk úgy, hogy zárt sokszöget határoljanak.

5.13. Hagyjuk el egy  $n$  pontból álló pontrendszer egy pontját, és jelöljük meg a maradék pontrendszer súlypontját. Ismételjük ezt meg a pontrendszer valamennyi pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert  $n$  pont az eredetihez hasonló pontrendszert alkot.

5.14. Mutassuk meg, hogy egy  $n$  pontból álló pontrendszer súlypontja a következő módon is előállítható: a pontokat

két halmazba osztjuk, az egyik  $n_1$ , a másik  $n_2$  pontot tartalmaz: az első ponthalmaz súlypontja  $S_1$ , a másiké  $S_2$ . Az egész pontrendszer súlypontja az az  $S$  pont, amely az  $S_1S_2$  szakaszt  $n_2:n_1$  arányban osztja.

5.15. Egy húrnegyszög magasságközepppontjának nevezzük a köré írt köre középpontjának a súlypontra vonatkozó tükörképét. Bizonyítsuk be, hogy

- a) a magasságközepppontokat tetszőleges oldal felezőpontjával összekötő egyenes merőleges a szemközti oldalra;
- b) a magasságközepppontot az egyik átló felezőpontjával összekötő egyenes merőleges a másik átlóra.

5.16. Egy tetraéder magasságközepppontjának (vagy MONGE-féle pontjának) nevezzük a köré írt gömb középpontjának a súlypontra vonatkozó tükörképét. Bizonyítsuk be, hogy a magasságközepppontot egy tetszőleges él felezőpontjával összekötő egyenes merőleges a szemközti élre. (A tetraéder köré írt gömb középpontját, súlypontját és magasságközepppontját felfűző egyenest a tetraéder EULER-egyenésének nevezik.)

5.17. Egy húrnegyszög egyik magasságvonalanak nevezzük az egyik csúcsot a másik három meghatározta háromszög magasságpontjával összekötő szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy a magasságvonalak a magasságközepppontban metszik egymást.

5.18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben két-két szemköztes élpár merőleges egymásra, akkor ez a harmadik szemköztes élpárra is áll.

5.19. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéderben a szemközti élek merőlegesek egymásra, akkor a tetraéder magasságai a magasságközpontban metszik egymást. (Ebben az esetben a magasságközpontot magasságpontnak, magát a tetraédert viszont ortocentrikusnak nevezzük.)

5.20. Bizonyítsuk be, hogy ortocentrikus tetraéderben a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakaszok egyenlők.

5.21. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, súlypontja és köré írt gömbjének középpontja egybeesik.

5.22. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, a szemközti élek felezőpontjait összekötő egyenes merőleges az élekre.

5.23. Az  $A_1A_2\dots A_n$  sokszög (lehet térbeli sokszög is) oldalait, egy meghatározott körüljárást tartva, osszuk fel ugyanolyan arányban. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti sokszög és az osztópontok meghatározta sokszög súlypontja egybeesik.

5.24. A kör AB és CD hurjai merőlegesek egymásra. Határozzuk meg a huregyenesek metszéspontjának helyvektorát, ha ismerjük a kör középpontjából a hurok végpontjaihoz mutató helyvektorokat.

5.25. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának tetszőleges oldalra vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van.

5.26. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög magasságpontjának tetszőleges oldalfelezőpontjára vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt körön van.

5.27. A háromszög EULER-egyenesein jelöljük ki a magasságpont és a kör köré írt kör középpontja közötti szakasz  $F$  felezőpontját, és mutassuk meg, hogy ez egyenlő távol van minden oldal felezőpontjától, a magasságok talppontjaitól és a magasságpontot a csucsokkal összekötő szakaszok felezőpontjaitól. (E kilenc pont tehát egy körön van, ez a háromszög u.n. FEUERBACH-köre.)

5.28. Legyen  $A, B, C, D$  négy nem egysíkú pont;  $AB$  felezőpontja  $E$ , a  $CD$ -é  $F$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\overline{EF} < 1/2 (\overline{AD} + \overline{BC})$ .

5.29. Legyen  $A, B, C, D$  négy nem egysíkú pont. Fussa be  $X$  az  $AB$  (zárt) szakasz,  $Y$  pedig a  $CD$  szakasz minden pontját. Mit ír le az  $XY$  szakasz  $P$  felezőpontja?

5.30. Az  $ABCD$  négyszögben (lehet térbeli is)  $AB=CD$ . Bizonyítsuk be, hogy a  $BC$  és  $AD$  oldalak felezőpontjait összekötő középvonal párhuzamos az  $AB$  és  $CD$  egyenesek egyik szögfelezőjével.

5.31. Bizonyítsuk be, hogy minden négyoldalú gúla oldallapjai elmeteshetők egy síkkal úgy, hogy a síkmetszet paralelogramma legyen.

5.32. Bizonyítsuk be, hogy ha négy, páronként kitérő egyenes olyan, hogy van közöttük három, amely nem párhuzamos egy síkkal, akkor metszhetők egy síkkal úgy, hogy a metszéspontjuk egy paralelogramma négy csucsát alkossák.

5.33. Jelöljük ki a térben (vagy síkon) valamilyen sorrendben  $n$  számú pontot, majd egy tetszőleges pontot tükrözzünk az első pontra; a tükörképet a második<sup>a</sup> stb. végül az utolsó pontra.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  páros, a tükrözések egymásutánja egy eltolással helyettesíthető, ez az eltolás nem függ a tükrözött pont választásától.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  páratlan, a tükrözések egymásutánja egy középpontos tükrözéssel helyettesíthető; a középpont független a tükrözött pont választásától.

c) Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  páratlan, egy tetszőleges pontot kétszer egymás után az adott pontokra végigtükrözve, majd ezt még egyszer megismételve, az eredeti pontba jutunk vissza.

5.34. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pontot sorrendben végigtükrözünk egy páros oldalszámú sokszög oldalfelező pontjaira, akkor visszajutunk az eredeti pontba.

5.35. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pontot sorrendben végigtükrözünk egy páratlan oldalszámú sokszög oldalfelező pontjaira, akkor a pont és az utolsó tükrökép meghatározta szakasz felezőpontja a sokszög egyik csúcsa.

5.36. Legyen  $O$  az  $AA_1$  és  $BB_1$  egyenesek közös pontja. Válasszuk  $O$ -t origónak, és legyenek az  $A_1, B, B_1$  pontok helyvektorai rendre  $\underline{a}, \lambda \underline{a}, \underline{b}, \mu \underline{b}, (\lambda \neq \mu)$ . Határozzuk meg az  $AB$  és  $A_1 B_1$  egyenesek közös  $M$  pontjának helyvektorát.

5.37. Egy  $O$  csúcsa háromoldalú végtelen gula (un. triéder) belsőjében jelöljünk ki egy  $S$  pontot. Bizonyítsuk be, hogy a triéder elmeszkelhető az  $S$ -en átmenő síkkal úgy, hogy a metszetként kapott háromszögnek  $S$  legyen a súlypontja.

5.38. Egy triéder súlysíkjának nevezzük a triéder egy élét és a másik két él szögfelezőjét összekötő síkot. Bizonyítsuk be, hogy a három súlysík egy egyenesben metszi egymást.

5.39. Az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontokból álló pontrendszer súlyozott pontrendszernek nevezzük, ha minden ponthoz hozzárendelünk egy  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  valós számot, un. súlyt. Ha a pontok helyvektorai rendre  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ , akkor a súlyozott rendszer súlypontjának nevezzük az

$$\underline{s} = \frac{\mu_1 \underline{a}_1 + \mu_2 \underline{a}_2 + \dots + \mu_n \underline{a}_n}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}$$

helyvektoru pontot. Bizonyítsuk be, hogy a súlypont független az origó választásától.

5.40. Az ABC háromszög C csucsából az A pontba az  $\underline{a}$ , a B-be az  $\underline{b}$  vezet, ezek hossza  $b$ , ill.  $a$ . Fejezzük ki ezekkel az adatokkal a C csucsából induló szögfelezővektort.

5.41. Az ABC háromszög oldalainak hossza  $a, b, c$ ; a szemközti csucok helyvektorai  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ . Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe írt kör K középpontjának helyvektora:

$$\underline{k} = \frac{a\underline{a} + b\underline{b} + c\underline{c}}{a + b + c}$$

5.42. Az ABCD tetraéder csucsainak helyvektorai  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ ; a csucsokkal szemközti lapok területe  $t_a, t_b, t_c, t_d$ . Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder beírt gömbjének a középpontjába a

$$\underline{k} = \frac{t_{a\underline{a}} + t_{b\underline{b}} + t_{c\underline{c}} + t_{d\underline{d}}}{t_a + t_b + t_c + t_d}$$

vektor mutat.

5.43. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder lapjai akkor és csak akkor egyenlő területűek, ha a tetraéder súlypontja és a beírt gömbjének középpontja egybeesik.

5.44. Egy tetszőleges térbeli pontrendszer súlypontja köré írt gömb bármely pontjából irányítsunk vektorokat a pontokhoz. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a vektoroknak az összege állandó hosszúságú.

5.45. Jelöljük  $M$ -mel az  $ABC$  háromszög magasságpontját. Bizonyítsuk be, hogy az  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CAM$  háromszögek köré írt köreinek középpontjai az eredeti háromszöggel egybevágó háromszöget határoznak meg. Mutassuk meg, hogy a középpontok meghatározta háromszög és az  $ABC$  tükrös az  $ABC$  háromszög Feuerbach-körének középpontjára.

5.46. Egy közös kezdőpontból kiindulva olyan vektorokat mérünk fel, amelyek hosszának összege legalább négy. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani közülük néhányat úgy, hogy összegük hossza legalább 1 legyen.

5.47. Egy szög szárai között kitűzünk egy pontot. A szöget fogjuk fel koordináta-rendszerként, amelynek egységvektorai  $\underline{e}_1$  és  $\underline{e}_2$ , a pont koordinátái  $(a, b)$ . Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a ponton, és a szögből a lehető legkisebb területi háromszöget metszi ki.

5.48. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely a koordinátatengelyekből rendre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  hosszúságú szakaszokat metsz le ( $a \neq 0$ ).

5.49. Határozzuk meg a  $3x - 2y + 6z + 4 = 0$  egyenletű síknak az origót a  $(8, -2, -6)$  ponttal összekötő egyenesnek a metszéspontját.

5.50. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos sokszögek súlypontja és középpontja egybeesik.

5.51. Jelöljük ki a síkon egy  $AB$  szakaszt, majd vegyünk fel a síkon egy tetszőleges  $P$  pontot. Forgassuk el  $P$ -t  $A$  körül  $90^\circ$ -kal  $P'$  helyzetbe, majd ugyancsak  $P$ -t  $B$  körül  $-90^\circ$ -kal  $P''$  helyzetbe. Bizonyítsuk be, hogy a  $P'P''$  szakasz felezőpontjának a helyzete független  $P$  választásától.

5.52. Forgassuk el az  $ABCD$  trapéz  $BC$  szárát középpontja,  $O$  körül  $90^\circ$ -kal a  $B_1C_1$  helyzetbe, majd az  $AD$  szárát középpontja  $K$  körül az  $A_1D_1$  helyzetbe. Bizonyítsuk be, hogy

$$A_1B_1 = C_1D_1.$$

5.53. Egy négyszög oldalai fölé szerkesszünk kifelé négyszögeket. Bizonyítsuk be, hogy a szemközti oldalakhoz tartozó négyzet-középpontokat összekötő szakaszok egyenlők és merőlegesek egymásra.

5.54. A sík négy pontját:  $A$ -t,  $B$ -t,  $C$ -t és  $D$ -t elforgatjuk egy pont körül  $90^\circ$ -kal az  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  helyzetbe. Jelölje az  $AB'$ ,  $BC'$ ,  $CD'$ ,  $DA'$  szakaszok felezőpontjait rendre  $X, Y, Z, U$ . Bizonyítandó, hogy  $XZ$  és  $YU$  egymásra merőleges, egyenlő szakaszok.

5.55. Egy négyszög átlói egyenlők és merőlegesek. A négyszög oldalaira kifelé hasonló, egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk. Ezek alappal szemközti csúcsai egy újabb négyszöget határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy ennek a négyszögnek átlói is egyenlők és merőlegesek egymásra.

5.56. Egy háromszög oldalaira kifelé hasonló, egyenlő szárú háromszögeket szerkesztünk. Ezek csúcsai újabb háromszöget határoznak meg, ennek oldalaira befelé ismét az előbbiekhöz hasonló egyenlő szárú háromszögeket építünk. Bizonyítsuk be, hogy az utóbbiak csúcsai az eredetihez hasonló háromszöget határoznak meg.

5.57. Egy hatszög minden második szöge  $120^\circ$ -os, és ezeket a szögeket egyenlő oldalpár fogja közre. Bizonyítsuk be, hogy a  $120^\circ$ -os szögek csúcsai szabályos háromszöget határoznak meg.

5.58. Legyen  $S$  az  $ABC$  háromszög súlypontja. A  $BB_1B_2$  és  $CC_1C_2$  szabályos háromszögek ellentétes körüljárásuak, és súlypontjaik egybeesnek  $S$ -sel. Bizonyítsuk be, hogy az  $AB_1C_1$  és  $AB_2C_2$  háromszögek szabályosak.

Feladatok belsőszorzata (R-67-92)

5.59. Adott a síkon két metszőegyenes. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre nézve a két egyenestől mért távolságok négyzetösszege egy adott pozitív számmal egyenlő?

5.60. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenes merőleges egy sík két nem párhuzamos egyenesére, akkor a sík minden egyenesére merőleges.

5.61. Egy külső P pontból merőlegest állítunk egy síkra és annak egy tetszőleges  $e$  egyenesére, ezek talppontjai legyenek  $P'$  és  $F'$ . Bizonyítsuk be, hogy  $PF'$  is merőleges  $e$ -re.

5.62. A tér egy egyenesre egyenlő szöget zár be egy háromszög három oldalegyenesével. Bizonyítsuk be, hogy az egyenes merőleges a háromszög síkjára.

5.63. Bizonyítsuk be, hogy egy külső pontból a körhöz huzott szelők metszeteinek a szorzata állandó érték.

5.64. Az  $ABC$  és  $A'B'C'$  háromszögek olyan helyzetűek, hogy az  $A, B, C$  csucsból rendre a  $B'C'$ ;  $C'A'$ ;  $A'B'$  egyenesekre állított merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ez a tulajdonság kölcsönös, azaz az  $A', B', C'$  csucsból rendre a  $BC, CA, AB$  egyenesekre állított merőlegesek is egy pontba futnak össze.

5.65. Bizonyítsuk be, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege oldalainak négyzetösszegével egyenlő.

5.66. Az  $ABCD$  téglalap csucsait kössük össze egy  $P$  ponttal. Bizonyítsuk be, hogy  $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ .

5.67. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek, ha a szemkötti oldalak négyzetösszege egyenlő.

5.67. Bizonyítsuk be, hogy ortocentrikus tetraédernél a szemkötti élek négyzetösszege egyenlő.

5.68. A körlemez egy belső pontján át két merőleges hirt huzunk. Bizonyítsuk be, hogy a húrok szeleteinek négyzetösszege független a pont helyzetétől.

5.69. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges négyszög oldalainak négyzetösszegét megkaphatjuk, ha az átlók négyzetösszegéhez hozzáadjuk az átlófelezőpontok távolságának négyszeres négyzetét.

5.70. Adott a térben  $n$  pont:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bizonyítsuk be, hogy a térnek az a  $P$  pontja, amelyre a  $PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_n^2$  minimális, a pontrendszer súlypontja.

5.71. Legyen  $S$  az  $ABC$  háromszög súlypontja,  $P$  pedig tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy  $3PS^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - (SA^2 + SB^2 + SC^2)$ .

5.72. Legyen  $M$  az  $ABCD$  tetraéder magasságközepppontja. Bizonyítsuk be, hogy  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4r^2$ , ahol  $r$  a tetraéder köré írt gömb sugara.

5.73. Az  $ABCD$  tetraéder  $A$  csúcsához tartozó súlyvonal-egyenese a köré írt gömböt egy  $E$  pontban metszi, a  $BCD$  lap súlypontja  $S$ . Bizonyítsuk be, hogy  $AB^2 + AC^2 + AD^2 = 3AS \cdot AE$ .

5.74. Az  $ABCD$  tetraéder  $A$  csúcsába futó három él páronként merőleges egymásra, a tetraéder súlypontja  $S$ . Bizonyítsuk be, hogy  $SB^2 + SC^2 + SD^2 = 11AS^2$ .

5.75. Az  $ABC$  háromszög köré írt kör középpontjából az  $A$ , ill.  $B$  csúcsokhoz az  $\underline{a}$ , ill.  $\underline{b}$  vektorok vezetnek,  $AB = c$ , a köré írt kör sugara  $r$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = r^2 - \frac{c^2}{2}$ .

5.76. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög köré írt kör sugara  $r$ , a beírt köré  $\rho$ , és a két kör középpontjainak távolsága  $d$ , akkor  $d^2 = r^2 - 2r\rho$  (Euler tétele).

5.77. Az ABC háromszögnek válasszuk ki pl. az AB oldalát, és mérjük ezt fel A-ból kiindulva az AC és B-ből kiindulva a BC félegyenesre, a felmért szakaszok új végpontjai  $C_1$ , ill.  $C_2$ . Hasonlóan: a BC oldalból kiindulva kapjuk az  $A_1$  és  $A_2$  pontokat és a CA oldalból kiindulva a  $B_1$  és  $B_2$  pontokat.

Bizonyítsuk be, hogy az  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  szakaszok valamennyien merőlegesek a beírt és a köré írt kör középpontját összekötő egyenesre.

5.78. Bizonyítsuk be, hogy a kocka minden háromszögmetszete hegyesszögű.

5.79. Határozzuk meg a  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$  összeg minimumát, ha  $\alpha, \beta, \gamma$  egy háromszög szögei.

5.80. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ , akkor a háromszög derékszögű.

5.81. Egy háromszög oldalai:  $a, b, c$ , köré írt körének sugara  $r$ , ennek középpontját a magasságponttal  $m$  hosszúságú szakasz köti össze. Bizonyítsuk be, hogy  $m^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ .

5.82. Egy háromszög szögei  $\alpha, \beta, \gamma$ . Bizonyítsuk be, hogy (1. az előző feladat jelöléseit)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4r^2}$ .

5.83. Ismeretesek egy téglatest két szomszédos lapján elhelyezkedő két kitérő átlónak a lap oldaléleivel alkotott szögei. Határozzuk meg a két átló szögét.

5.84. Jelentsen  $n$  tetszőleges természetes számot. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{a} \quad (-n, n+1, n(n+1)),$$

$$\underline{b} \quad (n(n+1), -n, n+1),$$

$$\underline{c} \quad (n+1, n(n+1), -n)$$

vektorok által kifeszített paralelepipedon kocka.

Feladatok vektorális szorzatra ( R 92 - 114)

5.85. Mi a geometriai jelentése a következő azonosságnak:

$$F(\underline{a}, (\lambda \underline{a} + \underline{b})) = F(\underline{a}, \underline{b}) ?$$

5.86. Legyenek  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  a sík három pontjának helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a három pont egy egyenesen legyen az, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:

$$F(\underline{a}, \underline{b}) + F(\underline{b}, \underline{c}) + F(\underline{c}, \underline{a}) = 0$$

5.87. Egy négyszög szenköztes oldalai a P, ill. Q pontban metszik egymást. A PQ szakasz felezőpontja F. Bizonyítsuk be, hogy F és a négyszög átlóinak felezőpontjai egy egyenesen vannak.

5.88. Az ABC és A'B'C' háromszögek olyan helyzetűek, hogy az A, B, C csucsokból rendre a B'C', C'A', A'B' oldalakkal húzott párhuzamosok egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ez a tulajdonság kölcsönös, azaz az A', B', C' csucsokon át rendre a BC, CA, AB egyenesekkel húzott párhuzamosok is egy pontba futnak össze.

5.89. Egy ötszögnek négy oldala párhuzamos egy-egy átlóval. Bizonyítsuk be, hogy ez az ötödik oldalra is fennáll.

5.90. Fejezzük ki a háromszög területét az oldalak segítségével.

5.91. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalaiból készített háromszög területe  $\frac{3}{4}$ -e az eredeti háromszög területének.

5.92. A négyszög két szemközti oldalfelezése egy P pontban metszi egymást: az átlók felezőpontjai Q és R. Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög területe  $\frac{1}{4}$ -e a négyszög területének.

5.93. Az ABCD paralelogramma egy belső pontján át az oldalakkal húzott párhuzamosok az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre az X, Y, Z, V pontokban metszik; P tükörképe a paralelogramma középpontjára P'. Bizonyítsuk be, hogy a PAP'C paralelogramma területe a PYBX és PVDZ paralelogrammák területének a különbségével egyenlő.

5.94. Egy ABCD konvex négyszög AB oldalát az X és Y, CD oldalát Z, V pontok osztják három egyenlő részre. Bizonyítsuk be, hogy az XYZV területe harmada az ABCD négyszög területének.

5.95. Egy tetszőleges hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Válasszuk ki három csucst úgy, hogy közöttük ne legyenek szomszédosak. Bizonyítsuk be, hogy az így kiválasztott három csúcs és a másik három csúcs egyenlő területű hatszögeket határoznak meg.

5.96. Bizonyítsuk be, hogy középpontos szimmetrikus hatszögben a középponton át nem menő átlók olyan háromszöget zárnak közre, amelynek területe fele a hatszög területének.

5.97. Egy négyszög oldalai  $a, b, c, d$  átlói  $e$  és  $f$ , területe  $t$ . Bizonyítsuk be, hogy  $16t^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$ .

5.98. Az ABCD négyszög síkjában vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. Bizonyítsuk be, hogy három-három pont által meghatározott háromszögek előjeles területére a következő összefüggés áll fenn:

$$t_{PAB} \cdot t_{PCD} + t_{PBC} \cdot t_{PAD} = t_{PAC} \cdot t_{PBD}$$

5.99. Határozzuk meg az ABC háromszög síkjában annak a P pontnak a helyzetét, amelyre a PAB, PBC, PCA háromszögek területe egyenlő.

5.100. Egy szög egyik szárán felveszünk egy AB, a másik szárán egy CD szakaszt. Mi a mértani helye azoknak a P pontoknak, amelyekre az ABP és CDP háromszögek területei egyenlők?

5.101. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög oldalai  $a, b, c$ , az ezekkel szemközti szögek  $\alpha, \beta, \gamma$  és a terület  $t$ , akkor

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}$$

5.102. Vegyünk fel egy egyenesen egymás után következő A, B, C, D pontokat, úgy, hogy  $AB = BC = CD$  legyen. Határozzuk meg a sík olyan P pontjának a mértani helyét, amelyekre fennáll:

$$\operatorname{tg} \angle APB \cdot \operatorname{tg} \angle CPD = \frac{1}{4}$$

5.103. Egy háromszögben az  $\alpha$  és  $\beta$  olyan szögek, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy a harmadik szög derékszög.

5.104. Egy tetraéder lapjainak területvektorait a következőképpen értelmezzük: merőlegesek a hozzájuk tartozó lapra: kifelé (a tetraéderrel ellentétes oldalra) mutatnak: hosszuk a lap területével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder területvektorainak összege  $\underline{0}$ .

5.105. Adott két kitérő egyenes,  $e_1$  és  $e_2$ :  $e_1$  a  $\underline{v}_1$  irányvektorral és az  $\underline{r}_1$  helyvektoru pontjával,  $e_2$  a  $\underline{v}_2$  irányvektorral és  $\underline{r}_2$  helyvektoru ponttal. Határozzuk meg a két kitérő egyenes távolságát.

5.106. Egy háromszög csucsainak koordinátái  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$ ,  $(c_1, c_2, c_3)$ . Határozzuk meg a háromszög területét.

Feladatok egyösszorzatra (R 115-110)

5.107. Egy paralelepipedon egy csucsba futó lapátlói egy újabb paralelepipedont feszítenek ki. Mi a két paralelepipedon térfogatának aránya?

5.108. Bizonyítsuk be, hogy egy tetraéder köbtartalmának hatszorosa egyenlő; két szemközi élének szorzata szorozva a közrezárt szög sinusával és a két élegyenes normáltranszverzálisának hosszával.

5.109. Bizonyítsuk be, hogy ha egy AB szakasz egy  $e_1$  egyenesen, egy CD szakasz pedig egy hozzá képest kitérő  $e_2$  egyenesen mozog, akkor az ABCD tetraéder térfogata változatlan.

5.110. Az  $a, b, c, d$  páronként kitérő egyenesek, és az  $a, b$  és  $c, d$ , továbbá az  $a, c$  és  $b, d$  normáltranszverzálisai merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy az  $a, d$  és  $b, c$  normáltranszverzálisai is merőlegesek.

5.111. Ismeretes, hogy ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  nem egy síku vektorok, akkor a tér egy tetszőleges  $\underline{v}$  vektora előállítható  $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$  alakban. Mutassuk meg, hogy

$$\alpha = \frac{(\underline{vbc})}{(\underline{abc})}, \quad \beta = \frac{(\underline{vca})}{(\underline{abc})}, \quad \gamma = \frac{(\underline{vab})}{(\underline{abc})}.$$

5.112. Bizonyítsuk be a vektorális szorzat disztributivitását a vegyesszorzat felhasználásával.

5.113. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  jobbrendszert alkotnak, és  $\underline{b}$  egységvektor, akkor  $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{abc})$ .

5.114. Igazoljuk a triéderek sinustételét: ha a triéder két élszöge  $a$  és  $b$  és a szemközti lapszögek  $\alpha$  és  $\beta$ , akkor

$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

5.115. Bizonyítsuk be, hogy ha  $\underline{b}$  egységvektor,

$$\langle (\underline{a} \times \underline{b}), (\underline{b} \times \underline{c}) \rangle = \langle \underline{ab} \rangle \langle \underline{bc} \rangle \langle \underline{ac} \rangle.$$

5.116. Előző feladatunk eredményét felhasználva bizonyítsuk be a triéderek cosinustételét: ha  $a, b, c$  az élek szögei és  $\gamma$  a  $c$ -vel szemközti lapszög, akkor

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

5.117. Az ABCD ortocentrikus tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra (1. a 19. feladatot). Jelölje  $(AB)$  az  $AB$  élhez tartozó lapszöget. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos(AB) \cos(CD) = \cos(AC) \cos(BD) = \cos(AD) \cos(BC).$$

## 6.§. Affin geometria, affinitások, konvex geometria

Az affin geometriában (durván fogalmazva) a véges dimenziós vektorterek geometriáját vizsgáljuk, bennük kitüntetett belsőszorzat nélkül. A kitüntetett origó miatt egy  $V^n$ ,  $n$ -dimenziós vektorteret kipontozott affin térnek is nevezzük. Így a vektorokat, helyvektorként tekintve, pontoknak is nevezhetjük.

A  $V^n$  tér  $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$  pontjait affin függetlennek nevezzük, ha az  $\underline{a}_1, \underline{a}_2 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k - \underline{a}_0$  vektorok lineárisan függetlenek. Mivel a fenti pontok akkor és csak akkor affin függetlenek, ha az  $(\underline{a}_0, 1), \dots, (\underline{a}_k, 1)$  vektorok a  $V^{n+1}$  tér lineárisan független vektorai, ezért az affin függetlenség tulajdonsága független a pontok sorrendjétől.

Ha  $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n$  a  $V^n$  térben affin függetlenek, akkor minden  $\underline{x} \in V^n$  vektor egyértelműen

$$\underline{x} - \underline{a}_0 = \sum x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0)$$

alakban írható. Az így nyert  $(x^1, \dots, x^n)$  koordinátákat az alappontrendszerre vonatkozó affin koordinátáknak nevezzük.

A  $V^n$  térben  $k+1$  számú  $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k$  affin független pont egy  $k$ -dimenziós affin alteret feszít ki, amit az

$$\underline{a}_0 + \sum_{i=1}^k x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0), \quad x^i \in \mathbb{R}$$

alakban előállítható vektorok halmazaként definiálunk.

Átrendezéssel kapjuk, hogy az alter pontjait a

$$\sum_{i=0}^k x^i \underline{a}_i, \quad \text{ahol} \quad \sum_{i=0}^k x^i = 1,$$

kifejezések szolgáltatják. Az  $(x^1, \dots, x^k)$  koordinátákat az alappontokra vonatkozó affin koordinátáknak, míg az  $(x^0, x^1, \dots, x^k)$  koordinátákat, illetve ezek  $\lambda \neq 0$  konstansszorosait baricentrikus koordinátáknak nevezzük. A baricentrikus koordináták az

$$\underline{x} = \frac{1}{\sum_i x^i} \sum_j x^j \underline{a}_j$$

vektort határozzák meg egyértelműen, ezért az  $\underline{x}$ -et az  $x^i$  súlyokkal súlyozott  $\underline{a}_i$  pontrendszer súlypontjának is nevezzük.

A  $V^n$  tér  $(n-1)$ -dimenziós affin alterei az u.n. hiperterek, az 1-dimenziósak pedig az egyenesek. Így az  $\underline{x}_0, \underline{x}_1$  pontokra fektetett egyenes pontjait az

$$\underline{x} = (1-t) \underline{x}_0 + t \underline{x}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$

vektorok alkotják. Ekkor az

$$(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}) := t/1-t$$

mennyiséget a három pont osztóviszonyának nevezzük, nyilvánvaló geometriai tartalma miatt.

Az  $V^k, V^l \subset V^n$  altereket párhuzamosnak mondjuk, ha vagy  $V^k \subseteq V^l$  ill.  $V^l \subseteq V^k$  vagy pedig  $V^k \cap V^l = \emptyset$  teljesül, és az utóbbi esetben létezik olyan  $m := \max(k, l) + 1$ -dimenziós altér, amelyik mindkettőt tartalmazza.

Válasszunk  $(x^1, \dots, x^n)$  affin koordináta környezetben az  $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}$  alappontokra illeszkedő hipertér egyenlete

$$\det \begin{vmatrix} x^1, \dots, x^n \\ a_0^1, \dots, a_0^n \\ a_{n-1}^1, \dots, a_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0$$

Az alacsonyabb dimenziós alterek hiperterek metszeteként állíthatók elő, ezért a  $k$ -dimenziós alteret  $(n-k)$  egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszerrel írhatjuk le.

Az  $\underline{x}_0, \underline{x}_1$  pontokat összekötő szakaszt az

$$\underline{x} = (1-t) \underline{x}_0 + t \underline{x}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

pontok alkotják. Általában egy  $\sum x^i a_i$  alakú lineáris kombinációt konvexnek mondjuk, ha  $x^i \geq 0$  és  $\sum x^i = 1$  teljesül. Így a szakasz pontjai a végpontok konvex lineáris kombinációjaként állnak elő.

Egy ponthalmazt konvexnek mondunk, ha két pontjával együtt az ezeket összekötő szakaszt is tartalmazza. Valamely  $S$  ponthalmaz  $\text{conv } S$  jellel jelölt konvex burkán az  $S$ -t tartalmazó konvex ponthalmazok metszetét értjük. Caratheodory tétele szerint a  $\text{conv } S$  ( ahol  $S \subset V^n$  ) pontjai az  $S$ -beli, legfeljebb  $n+1$  számú vektor konvex lineáris kombinációjaként állíthatók elő, vagyis:

$$\text{conv } S = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda^i \underline{x}^i \mid \underline{x}_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\}.$$

Radon tétele szerint a  $V^n$  tér bármely  $(n+2)$  különböző elemet tartalmazó  $S = \{ \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n+2} \}$  ponthalmaza két diszjunkt  $S_1, S_2$  ponthalmazra bontható ( $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ,  $S_1 \cup S_2 = S$ ) úgy, hogy ezek konvex burkának a metszete nem az üres halmaz:  $\text{conv } S_1 \cap \text{conv } S_2 \neq \emptyset$ .

E két tétel és a teljes indukció alkalmazásával bebizonyítható Helly nevezetes tétele, miszerint ha  $K_1, \dots, K_N$  a  $V^n$  térben  $N$  számú konvex test, amelyek közül bármely  $n+1$  számú metszi egymást, akkor az összesnek a metszete sem az üres halmaz.

A teret egy hipertér két (konvex) féltérre bontja. A konvex poliédereket véges sok zárt féltér metszeteiként, míg a konvex politopokat véges sok pont konvex burkaként definiáljuk. Affin független pontok konvex burkát szimplékeknek is nevezzük. Megmutatható, hogy a konvex politopok nem mások mint a korlátos konvex poliéderek. A konvex poliéderek 1-dimenziós élei természetes módon definiálhatók. Legyen ezek száma  $C_1$ , és  $n$ -dimenziós alakzat esetén legyen  $C_n=1$ . E jelöléseket alkalmazva konvex politopokra érvényes az általános

$$c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n = 1$$

Euler féle formula. Ez  $n=3$  esetén a korábban ismerttetett formulát adja vissza.

Végezetül az affinitások tárgyalására térünk át. A  $V^n$  tér egy  $\alpha: V^n \rightarrow V^n$  bijekcióját affinitásnak nevezzük, ha egyenest egyenesbe transzformál.

Megmutatható, hogy affin koordináta rendszerekben az affinitások nem mások, mint az

$$\underline{x} \rightarrow A \underline{x} + \underline{p}, \quad (x^i) \rightarrow \left( \sum_j A_j^i x^j + p^i \right)$$

alakban felírható lineáris transzformációk, ahol  $\det(A_j^i) \neq 0$ . Ebből az előállításból könnyen belátható, hogy a  $V^n$  tér bármely  $(\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n)$  ill.  $(\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n)$  affin független pontrendszereihez pontosan egy  $\propto$  affinitás létezik, amelyre  $\propto (\underline{a}_i) = \underline{b}_i$  teljesül. Ezt a tételt az affinitások alaptételének nevezik.

Néhány speciális affinitást is definiálunk. Az  $\underline{x} \rightarrow \underline{x} + \underline{p}$  affinitásokat párhuzamos eltolásoknak, az  $\underline{x} \rightarrow -\underline{x} + \underline{p}$  alakúakat pedig  $p/2$  centrumú félfordulatoknak (centrális tükrözéseknek) nevezük.

A nyújtások azok az affinitások, amik minden egyenest önmagukkal párhuzamos egyenesbe transzformálnak. Ezekről megmutatható, hogy bármely nyújtás vagy párhuzamos eltolás vagy pedig centrális hasonlóság. Az utóbbi affinitások az  $\underline{x} \rightarrow \underline{c} + \lambda(\underline{x} - \underline{c}) = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{c}$ ,  $\lambda \neq 0$ , alakúak.

Tekintsünk egy  $(\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n) \rightarrow (\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{b}_n)$  alakú affinitást. Ha az  $\underline{a}_n, \underline{b}_n$  pontok egyenese párhuzamos az  $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n$  pontok hiperterével, akkor az affinitást nyírásnak, a többi esetben pddig feszítésnek nevezük.

A  $\{V^n, \langle, \rangle\}$  euklideszi tér térfogattartó affinitásait ekviaffinitásoknak hívjuk.

Ugyancsak a  $\{V^n, \langle, \rangle\}$  euklideszi térben vegyünk fel egy  $\Delta$ , az origót tartalmazó, hiperteret és tekintsünk egy  $\lambda \neq 0$  valós számot. Ezek után a hipertérben fekvő helyvektorok legyenek fixek, a hipertérre merőleges és a hipertérbe eső kezdőpontú helyvektorokat pedig nyújtsuk meg  $\lambda$ -szorosra, így a

$$\mu_{\Delta, \lambda}(\underline{x}) = \underline{x} + (\lambda - 1) \langle \underline{x}, \underline{n} \rangle \underline{n}$$

affinitáshoz jutunk, ahol  $n$  a hipertér normál egységvektora. A  $\mu \wedge \lambda$  affinitást merőleges affinitásnak nevezzük.

Bebizonyítható a következő tétel

Minden  $\alpha$  affinitás

$$\alpha = \eta \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k$$

alakban állítható fel, ahol az  $\eta$  izometria az  $\mu_i$  leképezések pedig páronként merőleges hiperterekre vonatkozó merőleges affinitások.

Feladatok konvex testekre (K)

6.1. (Blaschke) Bizonyítsuk be, hogy minden egységnyi szélességű korlátos konvex testbe írható  $1/(n+1)$  sugarú gömb. ( $n$  a test dimenziója).

6.2.a) Adott a síkon  $n$  pont:  $A_1, \dots, A_n$ . Bizonyítsuk be, hogy létezik a síknak olyan  $O$  pontja, melyen átmenő tetszőleges  $l$  egyenes mindkét partján  $n/3$ -nál nem kevesebb pont fekszik (beleszámítva magán az  $l$  egyenesen levő pontokat is).

b) Adott a térben a  $V$  térfogatú  $K$  konvextest. Bizonyítandó, hogy ezen átmenő tetszőleges sík által meghatározott bármely féltérbe legalább  $V/4$  térfogatú része esik a testnek.

6.3. Bizonyítsuk be, hogy bármely korlátos konvex ( $n$  dimenziós) halmaznak létezik olyan  $O$  pontja, hogy bármely az

$O$ -n átmenő  $A, B$  húrra

$$\|A-O\| \geq \frac{1}{n+1} \|A-B\|, \|B-O\| \geq \frac{1}{n+1} \|A-B\|$$

6.4. (Berge) Legyenek  $M, K_1, \dots, K_n$  korlátos konvex zárt halmazok a  $d$ -dimenziós térben és

$$M \cap \left( \bigcap_{i=1}^n K_i \right) = \emptyset,$$

$$\text{de } M \cap \left( \bigcap_{i \neq j} K_i \right) \neq \emptyset.$$

$$\text{Ekkor } M \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i.$$

6.5. (Santoló) Adott a síkon véges sok párhuzamos szakasz úgy, hogy bármely három esetén létezik ezeket metsző egyenes. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik valamennyit metsző egyenes.

6.6. Két véges halmaz  $X$  és  $Y$  ( $\mathbb{R}^n$ -ben) szigorúan szeparálható egy hipersíkkal akkor és csak akkor ha az  $X \cup Y$  bármely legfeljebb  $n+2$  elemű  $S$  részhalmazára  $S \cap X$  és  $S \cap Y$  szigorúan szeparálható (Kirchberger)

6.7.  $X \subseteq \mathbb{E}^n$ ,  $\text{diam } X \leq 2$ . Ekkor  $X$  benne van egy  $\left[ \frac{2n}{n+1} \right]^{\frac{1}{2}}$  sugarú gömbben.

6.8. (Steinitz) Ha  $x \in \text{conv } X$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , akkor létezik  $Y \subseteq X$ ,  $|Y| \leq 2n$ , hogy  $x \in \text{intconv } Y$ .

6.9. Az egység gömbfelületen adott egy  $l$  zárt görbe, amelynek a hossza  $< 2\pi$ . Bizonyítandó, hogy ekkor  $l$  rajta van egy félgömbön.

6.10.  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $A$  kompakt.  $A = \text{ext conv } A$  akkor és csak akkor, ha bármely  $B \subseteq A$ ,  $|B| \leq d+2$  esetén  $B = \text{ext conv } B$ .

6.11.  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  korlátos és zárt. Ha  $K$  bármely  $d+1$  pontjához létezik egy pont, hogy a  $d+1$  pont mindegyikét e ponttal összekötő szakasz része  $K$ -nak, akkor létezik olyan pont is, amelyet bármely  $K$ -beli ponttal összekötő szakasz  $K$ -ban van. -(Krasznoszlanski)

6.12. Ha a  $V^n$  térben az  $F_1, \dots, F_2$  feltérek lefedik az egész teret, akkor közülük legfeljebb  $n+1$  számú is lefedi a teret.

6.13. Tekintsük a sík  $x_1, \dots, x_N$  pontrendszerét, amelyre  $|x_i - x_j| \leq 1$  teljesül. Bizonyítandó olyan  $\sqrt{3}/3$  sugarú körlemez létezése, amelyek lefedik a pontrendszert /Young/.

Feladatok affinitásokra (c.206., 214., 215., 222.o).

6.14. Az  $A \rightarrow C$  és  $D \rightarrow B$  eltolások akkor egyenlők, ha az  $A \rightarrow D$  és  $C \rightarrow B$  eltolások egyenlők. (Ha ADBC paraleogramma, akkor ez nyilvánvaló, de ha a négy pont kollineáris, akkor nem).

6.15. Az

$$(A \leftrightarrow B) (B \rightarrow C) = (A \leftrightarrow C)$$

egyenletből az  $A=C$  helyettesítéssel vezessük le, hogy a  $(C \leftrightarrow B) (B \rightarrow C)$  félfordulatnak bármely adott C pont fix-pontja. Ez utóbbi transzformációt a jelölés természetes kiterjesztésével

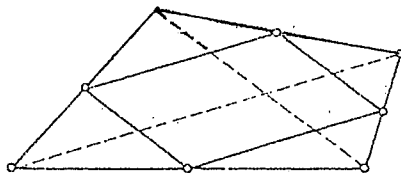
$$C \rightarrow C$$

alakban írhatjuk fel.

6.16. Ha egy (nem feltétlenül konvex) hatszög három átlójának felezőpontja egybeesik, akkor a hatszög bármely két szemközti oldala párhuzamos egymással.

6.17. Az ABC háromszög BC oldalának tetszőleged  $A_1$  pontjából húzzuk meg a BA-val párhuzamos  $A_1B_1$  egyenest, amely a CA oldalt  $B_1$ -ben metszi. Ezután húzzuk meg a CB-vel

párhuzamos  $B_1C_1$  egyenest, amely az  $AB$ -oldalt  $C_1$ -ben metszi, majd az  $AC$ -vel párhuzamos  $C_1A_2$  egyenest, amely  $BC$  oldalt  $C_1$ -ben metszi, majd az  $AC$ -vel párhuzamos  $C_1A_2$  egyenest, amely a  $BC$  oldalt  $A_2$ -ben metszi. Ha  $A_1$  a  $BC$  oldal felezőpontja, akkor  $A_2$  egybeesik vele. Ha nem, akkor folytassuk az eljárást: húzzuk meg a  $BA$ -val párhuzamos  $A_2B_2$  egyenest, a  $CB$ -vel párhuzamos  $B_2C_2$  egyenest, és az  $AC$ -vel párhuzamos  $C_2A_3$  egyenest. A törtvonal most bezárul:  $A_3$  egybeesik  $A_1$ -gyel. (Ezt nevezik Thomsen-alakzatnak. L.Nev.R.Mind, Geometrical Magazine, Scripta Mathematica, 19 (1953), 198-200 old.)



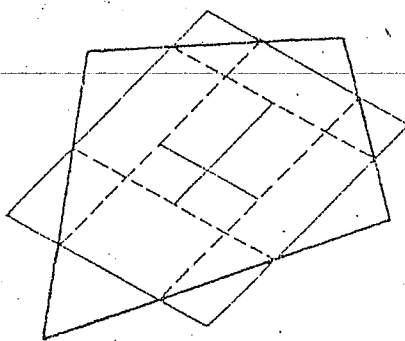
31. ábra

6.18. Tetszőleges egyszerű négyszög oldalfelezőpontjai paralelogrammát határoznak meg (31. ábra;) Ezt a tételt Pierre Varignon (1654-1722) fedezte fel, és ezért az ilyen paralelogrammát Varignon-paralelogrammának is szokták nevezni. A tétel azt is mutatja, hogy a négyszög szemköztí oldalfelezőpontjait összekötő középvonalak felezik egymást.

6.19. Bármely teljes négyszög hat oldalfelezőpontja középpontosan szimmetrikus hatszöget határoz meg, (olyat, amelyet a fenti 46. feladatban vizsgáltunk).



akkor az  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  szakaszokat azonos arányban osztó pontok vagy szintén kollineárisak, vagy mind egybeesnek (vö. a 3.6. ponttal). Útmutatás: Tekintsük az  $A$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $C'$  pontokba helyezett, alkalmasan választott tömegek súlypontját).



33. ábra

6.29. Egy négyszög alakú homogén lemez súlypontja az oldalak egymásutáni harmadolópontjait a 33. ábrán látható módon összekötő ( ún. Wittenbauer-) paralelogramma középpontja. F. Wittenbauernek (1857-1922) ezt a tételét (Blaschke 2.13.old.) J.J.Welch és V.W.Foss újra felfedezték.)

6.30. Milyen típusú négyszögek estén esnek egybe az előző két feladatban leírt súlypontok?

6.31. Tetszőleges négyszög csúcsaiba helyezett egyenlő tömegek súlypontja a Varignon-paralelogramma középpontja.

6.32. Ha  $O$  az  $ABC$  háromszög síkjának az oldalegyeneseken kívüli pontja és az  $AO$ ,  $OB$ ,  $OC$  egyenesek a szemközti háromszögoldalt rendre az  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  pontban metszik, akkor

$$(ABC') (A'B'C) (A'B'C') = 1 \quad (\text{Ceva tétele})$$

6.33. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyeneszeit egy e egyenes rendre a csucsokból különböző  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1.$$

(Ez az ún. MENELAOS-tétel).

6.34. a) Jelöljük ki a térben négy pontot úgy, hogy egyik három se legyen egy egyenesen, legyenek ezek A, B, C, D. Vegyünk fel az AB egyenesen egy P, a DC egyenesen egy Q pontot úgy, hogy  $(ABP) = (DCQ)$  legyen; majd a BC ill. AD egyenesen egy R, ill. S pontot úgy, hogy  $(BCR) = (ADS)$  fennálljon. Bizonyítsuk be, hogy a PQ és RS egyenesek metszik egymást egy olyan M pontban, amelyre  $(PQM) = (ABP)$  és  $(RSM) = (BCR)$ . (R. 29).

#### 7.§. Körök geometriája, körtartó transzformációk

Az euklideszi sík egy K köréhez adott P ponton keszesz-  
tül húzzunk szelőt, amelyik a kört az A, B pontokban met-  
szi. A szelők tétele szerint a  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  szorzat konstans,  
független a szelő választásától, amit a P pontnak a K  
körre vonatkozó hatványának nevezünk.

Ha a K kör középpontja O, sugara pedig r, akkor a sík  
minden P pontjához rendeljük azt a  $P'$  pontot, amelyik az  
OP félegyenesre illeszkedik, és  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$  teljesül.  
Ezt a transzformációt a K alapkörre vonatkozó inverziónak  
nevezünk, amelynek pólusa az O pont.

Az inverziókról megmutatható, hogy a pólusokon áthaladó egyeneseket invariánsan hagyja, a pólusra nem illeszkedő köröket póluson áthaladó körökbe és fordítva, továbbá pólusra nem illeszkedő köröket ugyanilyen körökbe transzformál. Az is megmutatható, hogy az inverziók érintkezés és szögtartóak.

Zárjuk le a síkot egy ideális,  $\infty$  jellel jelölt ponttal. Az így nyert sík, az u.n. inverzív sík. Az egyenesek is, ezzel a  $\infty$  ponttal lezárva, köröknek tekinthetők. Így az inverzív sík körrel a közöséges körök és ezek a lezárt egyenesek. Az inverziók az  $0 \longleftrightarrow \infty$  hozzárendeléssel az inverzív sík bijekciójává terjeszthetők ki. Így a fenti tétel úgy is megfogalmazható, hogy az inverziók körtartó transzformációk az inverzív síkon.

Az inverzív sík egy bijekcióját körtartónak mondjuk, ha köröket körökbe transzformál. Az inverziókhoz képest újabb körtartó transzformációkat kapunk, ha a hasonlóságokat  $\infty \longrightarrow \infty$  hozzárendeléssel kiterjesztjük. <sup>Belátható az alábbi tétel</sup> Az inverzív sík bármely körtartó transzformációja vagy hasonlóság vagy pedig egy hasonlóság és egy inverzió szorzata.

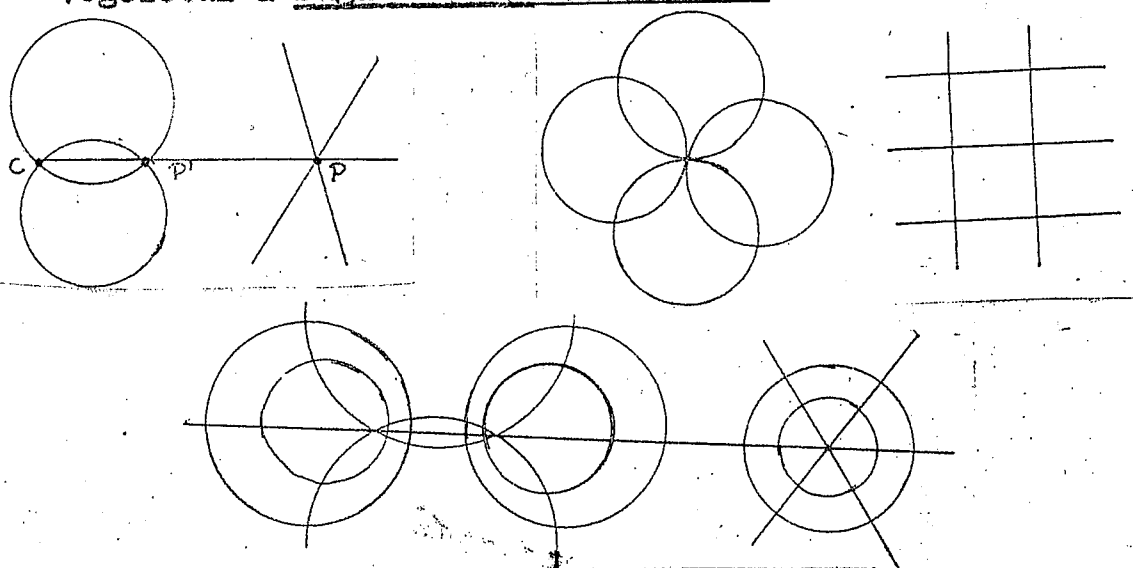
A körtartó transzformációk analitikusan és leírhatók. Ugyanis tekintsük a síkot a komplex számok síkjának. Ekkor a körtartó transzformációk megegyeznek az

$$x \longrightarrow \frac{a x + b}{c x + d} \quad \text{ill.} \quad x \longrightarrow \frac{a \bar{x} + b}{c \bar{x} + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

törtlineáris leképezésekkel.

A hiperbolikus geometria izometriáinak a tárgyalásához bevezetjük az u.n. hiperbolikus transzformációkat is. Tekintsünk egy kört. Ekkor a kört, belsejével együtt invariánsan hagyó körtartó transzformációkat hiperbolikus transzformációknak nevezzük. Ilyenek pl. a középponton áthaladó tengelyekre vonatkozó tükrözések, és az alapkört merőlegesen metsző körökre vonatkozó inverziók. Az utóbbi leképezéseket hiperbolikus tükrözéseknek nevezzük. Belátható, hogy bármely hiperbolikus transzformáció legfeljebb három hiperbolikus tükrözés szorzataként állítható elő.

Végezetül a sugársorok és a körsorok témakörét érintjük.



Közös pontra illeszkedő vagy egymással párhuzamos egyenessereget sugársornak nevezzük.

Invertáljuk egy  $P$  tartójú sugársor elemeit egy  $C \neq P$  pólusra vonatkozólag. Ha  $P$  képe  $P'$ , akkor az egyenesek a  $C, P'$  pontokon áthaladó körökbe, egy u.n. metsző körsorba transzformálódnak. A  $CP$  egyenes a hatványvonal a  $CP'$  felező merőlegese pedig az u.n. centrális. Az így nyert körsort hiperbolikus körsornak is nevezik.

Ha a  $P$  körüli koncentrikus köröket invertáljuk, ekkor a  $C$  ill.  $P'$  körül ( de nem mind középpontok körül!) egy u.n. nem metsző vagy elliptikus körsort kapunk, aminek elemei az előző körsor elemeit merőlegesen metszik az inverzió szög tartása miatt. Ennek a körsornak a centrálisa a  $CP$  egyenes, a hatványvonala pedig a  $\overline{CP'}$  felező merőlegese.

Invertáljunk most egy párhuzamos egyenessereget a  $C$  pont ra vonatkozólag. Ekkor a  $C$  pontban érintkező u.n. parabolikus körsort kapunk. A közös érintő a hatványvonal és a  $C$  pontban a rá merőleges egyenes a centrális. Ha a merőleges párhuzamos egyenessereget invertáljuk, akkor ismét parabolikus körsort kapunk., aminek elemei az előző körsor elemeit merőlegesen metszik.

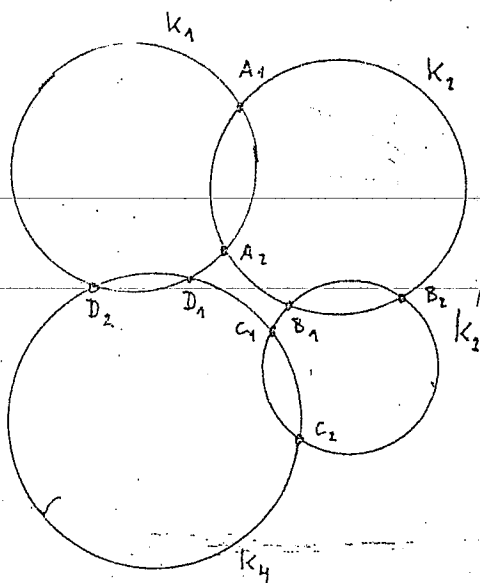
Bekizonyítható, hogy egy körsor hatványvonala azon pontok halmaza, amelyekre a körsor elemekre vett hatvány konstans.

Két nem koncentrikus kör egyértelműen körsorrá terjeszthető ki, aminek hatványvonalát a két kör hatványvonalának nevezzük. Belátható, hogy három kör páronként vett hatványvonalai közös pontra illeszkednek.

A körök geometriája axiomatikusan is kiépíthető. Ekkor az alaptulajdonságok a következő tételekben megfogalmazott tulajdonságok.

- (1) Bármely három különböző pontra pontosan egy kör illeszkedik.

(2) Ha  $K$  kör,  $P \in K$  és  $Q \notin K$ , akkor a  $P$  és  $Q$  pontokra egy és csak egy a  $K$  kört is érintő kör illeszkedik.



35. ábra

(3) Ha az ábra metsző  $k_1, k_2, k_3, k_4$  köreire az  $A_1, A_2, C_1, C_2$  pontok körre illeszkednek, akkor a

$D_1, D_2, B_1, B_2$  metszéspontok is körre illeszkednek (Csokor tétel).

(4) (Miquel tétel). Ha az  $A_1, B_2, C_2, D_2$  körre illeszkednek, akkor a  $B_1, C_1, D_1, A_2$  pontok is közös körre illeszkednek.

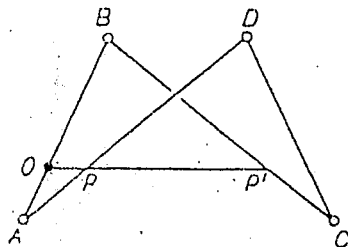
7.1. Bizonyítsuk be az előző tételeket.

A térben a gömbökre vonatkozó inverziót hasonlóan definiáljuk mint a síkban. Ezek a transzformációk a  $\infty$  ponttal lezárt tér ( az u.n. inverzív tér) gömbtartó transzformációját definiálják. A gömbtartó transzformációk előállításaira és a különböző gömbsorokra vonatkozólag hasonló állítások érvényesek, mint a sík köreire, így ezekkel a kérdésekkel itt részletesen nem foglalkozunk.

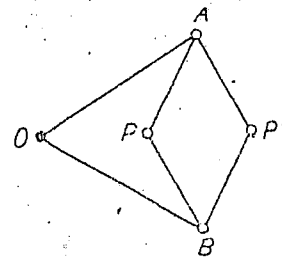
7.2. Magyarázzuk meg a Peaucellier-féle inverzor (36.ábra).

- az A. Peaucellier által 1864-ben adott alakzatok inverzénak megrajzolására alkotott eszköz- működését. A szerkezet négy egyenlő hosszúságú - az APBP' rombusz csúcsaiban csuklóban összekapcsolt - rúdból és a rombusz A és B szemközti csúcsaihoz csatlakozó, O-ban forgathatóan rögzített

két hosszabb rúdból áll. A  $P'$  pont a  $P$  pont inverze  
(és fordítva): ha a  $P$  pontot végigvesszük egy adott  
alakzat kerületén, akkor a  $P'$  pontban befogott ceruza az  
adott alakzat inverzét rajzolja meg. Speciálisan, egy  
hetedik rúd és egy újabb  $C$  forgáspont segítségével elér-  
hetjük, hogy  $P$  egy  $C$ -n átmenő körön mozogjon. Ekkor  $P'$   
egyenest ír le. Így az inverzor egzakt megoldást ad arra a  
fontos mechanikai problémára, hogy miként alakítható át  
körmozgás egyenes vonalú mozgássá /Lamb. 2314 old./ (c.95.o).



36. ábra



37. ábra

7.3. Magyarázzuk meg a Hart-féle inverzor (37. ábra)

- a H. Hart által 1874-ben, a Peaucellier féle inverzor-  
hoz hasonló céllal alkotott szerkezet - működését. Ez a  
szerkezet mindössze négy rúdból áll, amelyek ABCD "önát-  
metsző paralelogramma" ( $AB=CD$ ,  $BC=DA$ ) csúcsaiban csuk-  
lóan össze vannak kapcsolva. Az AB, AD, BC rudakon rend-  
re elhelyezkedő és egy egyenesen levő  $O, P, P'$  pontok akkor  
is egy (AC-vel és BD-vel párhuzamos) egyenesen maradnak,

ha az önátszó paralelogramma alakját változtatják. Mint előbb, a szerkezet itt is a  $O$  pontban forgathatóan rögzíthető. (Lamb 2,315. old.) (c.95.o.)

7.4. Legyen az  $r$  sugarú  $y$  körön kívül fekvő  $O$  pontnak a körre vonatkozó hatványa  $p$ . Az  $O$ , középpontú,  $k$  sugarú kör a  $y$  kört  $k^2 r/p$  sugarú körbe invertálja. (c.95.o.)

7.5. Szerkesszük meg csak körzővel egy szabályos hatszög csúcsait. (c.92.o.).

7.6. Csak körzővel szerkesszünk meg úgy egy  $B$  pontot, hogy az  $OB$  szakasz kétszer akkora legyen, mint az adott  $OA$  szakasz. (c.100.o.)

7.7. Csak körzővel szerkesszük meg az inverzió körének  $O$  középpontjától  $\frac{1}{3} k$  távolságra levő pont inverzét. Írjuk le, milyen módszerrel lehet  $O$ -hoz tetszőlegesen közeli pontokat invertálni. (c.100.o.).

7.8. Csak körzővel felezzünk meg egy adott szakaszt. (c.100.o.)

7.9. Csak körzővel harmadoljunk egy adott szakaszt. Írjuk le, hogyan oszthatunk fel tetszőleges számú egyenlő részre egy szakaszt. (c.100.o.)

Megjegyzés. A fenti feladatok a körző geometriájának problémakörébe tartoznak. A geometriának ezt az ágát egymástól függetlenül a dán G.Mohr.(1672) és az olasz L.Mascheroni (1797) dolgozták ki. A teljes történet rövid leírása a következő művekben található meg: Pedoe 1,23-25.old. vagy Courant és Robbins 1,145-151.old.

7.10. Két különböző sugarú adott kör végtelen sok nyújtva forgatással, ill. nyújtva tükrözéssel kapcsolható össze.

A fixpontok mértani helye (mindkét esetben): az adott körök hasonlósági pontjait összekötő szakasz - mint átmérő - fölé írt kör. ( Ezt a kört az adott körök hasonlósági körének nevezzük). Mi az ennek megfelelő eredmény egyenlő sugarú körökre vonatkozóan? (c.102.o.).

7.11. A hasonlósági kör tetszőleges pontjának az adott két körre vonatkozó inverzei a két kör hatványvonalára vonatkozóan egymás tükörképei Court 2,199.old. (c.102.o.)

7.12. Ha egy körsor bármely elemét egy inverzió alapköréül választjuk, akkor ez az inverzió a megmaradó elemeket páronként felcseréli, az eredetire ortogonális körsor elemeit pedig változatlanul hagyja. (c.100.o.).

7.13. Nem metsző körsor pontkörei a körsor tetszőleges elemére - mint inverzió alapkörére - vonatkozóan egymás inverzei.(c.100.o.)

7.14. Ha két körnek két vagy négy közös érintője van, akkor hatványvonaluk átmegy a közös érintők felezőpontjain. Hogyan lehet megszerkeszteni két kör hatványvonalát, ha a köröknek nincs közös érintője ( vagyis az egyik kör teljes egészében tartalmazza a másikat)? (c.100.o.)

7.15. Mi történik a határpontokkal, ha nem metsző körsort koncentrikus körök seregébe invertálunk? (c.100.o.)

7.16. Steiner porizmjában a körlánc köreinek érintési pontjai mind egy körön fekszenek. Az eredeti körök erre a körre invertálva egymásba mennek át. Igaz-e, hogy a körlánc köreinek középpontjai is egy körön vannak? (c.100.o.)

7.18. Az 1.5. pont 10. feladatában vizsgált háromszög beírt köre és a "két másik kör" ( a Soddy-körök) egy körsorhoz tartozik.(c.100.o.)

7.19. Ha egy  $O$  középpontú gömbre vonatkozóan  $A$  inverze  $A'$ ,  $B$  inverze  $B'$ , akkor az  $OAB$  és  $OB'A'$  háromszögek hasonlók. (c.104.o.)

7.20. Ha  $a=OA$  és  $b=OB$ , akkor ( az 19.feladat jelöléseivel)

$$\frac{A'B'}{ab} = \frac{k^2}{AB}.$$

( c.104.o.)

7.21. Az inverzió kettősvizonytartó transzformáció, vagyis bármely négy pontra

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{A'B'}{B'D'} : \frac{A'C'}{C'D'}$$

Casey 1,100.old. ( c.104.o.)

7.22. Két egymást  $O$ -ban érintő gömb inverze két párhuzamos sík.

7.23. Legyen  $x, z, y$  három, egymást páronként érintő gömb és  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  olyan gömbsorozat, amelynek bármely két egymásra követhető gömbje egymást és az  $x, z, y$  gömböket is érinti. Mutassuk meg, hogy  $\sigma_6$  érinti  $\sigma_1$ -et, vagyis olyan hat gömbből álló láncot kapunk, amely körülzárja az eredeti háromelemű gömbláncot. ( Útmutatás: Végezzünk inverziót egy olyan gömbre, amelynek középpontja  $x$  és  $z$  érintési pontja). (c.104.o.)

(GyR 184-186.o.):

7.24. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely két adott egyenest érint.

7.25. Szerkesszünk adott sugarú, adott ponton átmenő és adott egyenest érintő kört.

7.26. Adott egy kör és egy egyenes. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely mindkettőt érinti.

7.27. Szerkesszünk két adott kört érintő adott sugarú kört.

7.28. Rajzoljunk meg egy kört, ebbe egy tetszőleges sugarinté átmérőt és hosszabbítsuk meg ezt az átmérőt. Szerkesszünk az eredetivel egyező sugarú kört, amely az eredeti kört és az átmérő meghosszabbítását érinti.

7.29. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely érint egy előre adott kört, és annak egy megszerkesztett érintőjét.

7.30. Szerkesszünk adott sugarú kört, amely két adott ponton átmeny.

7.31. Tűzzünk ki egymástól 3 cm-nyire két pontot. Szerkesszünk olyan 2 cm sugarú kört, amely az egyik kitézött ponttól 1 cm, a másiktól 2 cm távolságban halad.

7.32. Szerkesszünk kört, amely 2 adott ponton átmeny és középpontja egy adott körön van.

7.33. Szerkesszünk kört, amely egy háromszög három csúcsától adott távolságban halad.

7.34. Adott 4. pont. Szerkesszünk kört, amely mind a 4-től egyenlő távolságra van.

7.35. Szerkesszünk kört, amely két egyenest érint, egyiket adott pontban.

7.36. Szerkesszünk kört, amely egy kört és egy egyenest érint az, előbbi adott pontban.

7.37. Szerkesszünk egy háromszögbe félkört, amelynek átmérője az egyik oldalon van és érinti a másik két oldalt.

7.38. Szerkesszünk kört, amely adott egyenest érint és átmegy két olyan ponton, amelyek összekötő egyenese merőleges az adott egyenesre.

7.39. Tűzzünk ki egy pontot két egyközepű kör között. Szerkesszünk kört, amely mindkét kört érinti, és átmegy az adott ponton.

7.40. Adott körcikkekbe írjunk a sugarakat és az ívet érintő kört.

7.41. Szerkesszünk kört, amely két egyenlő sugarú kört érint, az egyiket adott pontban.

7.42. Szerkesszünk kört, amely két tetszőleges kört érint, az egyiket adott pontban.

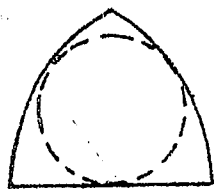
7.43. Szerkesszünk kört, amely egy egyenest és egy kört érint, az egyenest adott pontban.

7.44. Szerkesszünk kört, amely három egyenlő sugarú kört érint, / a körök középpontjai nincsenek egy egyenesen, az érintő kör mindhárom kört kívülről, vagy mindhármat magába zárva érinti/.

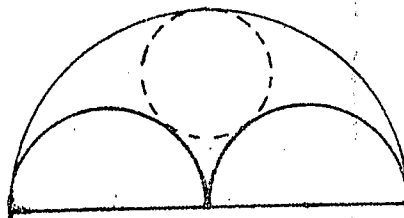
7.45. Szerkesszünk kört

a/ a 38. ábrán lévő csúcsíves ablakban;

b/ a 39. ábrán lévő román ablakba .



38. ábra



39. ábra

7.46. Mutassuk meg, hogy azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre két adott ponttól vett távolság négyzetének a különbsége állandó, a két pont egyenesére merőleges egyenes.

7.47. Mutassuk meg, hogy azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek két / nem koncentrikus/ körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör centrálisára merőleges egyenes / hatványvonal/.

7.48. Bizonyítsuk be, hogy három kör páronként vett hatványvonalai egy pontban metszik egymást, ha középpontjaik nincsenek egy egyenesen / hatványpont/.

7.49. Három adott körhöz szerkesszünk pontot, amelyből mindháromhoz egyenlő érintő húzható.

7.50. Tűzzünk ki egy egyenesen két pontot és szerkesszünk érintő köröket ezekben a pontokban az egyeneshez úgy, hogy a körök messék egymást. Bizonyítsuk be, hogy a közös hur meghosszabbítása mindig felezi a felvett pontok meghatározta szakaszt.

7.51. Tűzzünk ki egy egyenesen két pontot és szerkesszünk érintő köröket ezekben a pontokban az egyeneshez úgy, hogy a körök érintsék egymást. Bizonyítsuk be, hogy az érintési ponthoz tartozó közös érintő mindig felezi a két felvett pont szakaszát.

7.52. Adott két körhöz szerkesszünk pontot, amelyből a két körhöz egyenlő és előre adott szöget bezáró érintők húzhatók.

7.53. Adott 3 pont. Szerkesszünk a pontok köré köröket, amelyek egymást páronként merőlegesen metszik.

7.54. Szerkesszünk két ponton át olyan kört, amelyeik adott kört átellenes pontokban metsz.

7.55. Szerkesszünk kört, amely egy háromszög minden oldalából adott szakaszt metsz ki.

7.56. Adott pontból adott körhöz szerkesszünk szelőt úgy, hogy a belőle kimetszett hur adott hosszúságú legyen.

7.57. Két adott körhöz szerkesszünk szelőt, amelynek a körökbe adott hosszúságú darabja esik.

7.58. Adott pontból adott körhöz szerkesszünk szelőt úgy, hogy annak a körön belüli darabja a kör egy pontjából adott szögben látszódjék.

7.59. Adott két pontot vetítsünk egy alkalmas kör pontjából a körre úgy, hogy a vetületek összekötő szakasza adott irányú legyen.

7.60. Adott körbe írjunk be háromszöget úgy, hogy oldalegyenesei egy-egy kitűzött ponton menjenek át.

7.61. Külső pontból huzzunk szelőt a körhöz, amely azt adott szögben metszi. Adott pontból adott körhöz szerkesszünk szelőt úgy, hogy a belőle kimetszett hur mértani középarányos legyen a szelő szeletei között.

7.62. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszögben a magasságoknak a magasságponttól a csúcsig és az oldalig terjedő szakaszának a szorzata mind a három magasságon ugyanakkora.

7.63. Hegyesszögű háromszög két oldala mint átmérő fölé kifelé félköröket szerkesszünk. Hosszabbítsuk meg a szenkőzti

csúcsokból húzott magasságvonalaikat a félkörig. Bizonyítsuk be, hogy ezek metszéspontja egyenlő távol van a köztük lévő csúcstól.

7.64. Hosszabbítsuk meg az ABC háromszög A csúcsához tartozó szögfelezőjét a köré írt kör A'' pontjáig, a szögfelező a BC oldalt A'-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A''B mértani közepe a A'A'' és AA'' szakaszoknak.

7.65. Szerkesszünk háromszöget ha adott egy oldala, az ezzel szemkötti szöge és a szög felezőjének a hossza.

7.66. Szerkesszünk húrnegyszöget, ha adott egy oldalának egyenese, az azon lévő oldal hossza és a szemkötti oldal végpontjai.

7.67. Rajzoljunk három egymást metsző kört úgy, hogy közös húrjaik metszéspontja mindegyikük belsejében legyen. Bizonyítsuk be, hogy a hurok metszéspontja körül szerkeszthető olyan kör, amelyet mindhárom kör átellenes pontokban metsz.

7.68. Szerkesszünk kört, amely adott ponton átnegy és két adott egyenest érint.

7.69. Szerkesszünk kört, amely két adott egyenest és egy kört érint.

6.70. Szerkesszünk kört, amely két adott ponton átnegy és egy adott egyenest érint.

7.71. Adott egyenesen szerkesszünk pontot, amely egy ponttól és egy egyenestől egyenlő távolságra van.

7.72. Adott egyenesen szerkesszünk pontot, amely egy körtől és egy egyenestől egyenlő távolságra van.

7.73. Szerkesszünk kört, amely két adott ponton átmegy és egy adott kört érint.

7.74. Szerkesszünk két ponton át kört úgy, hogy adott körből adott hosszúságú hirt messen ki.

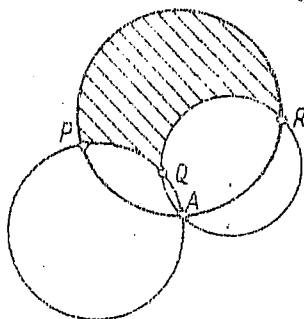
7.75. Adjunk meg egy egyenest, egy kört, és ennek az egyenesre merőleges átmérőjét. Az átmérő egyik végpontjából huzzunk szelőt, és igazoljuk, hogy az adott egyenesig terjedő szakasznak és a kimetszett hurnak a szorzata független a szelő irányától.

7.76. A  $P$  ponton átmenő  $AB$  és  $A'B'$  egyeneseken az  $A, B; A', B'$  pontok úgy helyezkednek el, hogy a  $P$  vagy elválasztja, az  $A, B; A', B'$  pontpárok mindegyikét, vagy egyiket sem, és  $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ . Bizonyítsuk be, hogy  $A, B; A', B'$  egy körön vannak.

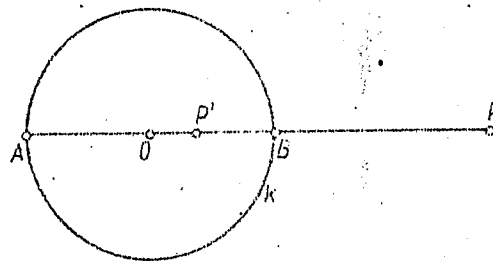
( St./II/ 21-22.o.):

7.77. Legyen az  $A$ , ill.  $B$  pont inverze  $A'$ , ill.  $B'$  és közöttük ne legyenek azonosak. Igazoljuk, hogy ha az  $A, A', B, B'$  pontok nincsenek egy egyenesen, akkor húrnegyszöget alkotnak!

7.78. Mekkora a 40. ábrán vonalkázott  $PQR$  ídom szögeinek az összege?



40. ábra



41. ábra

7.79. Az  $O$  pólusu  $k$  alapkörű,  $r^2$  hatványú inverzió esetében  $P$  inverze legyen  $P'$ , A 41. ábra jelöléseivel igazoljuk, hogy

$$a/ \quad (\angle ABP) = - (\angle ABP');$$

$$b/ \quad \frac{1}{AP} + \frac{1}{AP'} = \frac{1}{r}.$$

7.80. Négy kör közül bármelyik másik kettőt kívülről érint. Inverzió segítségével igazoljuk, hogy az érintési pontok egy körön vannak (I.9.27.)

7.81. Az  $A, B, C, D$  pontok ne legyenek az egyenesen vagy egy körön. Igazoljuk, hogy az  $ABC$  és az  $ABD$  köré írt körök hajlásszöge az  $ACD$  és a  $BCD$  köré írt körök hajlásszögével egyenlő.

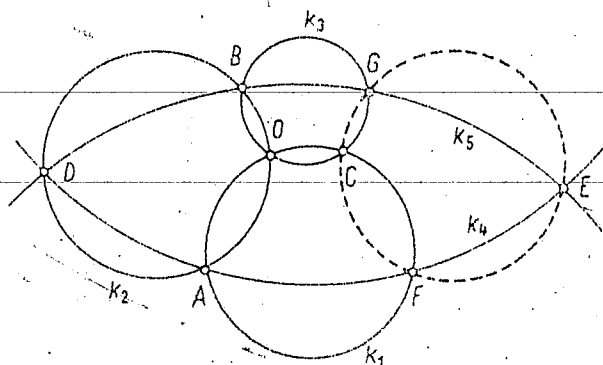
7.82. A  $k_1, k_2, k_3$  körök mindegyike messe a másik két kört és haladjon át az  $O$  ponton (42. ábra). Legyen a

$k_1, k_2$ , a  $k_2, k_3$ , a  $k_3, k_1$  körök  $O$ -tól különböző közös pontjai  $A, B$ , ill.  $C$ . A  $k_2$  kör  $AB$  ívének egy pontja legyen

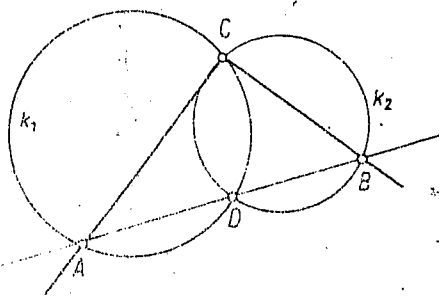
$D$ . Az  $A, D$  ill. a  $B, D$  pontokon áthalaladó  $k_4$ , ill.  $k_5$  körök  $D$ -től különböző közös pontja legyen  $E$ , a  $k_1, k_4$  körök  $A$ -tól különböző közös pontja  $F$ , végül a  $k_3, k_5$  körök  $B$ -től különböző közös pontja  $G$ . Állítás:  $A, C, G, E, F$  pontok egy körön vannak!

7.83. Az  $ACB$  szögtartomány belsőjében vegyük fel a  $D$  pontot. A  $D$  pontra illeszkedő szelő a  $CA$  szögcsúcsát messe az  $A$  pontban, a  $CB$  szögcsúcsát pedig a  $B$  pontban. (43. ábra)

Igazoljuk, hogy az ABC és a BDC köré írt  $k_1$ ,  $k_2$  körök hajlásszöge nem függ a D pontra illeszkedő szelő megválasztásától!



42. ábra



43. ábra

7.84. Az ACB szögtartomány bel-  
sejében vegyük fel a D pontot. A  
D ponton áthaladó szelő a CA szög-  
szárat mossa az A pontban, a CB  
szögszárait pedig a B pontban. A  
D ponton áthaladó és az CA egyenest  
A-ban érintő kör legyen  $k_1$ , a D  
ponton áthaladó és a CB egyenest

B-ben érintő kör pedig legyen  $k_2$ . Igazoljuk, hogy a  $k_1$  és  $k_2$  körök hajlásszöge nem függ a D ponton áthaladó szelő megválasztásától!

7.85. Igazoljuk, hogy a póluson át nem haladó kör középpontjának inverze a kör inverzének nem lesz középpontja!

7.86. Legyen a  $k$  kör inverze a  $k'$  kör. Határozzuk meg azt a pontot, amelynek inverze a  $k'$  kör középpontja lesz!

7.87. Irjuk fel a  $P(1, -4)$  pont inverzének koordinátáit, ha az alapkör az  $x^2 + y^2 = 1$  kör!

7.88. Az inverzió alapköre legyen az  $x^2 + y^2 = 1$  kör. Irjuk fel a következő alakzatok inverzeinek az egyenletét:

a/  $2x - 3y + 1 = 0$ ;

b/  $x^2 + y^2 = 5$ ;

c/  $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ ;

d/  $(x+1)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$  ;

e/  $y^2 = x$ ;

f/  $x^2 - y^2 = 1$ .

### 8.§. Elliptikus geometria

Az elliptikus geometriában lényegében a gömbfelületek geometriáját vizsgáljuk. Tekintsünk az euklideszi térben egy egység sugarú gömbfelületet. Ezen két pont között a legrövidebb utat a két pontot összekötő főkör definiálja, így a főkörök úgy tekinthetők, mint a gömbfelület "egyenesei". Ezeknek a főköröknek az illeszkedési és rendezési tulajdonságai különböznek az euklideszi egyenesek megfelelő tulajdonságaitól, hiszen két átellenes pontra végtelen sok főkör illeszkedik, és egy főkört két pontja a főkört két ívre (szakaszra) bontja. A gömbfelületen metrikát is bevezethetünk úgy, hogy egy főkörív hosszát a végpontokhoz húzott sugarak szögével mérjük. Két közös kezdőpontú fél főkörív szögét pedig a csúcsban meghúzott megfelelő félérintők euklideszi szögeként definiáljuk.

A főkörívek segítségével a gömbfelületre háromszögek rajzolhatók. Ezek közül csak azokat tekintjük háromszögnek, amelyeket valamely félgömb tartalmaz. Ha ABC ilyen háromszög, melynek a csúcsokkal szemköztes oldalainak hosszát rendre  $a; b; c$ , valamint a csúcsokban lévő szögeket rendre  $\alpha, \beta, \gamma$  jelöli, akkor a gömbfelület szinusz ill. koszinusz tételei a következők:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (\text{szinusz tétel})$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \quad (\text{oldalalak cosinus tétele})$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \quad (\text{szögek cosinusz tétele})$$

Az alapgömb centrumát fixen hagyó térizometriák a gömbfelületet invariánsan hagyják és a gömbfelületre vett megszorítottjaik a felületen izometriát adnak. Megmutatható, hogy a gömbfelület minden izometriája ilyen megszorítással nyerhető.

A gömbfelületen a terület-mérésre vonatkozólag bebizonyítható a következő tétel.

Létezik pontosan egy olyan hozzárendelés, amelyik a gömbfelület  $K$  konvex pontthalmazaihoz  $T(K) \geq 0$  számot rendel úgy, hogy (1) a  $T$  additív: ha  $K = K_1 \cup K_2$ ,  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ , akkor

$$T(K) = T(K_1) + T(K_2),$$

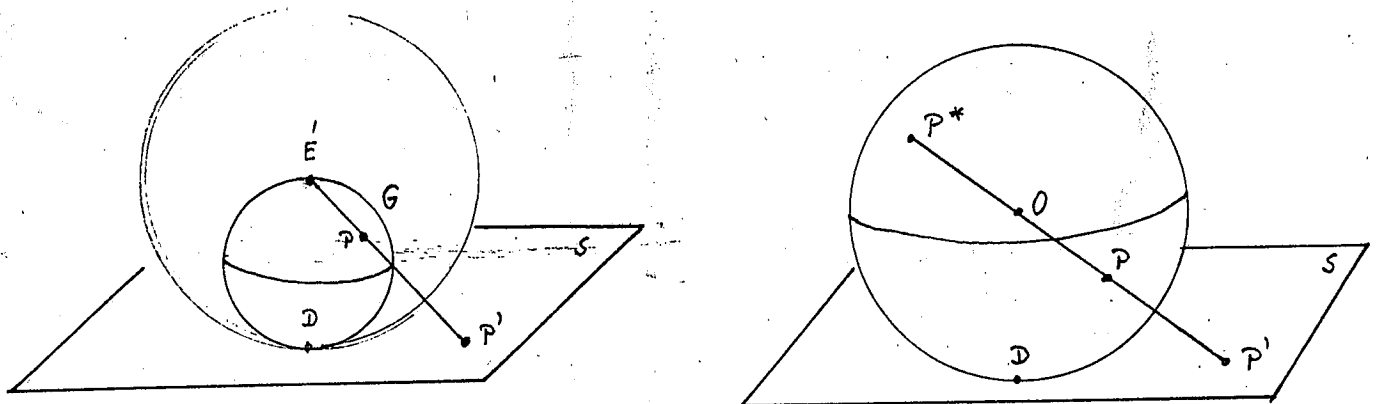
(2) A  $T$  az izometriákra nézve invariáns,

(3) a teljes gömbfelület területe  $4\pi$ .

Belátható, hogy ekkor egy  $\alpha, \beta, \gamma$  szögű háromszög területe

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Vagyis a gömbi háromszögek szögeinek összege a  $\pi$ -nél pontosan a területével nagyobb (szögdefektus formula).



44. ábra

A G gömbfelület geometriáját tovább vizsgálandó, jelöljünk ki rajta két áttellenes  $E, D$  (északi, déli) pontot, majd az  $E$  köré írjunk két egység sugarú  $G$  gömböt. Ekkor a  $G$  gömbre vonatkozó inverzió a  $G$  gömböt a  $D$  pontban érintő  $S$  érintősíkba transzformálja és az inverziók kör és szögtartása miatt ez a leképezés a  $G$  és  $S$  között kör- és szögtartó. A  $G$  és  $S$  között ez a leképezés pontosabban is leírható. Ugyanis, ha egy, az  $E$  pontból kiinduló félegyenes a  $G$  gömböt a  $P$  pontban, az  $S$  síkot pedig a  $P'$  pontban metszi, akkor a  $G$  és  $S$  között a fent leírt inverzió nem más, mint az északi pólusból vett  $P \rightarrow P'$  projekció. Így kapjuk, hogy egy

gömb északi pólusából a déli pólusára fektetett érintősíkjaára történő vetítése a gömböt a síkra kör- és szögtartó módon képezi le. Ezt a vetítést sztereografikus projekciónak nevezik, mivel a fenti tulajdonságok miatt térképkészítésre használják.

Az előző  $G$  gömböt nemcsak az  $E$  ponttól, de az  $O$  középpontból is ráveíthetjük az  $S$  érintősíkjaára. Viszont ez a leképezés nem bijekció, hiszen átellenes  $P, P^*$  pontokhoz azonos  $P'$  pontot rendel, sőt az egyenlítő pontjaira ez a leképezés nem definiált. Ez utóbbi hiányosságot a következőképpen pótolhatjuk.

Vegyük hozzá az  $S$  sík pontjaihoz ideális, végtelen távoli pontokat úgy, hogy párhuzamos egyenesekhez ugyanazt a végtelen távoli pontot vesszük, míg különböző irányú egyenesekhez különböző ideális pontokat vesszünk. Pontosabban fogalmazva a sík pontjainak halmazát a sík irányainak halmazával bővítjük és egy egyenes ideális, végtelen távoli pontjának az irányát nevezzük. Az így kibővített ponthalmazt nevezik analitikus projektív síknak, amiben egyeneseknek az ideális pontjukkal lezárt közösleges egyeneseket és az összes ideális pontot tartalmazó u.n. ideális egyenest tekintik.

Most pedig a  $G$  gömbfelületre visszatérve, azonosítsunk egymással minden átellenes  $(P, P^*)$  pontpárt és nevezzük pontoknak ezeket az átellenes pontpárokat. Itt az egyeneseket a főkörökből definiáljuk, a szemközties pontok azonosításával. Az így nyert pont-egyenes rendszert a projektív sík gömbi modelljének nevezzük.

A konstrukciókból világosan látható, hogy az  $O$  középpontból vett projekció a gömbi modell és az érintő analitikus projektív sík között olyan bijekciót definiál, amelyik egyenest egyenesbe transzformál (illeszkedés-tartó).

Az előzőekben projektív síkokra két modellt is konstruáltunk. Az ilyen síkokra ill. magasabb dimenziós terekre axiomatikus felépítés is adható. Pl. a fenti modellekben könnyen beláthatók a következő tulajdonságok.

$I_1$  Bármely két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.

$I_2$  Bármely két különböző egyenesre egy és csak egy pont illeszkedik.

Axiomatikus felépítésnél ezek a projektív sík illeszkedési axiómái.

A projektív síkok elméletében a lehető legalapvetőbb szerepet az u.n. kollineációk játszá. Ezek a pontok olyan bijekciói, amelyek egyenest egyenesbe transzformálnak.

A gömbfelület metrikája metrikát indukál a projektív sík-modelleken is természetes módon. Az ilyen metrikával ellátott projektív síkokat nevezik elliptikus síkoknak. Ezek izometriáit a gömbfelület izometriái indukálják.

(St./III/ 41-43.o.):

8.1. A megadott adatok ismeretében számítsuk ki a háromszög hiányzó adatait:

|    |                      |                     |                     |
|----|----------------------|---------------------|---------------------|
| a) | $a=60^\circ$ ,       | $b=45^\circ$ ,      | $c=90^\circ$ ;      |
| b) | $\alpha=45^\circ$ ,  | $\beta=120^\circ$ , | $\gamma=45^\circ$ ; |
| c) | $a=75^\circ$ ,       | $b=60^\circ$ ,      | $\gamma=45^\circ$ ; |
| d) | $\alpha=120^\circ$ , | $\beta=60^\circ$ ,  | $c=135^\circ$ .     |
| e) | $a=30^\circ$ ,       | $b=45^\circ$ ,      | $\alpha=45^\circ$ , |
| f) | $\alpha=120^\circ$ , | $\beta=45^\circ$ ,  | $a=60^\circ$ .      |

8.2. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek  $a=60^\circ$ ,  $b=30^\circ$  és  $c=45^\circ$ . Számítsuk ki az A csúcspontot és a BC oldal  $A_1$  felezőpontját összekötő főkörív hosszát!

8.3. Az  $a=30^\circ$ ,  $b=60^\circ$ ,  $c=60^\circ$  oldalú gömbháromszög B csúcsából hússágunk merőleges főkörívet a gömbháromszög AC oldalára. Milyen hosszú az így adódó  $BB_1$  főkörív?

8.4. Az ABC gömbháromszög oldalai adottak:  $a=30^\circ$ ,  $b=60^\circ$ ,  $c=60^\circ$ . Számítsuk ki a  $\beta$  szöget felező  $BB_2$  főkörív hosszát ( $B_2$  az AC oldal pontja)!

8.5. Számítsuk ki a szabályos

- a) tetraéder,
- b) oktaéder,
- c) dodekaéder,
- d) ikozaéder

lapszögét!

8.6. Az egységgömb középpontjából kiinduló  $\underline{a} (3, -1, 2)$ ,  $\underline{b} (6, 4, 1)$   $\underline{c} (1, 4, 2)$  vektorok kidőfik egy gömbháromszög csúcsait. Határozzuk meg a gömbháromszög adatait!

8.7. Az ABC gömbháromszög oldalai ismertek, mégpedig  $a=45^\circ$ ,  $b=60^\circ$ ,  $c=90^\circ$ . A CB oldalt a B csúcsponton túl meghosszabbítjuk  $BA_1=30^\circ$ -kal. Milyen hosszú az  $AA_1$  főkörív?

8.8. Az ABC gömbháromszögben  $a=60^\circ$ ,  $b=90^\circ$ ,  $\gamma=15^\circ$ . Az ABC gömbháromszöghöz úgy illeszkedik az ACB' gömbháromszög, hogy az AC oldalon nyugvó szögek  $45^\circ$ -ak, és a két háromszögnek nincs közös belső pontja. Milyen hosszú a  $BB'$  főkörív?

8.9. Az ABC gömbháromszögben  $a=60^\circ$ ,  $b=45^\circ$ ,  $c=90^\circ$ . A gömbháromszög AB oldalán áthaladó főkör által határolt, a gömbháromszöget tartalmazó félgömb pólusa legyen P. Számítsuk ki az ACP szöget és a PC főkörív hosszát!

8.10. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek  $a=90^\circ$ ,  $b=60^\circ$ ,  $c=120^\circ$ . Az AB oldal  $C_1$  pontjára  $AC_1=60^\circ$ , a BC oldal  $A_1$  pontjára pedig  $CA_1=30^\circ$  teljesüljön. Az  $AA_1$  és a  $CC_1$  ívek metszéspontja legyen P.

- a) Számítsuk ki a  $PC_1$  főkörív hosszát!
- b) Milyen hosszú a PB főkörív?
- c) Számítsuk ki a  $CC_1A_1$  szöget!

8.11. Ismertek a gömbháromszög  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalai. Készítsünk tervet

- a) a gömbháromszögbe írt kör
- b) a gömbháromszög köré írt kör sugarának meghatározásáról

8.12. Az egységgömb középpontjából induljanak ki a  $\underline{a}$  (1,-2,-2),  $\underline{b}$  (2,2,-1),  $\underline{c}$  (2,-1,2) vektorok. Számítsuk ki az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  vektorok által kidőlt gömbháromszög köré írt gömbi kör középpontjába mutató vektor koordinátáit!

8.13. Az ABC gömbháromszög megfelelő csúcspontjaiba mutatnak a gömb középpontjából induló és jobbrendszerben alkotó  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  egység vektorok. Fejezzük ki az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  vektorok segítségével a gömbháromszög köré írt kör középpontjába mutató  $\underline{x}$  vektort.

8.14. A gömb középpontjából kiinduló  $\underline{a}$  (1,0,0)  $\underline{b}$  (1,1,1)  $\underline{c}$  (1,1,0) vektorok gömbháromszöget határoznak meg. Milyen messze van (főkörívben mérve) a gömbháromszög A csúcsa a BC oldaltól?

8.15. Legyen a gömbháromszögben  $\gamma = 90^\circ$ . Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket;

$$a) \sin a = \sin \alpha \sin c;$$

$$b) \cos \alpha = \sin \beta \cos a; \cos \beta = \sin \alpha \cos b;$$

$$c) \cos c = \cos a \cos b;$$

$$d) \cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

8.16. Ha egy gömbháromszögnek pontosan egy  $90^\circ$ -os oldala van, akkor hány  $90^\circ$ -nál nagyobb szöge lehet?

8.17. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő oldalú gömbháromszögben

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{a}{2} = 1,$$

ahol  $a$  a gömbháromszög oldalát,  $\alpha$  pedig a szögét jelenti!

8.18. Egy gömbháromszög oldalai  $a$  így a szögei  $\alpha$  is egyenlők, nagyságuk  $a$  ill.  $\alpha$ .

a) Milyen összefüggés van  $\cos a$  és  $\cos \alpha$  között?

b) Mekkora  $a$  ill.  $\alpha$ , ha egymásnak pótszögei?

8.19. Az ABC gömbháromszög A csúcsából a szembenfekvő oldalra bocsátott merőleges főkörív ezt az oldalt két megadott részre (p és q) bontja fel. Adott még:  $\alpha$   
Számítsuk ki e gömbháromszög többi oldalát és szögét!

8.20. Az elliptikus sík két köre legfeljebb négy pontban metszheti egymást. (c. 107.o.)

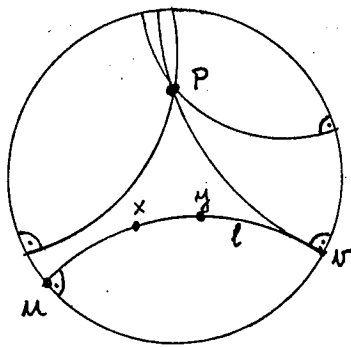
8.21. Az elliptikus síkban egy p-szög területét úgy kaphatjuk meg, hogy szögeinek összegéből levonjuk az euklideszi síkbeli p-szög szögeinek összegét (c.107.o.).

### 9.§. Hiperbolikus geometria

A hiperbolikus beomstriát is modellben, az u.n.

Poincaré féle modellben tárgyaljuk.

Tekintsünk a síkban egy kört. A hiperbolikus geometria pontjainak vegyük a kör belsejébe eső pontokat, egyeneseinek



45. ábra

pedig az alapkört merőlegesen metsző köröknek az alapkör belsejébe eső íveit. Erre a pont-egyenest rendszerre az  $I_3$  párhuzamosság axiómája nem teljesül, hiszen egy l egyeneshez egy P  $\notin$  l ponton keresztül végtelen sok

nem-metsző egyenes húzható. Ezek között létezik pontosan kettő, amelyik az l egyenest a határkörre eső u.n.

aszimptotikus pontjában metszi (ezek nem pontjai a geometriának!). Ezeket nevezzük az l egyenessel párhuzamos egyeneseknek (elpattanó egyenesek), míg a többi nem metsző egyenest ultraparalel egyenesnek hívjuk.

Viszont könnyen leellenőrizhető, hogy az euklideszi sík többi  $I_1, I_2, R_1, R_2$  illeszkedési ill. rendezési axiómája már érvényes ebben a geometriában is.

A metrika bevezetéséhez tekintsük a síkot a komplex számsíknak. A különböző  $z_1, z_2, z_3, z_4$  komplex számok  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  u.n. kettősvizonyát a

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

képlettel definiáljuk. Ezt a kettősvizonyt a körtartó transzformációk (törtlineáris leképezés lévén) invariánsan hagyják, valamint érvényesek a

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = 1 / (z_1, z_2, z_4, z_3),$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)(z_1 z_2 z_4 z_5) = (z_1 z_2 z_3 z_5)$$

tulajdonságok is. Az is belátható, hogy a kettősvizony akkor és csak akkor valós szám, ha a pontok vagy körre vagy egyenesre illeszkednek.

Ezek után a hiperbolikus metrikát a következőképpen definiáljuk.

Legyen az  $x, y$  hiperbolikus pontokra fektetett 1 hiperbolikus egyenes két aszimptotikus pontja  $u$  és  $v$ . Ha a jelölést az ábra szerinti sorrendben hajtjuk végre, akkor  $(u, v, y, x) \geq 1$ . Az  $x, y$  pontok távolságát a

$$d(x, y) := \ln(u, v, y, x)$$

képlettel definiáljuk. A kettősvizony tulajdonságaiból könnyen adódik, hogy ez a távolság kielégíti az  $M_1, M_2, M_3, M_4$  metrikus axiómákban megfogalmazott tulajdonságokat.

Végezetül egy  $l$  egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözést az  $l$ -re (mint körre) vonatkozó inverzióként definiáljuk. Mivel az inverziók kettősvizonytartók, így valóban olyan izometriát kapunk, amelyik kielégíti a tengelyes tükrözések axiómájában kirótt feltételeket.

A merőlegességet a tengelyes tükrözések segítségével definiálva belátható, hogy két egyenes akkor és csak akkor merőleges ha az általuk meghatározott körök euklideszi értelemben merőlegesek. E ténynek a következménye az, hogy a modellben a hiperbolikus szögmérés megegyezik az euklideszi szögméréssel.

Mivel a felező merőlegesekre vonatkozó tétel a hiperbolikus geometriában is érvényben marad, ezért az euklideszi esethez hasonlóan megmutatható, hogy bármely izometria legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként írható fel. Ebből viszont az következik, hogy a hiperbolikus sík izometriái megegyeznek a 7.§-ban definiált hiperbolikus transzformációkkal. Belátható a következő két tétel is

9.1. Ha  $A_1, A_2, A_3$ , ill.  $B_1, B_2, B_3$  különböző aszimptotikus pontokból álló pont-hármasok,

akkor pontosan egy  $\propto$  hiperbolikus izometria létezik, amelyre  $\propto (A_i) = B_i$  teljesül.

9.2. Két ultraparalel egyeneshez pontosan egy, ezeket merőlegesen metsző egyenes létezik ( Ez az u.n. normáltranszverzális).

A hiperbolikus izometriáknak teljes osztályozása is megadható.

Két metsző egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatát forgásnak, két párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatát pedig aszimptotikus forgásnak nevezzük. Két ultraparalel egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatánál a normáltranszverzális invariáns egyenes, ezért ezeket tengely menti párhuzamos eltolásoknak nevezzük. Ha ezek után még a tengelyre is tükrözünk, akkor ezt a 3-as szorzatot csúsztatva tükrözésnek nevezzük. Igaz a következő tétel.

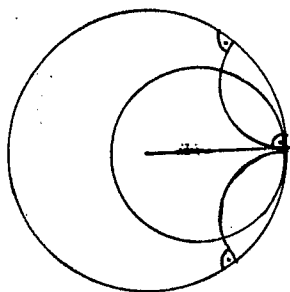
9.3. Bármely hiperbolikus izometria vagy tengelyes tükrözés vagy forgás vagy aszimptotikus forgás vagy tengelymenti párhuzamos eltolás vagy pedig csúsztatva tükrözés.

Az euklidészi esettel ellentétben az összes tengelymenti párhuzamos eltolások nem alkotnak Abel csoportot.

További különbségek kihangsúlyozásához megemlítjük, a

paraciklusok(horociklusoknak is nevezik) és az ekvidintáns

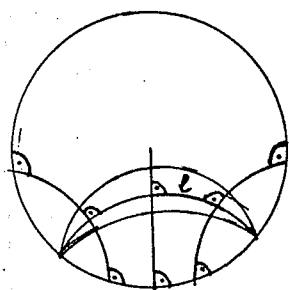
görbék fogalmát is. Tekintsünk egy közös aszimptotikus pontba befutó párhuzamos egyenessereget. Az ezeket az egyeneseket merőlegesen metsző görbéket paraciklusoknak nevezzük. Nyilvánvaló,



46. ábra

hogy a párhuzamos egyenessereg az aszimptotikus pontban érintkező parabolikus körsort határoz meg és a paraciklusok a rá merőleges parabolikus körsort határozzák meg. Ebből is látszik, hogy a paraciklusok nem egyenesek.

Tekintsünk most egy  $l$  egyenest az  $A, B$  aszimptotikus pontokkal, majd vegyük az  $l$ -re merőleges egyenessereget. Az egyenessereg minden egyenesre az  $l$  egyenestől merjünk fel konstans  $\lambda \neq 0$  hosszúságot. Így az  $l$  egyenestől  $\lambda$  távolságban egy görbét kapunk, amit ekvidintáns



47.ábra

görbének nevezünk. A merőlegesen metsző egyenessereg az  $A$  ill.  $B$  pontok körül egy nem metsző (elliptikus) körsort határoznak meg, míg az ekvidintáns görbék a rá merőleges, az

$A, B$  pontokban metsző hiperbolikus

körsort alkotják. Mivel csak az  $l$  metszi merőlegesen az alapkört, a körsor többi eleme nem, ezért az ekvidintáns görbék sem egyenesek.

Végezetül a területméréssel foglalkozunk. A hiperbolikus síkon is konstans szorzó erejéig egyértelmű területmérés létezik, amelyik pozitív, additív és a hiperbolikus transzformációkra nézve invariáns. A tétel részletes bizonyításából kiderül, hogy a hiperbolikus háromszögek belső szögeinek összege a  $\Pi$ -nél kisebb, és a terület a  $\Pi - (\alpha + \beta + \gamma)$  szögdefektus konstansszorosa.

Speciálisan a háromszorosan aszimptotikus háromszögek (mindhárom csúcs aszimptotikus pont) területe  $c \pi$ . A  $c = 1$  normálással a területmérés már egyértelmű, és kapjuk azt a furcsának tűnő tényt, hogy a hiperbolikus síkon a háromszögek területére a  $\pi$  felső korlát. Most a hiperbolikus tér modelljének ismertetésére térünk át.

Ekkor a tér pontjai az euklideszi tér egy gömbjének belső pontjai, egyenesei az alapgömböt merőlegesen metsző köröknek a gömb belsőjébe eső ívei, a síkok pedig az alapgömböt merőlegesen metsző gömböknek az alapgömb belsőjébe eső gömbsüvegei. Valamely  $x, y$  pontokra vesszük az  $O$  középpontra és az  $x, y$  pontokra fektetett síkot. Ez egy hiperbolikus síkot "metsz ki" az alapgömbből, és az  $x, y$  pontok távolságát ebben a síkban a hiperbolikus távolsággal definiáljuk. A síkra vonatkozó tükrözéseket pedig a síkok tartógömbjére vonatkozó inverzióként vezetjük be.

Igy egy olyan pont-, egyenes-, sík-rendszerhez jutunk, amelyre a párhuzamossági axióma kivételével érvényes marad az euklideszi tér összes többi axiómája. Izometriáiról belátható, hogy megegyeznek a hiperbolikus transzformációkkal, vagyis az alapgömböt belsőjével együtt invariánsan hagyó gömbtartó transzformációkkal, továbbá minden ilyen izometria legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés szorzataként állnak elő.

Az alapgömb  $O$  középpontját fixen hagyó hiperbolikus izometriákat (az. u.n. izotropia csoportot) az  $O$  pontra

fektetett euklideszi síkokra vonatkozó tükrözések generálják így ez az izotropia csoport megegyezik (izomorf) az  $O(3)$  euklideszi ortogonális csoporttal. A különböző pontokra vonatkozó izotropia csoportok egymással izomorfak, hiszen hiperbolikus izometriákkal bármely pontból bármely pontba eljuthatunk ( tranzitívok), és az ezekkel való konjugálás izotrópia csoportot izotrópia csoportba transzformálnak. Mivel a gömbfelületek geometriáját az izotrópia csoport határozza meg, így a hiperbolikus gömbfelületek ugyan olyanok ( izometrikusan ekvivalensek), mint a megfelelő sugarú, euklideszi gömbfelületek. Speciálisan kapjuk ezt a Bolyai János által is igazolt tételt, hogy a gömbháromszögtan szinusz és koszinusz tételei a hiperbolikus gömbökön megegyeznek az euklideszi gömbökre látottakkal.

A hiperbolikus izometriák teljes csoportja az előzőeknél szemléletesebben is leírhatók.

A hiperbolikus izometriák ( gömbtartó transzformációk lévén) az aszimptotikus pontok alkotta alapgömbön körtartó transzformációt indukálnak. Fordítva, az alapgömb bármely körtartó transzformációja egyértelműen hiperbolikus izometriává terjeszthető ki. Ezt a következő feladatban megfogalmazott módon igazolhatjuk.

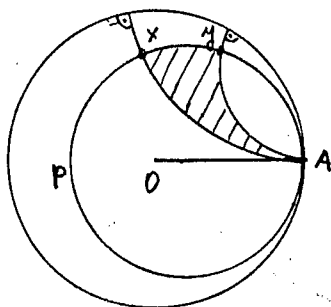
9.3. Jelöljük ki az alapgömbön egy É északi pólust és legyen  $\varphi$  az a térbeli inverzió, amelyik az alapgömb és a D déli pólusba fektetett S érintősík között a sztereografikus projekciót indukálja. Ekkor bármely

hiperbolikus izometriára a  $\varphi \propto \varphi$  olyan gömbtartó transzformáció, amelyik az  $S$  síkot feltereivel együtt invariánsan hagyja és az  $S$  síkon körtartó transzformációt indukál. Fordítva, az  $S$  sík bármely  $\gamma$  körtartó transzformációja ( hasonlóság vagy hasonlóság és inverzió szorzata lévén) a tér olyan  $\tilde{\alpha}$  gömbtartó transzformációjává terjeszthető ki, amelyik az  $S$  síkot feltereivel együtt invariánsan hagyja. Ekkor viszont az  $\alpha = \varphi \tilde{\alpha} \varphi$  hiperbolikus izometria.

A fenti tétel szerint a hiperbolikus tér izometria csoportja megegyezik ( izomorf) a határgömb  $\equiv$  inverzív sík körtartó transzformációs-csoportjával. A határgömböt Riemann féle szángömbnek tekintve ez viszont nem más mint a törtlineáris leképezések csoportja.

Végezetül a paraszférák geometriáját említjük.

Vegyünk egy közös  $A$  aszimptotikus pontba befutó párhuzamos egyenessereget. Ezt pontosan az  $OA$  egyenes és ezt az egyenest az  $A$  pontban érintő körök megfelelő ívei alkotják.



48.ábra

Az egyenessereget merőlegesen metsző felületeket paraszféráknak nevezzük. Könnyen látható, hogy egy paraszféra a modellben nem más, mint az alapgömb belsejében az alapgömböt az  $A$  pontban érintő gömb,

amihez az A pontot nem vesszük hozzá. Egy ilyen paraszférából az A pontba befutó hiperbolikus síkok paraciklusokat metszenek ki. Vegyünk ki egy  $\Sigma$  sík által kimetszett p paraciklust és annak egy  $\widehat{x, y}$  ívét. Ez az ív és az x, y végpontokból az A pontba befutó félegyenesek a  $\Sigma$  síkban egy három oldalú tartományt határolnak, amelyik véges  $T(\widehat{x, y} A)$  területtel rendelkezik.

Az is világos, hogy a  $\Sigma$  síkra vonatkozó hiperbolikus tükrözés a kiszemelt paraszférát invariánsan hagyja, így azon egy  $\Pi_p$  jellel jelölt leképezést indukál.

Mindezek után vegyük pontoknak a tekintett P paraszféra pontjait, egyeneseknek pedig a P-re illeszkedő paraciklusokat. Az x, y pontok távolságát a  $T(\widehat{x, y} A)$  területtel definiáljuk, valamint egy p egyenesre vonatkozó tükrözésként a fent definiált  $\Pi_p$  leképezést vezetjük be. Az így definiált pont-egyenes rendszerről megmutatható, hogy teljesíti az euklideszi sík axiómáit, vagyis a paraciklusok a paraszférán euklideszi geometriát alkotnak.

Bolyai János ezt a tételt is igazolta nevezetes munkájában.

9.4. Bizonyítsuk be a fenti Bolyai-féle tételt.

9.5. A ( véges ) háromszög három csúcsa rajta van azon a három ekvidisztáns görbén, amelyek tengelyei az oldalfelezőpontokat összekötő egyenesek, és egy negyedik " cikluson" amely kör, horociklus vagy ekvidisztáns görbe lehet ( úgy, hogy mind a három csúcs egy ágon van).

/Sommerville 1.54.189.old./ (c.304.o.)

9.6. A ( véges ) háromszög mindhárom oldala érint egy kört ( beírt kört ) és három másik "ciklust" amelyek mindegyike vagy kör, vagy horociklus, vagy ekvidisztáns görbe. ( c.304.o.)

9.7. Egy ekvidisztáns görbének egy körrel, horociklussal vagy egy másik ekvidisztáns görbével legfeljebb négy metszéspontja lehet. (c.304.o.).

9.8. Fejtsük ki részletesen, milyen analógia van az affin sík általánosított körei között. (c.304.o.)

9.9. A hiperbola képzetes tengelyével ellentétben az ekvidisztáns görbe tengelye mindkét ág konkáv oldalán van. ( c. 304.o.)

9.10. A területekre vonatkozó Gauss-formula érvényes marad akkor is, ha a háromszögeknek egy vagy több szöge nulla. Mi a sokszögek területképlete? ( c.302.o.)

9.11. Minden egyszerű p-szög területe egyenlő szögdefektusával: azzal az értékkel, amellyel szögeinek összege kisebb az euklideszi síkbeli p-szög szögösszegénél. (Útmutatás: Bontsuk fel a sokszögeket háromszögekre. Nyilván itt is feltesszük, hogy  $C=1$ .) A 16.4a ábrán az ABM területe megegyezik az  $ABGF_1A_1$  területével. ( c. 302.o.)

9.12. Egy háromszög három irányított oldala mentén (az oldalak hosszával) végzett három eltolás szorzata egyenlő a háromszög szögdefektusával megegyező nagyságú szöggel végrehajtott forgással. ( Ezek az eltolások feleakkorák, mint a 15.31. Donkin-tételben előforduló eltolások ). /Lamb. 1,7.old./ (c.302.o.)

9.13. Egy egyszerű négyszög oldalfelező pontjai körüli félfordulatok szorzata ( az oldalak természetes sorrendjében) egyenlő a négyszög szögdefektusával végzett forgatással. (c.302.o.)

9.14. Ha bármely olyan sokszögre, amelynek szögösszege  $2\pi/k$  ( ahol  $k$  egész szám) az oldalfelezőpontjai körüli félfordulatokat és azok szorzatait alkalmazzuk, akkor a, így adódó, sokszögekkel a teljes sík átfedések és hézagok nélkül lefedhető ( vö. Sommerville 1,86.old.15. feladat). (c.302.o.)

9.15. Ha az ABED négyszögben D-nél és E-nél derékszög van, továbbá  $AD=BE$ , akkor az A-nál és a B-nél levő szögek egyenlő hegyesszögek. (Útmutatás: Húzzuk meg a D/E-vel párhuzamos AM és BM félegyeneseket; az ABM aszimptotikus háromszögre alkalmazzuk a 16.31. tételt). (c.297.o.)

9.16. Bármely háromszög szögeinek összege kisebb, mint két derékszög. (Útmutatás: Ha adott az ABC háromszög, akkor húzzuk meg a BC és a CA felezőpontjait összekötő egyenesre merőleges AD, BE és CF egyeneseket). (c.297.o.)

9.17. Adott egy ABM aszimptotikus háromszög, amelynek mind A-nál, mind B-nél levő szöge hegyesszög. Húzzuk meg a BM-re merőleges AD és az AM-re merőleges BE egyeneseket. Jelöljük ezek metszéspontját H-val. Húzzuk meg az AB-re merőleges HF egyenest. Ekkor FH párhuzamos AM-nel /Bonola 1.106.old/. Mi történik akkor, ha hasonlóképpen járunk el olyan A-n és B-n átmenő félegyenésekkel, amelyek nem párhuzamosak, hanem ultraparalel egyenesek? (c.297.o.)

9.18. Milyen mozgás kapcsol össze két olyan háromszorosan aszimptotikus háromszöget, amelynek van egy közös oldala: (Nyilvánvaló, hogy két háromszorosan aszimptotikus háromszögnek lehet közös oldala anélkül, hogy közös magasságuk lenne). (c.297.o.)

9.19. A háromszorosan aszimptotikus háromszög beírt körének sugara a  $60^\circ$ -os párhuzamosági szöghöz tartozó távolság. (c.297.o.)

9.20. Egy háromszorosan aszimptotikus háromszög egyik oldalának bármely pontjából a másik két oldalhoz húzott merőleges egyenesek egymásra is merőlegesek /Bachmann 1.222.old/. (c.297.o.)

## I R O D A L O M J E G Y Z É K

- [C.] H.S.M. Coxeter, A geometriák alapjai, Műszaki  
Könyvkiadó, Budapest. 1973.
- [Gy.R.] Gyapjas Ferenc, Reiman István, Elemi Matematikai  
feladatgyűjtemény, Tankönyvkiadó  
Budapest, 1980.
- [E.S.] Erdős Pál, Surányi János, Válogatott fejezetek a  
számelméletből, Tankönyvkiadó  
Vállalat, Budapest. 1960.
- [K.] Kincses János, Szóbeli közlés
- [M.] Molnár Emil, Elemi Matematika II., Tankönyvkiad  
Budapest, 1968.
- [R.] Reiman István, Vektorok a geometriában, Tankönyv-  
kiadó, Budapest 1971.
- [St.] Strohmajer János, Geometriai példatár I, III.,  
Tankönyvkiadó, Budapest.
- [V.] Vigassy Lajos, Egybevágósági transzformációk a  
síkban és a térben, Tankönyvkiadó,  
Budapest, 1979.
- [Sz.] Szabó Zoltán, Bevezető fejezetek a geometriába,  
egyetemi jegyzet, JATE