

GÖRBÉK FELETTI 2 RANGÚ PARABOLIKUS NYALÁBOK ÉS LOGARITMIKUS KONNEXIÓK GEOMETRIÁJA

Szabó Szilárd

MTA Rényi Intézet és Budapesti Műszaki Egyetem

Kerékjártó Szeminárium
Szeged, 2013 március 28

HOLOMORF VEKTORNYALÁBOK

Legyen C egy g nemű projektív görbe $\mathbf{C}$ felett és rögzítsünk egy E sima r rangú, 0 fokú vektornyalábot C -n. Egy **holomorf struktúra** E -n egy olyan

$$\bar{\partial}^E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes \Omega_C^{0,1})$$

leképezés, amely teljesíti a

$$\bar{\partial}^E(f\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\sigma \otimes d\bar{z} + f\bar{\partial}^E(\sigma)$$

azonosságot ($f : E \rightarrow \mathbf{C}, \sigma \in \Gamma(E)$).

RIEMANN–HILBERT MEGFELELÉS

Létezik egy bijekció a következő halmazok között:

- ▶ $\rho : \pi_1(C, x_0) \rightarrow U(r)$ homomorfizmusok, globális konjugálás erejéig;
- ▶ ∇ unitér lapos konnexiók egy C feletti r rangú, 0 fokú vektornyalábon, izomorfizmus erejéig.

A leképezést a megoldások analitikus folytatása határozza meg.

KÉRDÉS

Mely $(E, \bar{\partial}^E)$ holomorf nyalábhoz létezik olyan $\rho : \pi_1(C) \rightarrow U(r)$ ábrázolás, amelyre $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}^E$?

STABILITÁS

Innentől feltesszük hogy $E = (E, \bar{\partial}^E)$ egy holomorf vektornyaláb.

DEFINÍCIÓ

E *stabil* ha minden $F \subset E$ valódi (holomorf) résznyalábra teljesül

$$\frac{\deg(F)}{\text{rank}(F)} < \frac{\deg(E)}{\text{rank}(E)}.$$

MEGJEGYZÉS

Mivel $\deg(E) = 0$, ezért a feltétel $\deg(F) < 0$.

NARASIMHAN–SESHADRI TÉTEL

TÉTEL (NARASIMHAN–SESHADRI 1965)

Az $(E, \bar{\partial}^E)$ holomorf vektornyalábhoz akkor és csak akkor létezik olyan $\rho : \pi_1(C, x_0) \rightarrow U(r)$ irreducibilis ábrázolás amelyre $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}^E$, ha E stabil.

KVÁZI-PROJEKTÍV GÖRBE FUNDAMENTÁLIS CSOPORTJA

Rögzítsünk $t_0, \dots, t_n \in C \setminus \{x_0\}$ páronként különböző pontokat és minden $j \in \{0, \dots, n\}$ -re egy γ_j x_0 alappontú hurkot C -ben, amely homotóp $C \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$ -ban egy t_j -t tartalmazó kis holomorf lemez peremét egyszer pozitív irányban körüljáró hurokkal.

PARABOLIKUS NYALÁBOK

Innentől feltesszük, hogy $r = 2$.

DEFINÍCIÓ

Egy 2-rangú **kvázi-parabolikus** vektornyaláb C -n, $\{t_0, \dots, t_n\}$ parabolikus pontokkal egy $(E, \bar{\partial}^E)$ 2-rangú holomorf vektornyaláb C -n és minden $j \in \{0, \dots, n\}$ -re egy $\mu^j \subset E_{t_j}$ egyenes. Egy 2-rangú **parabolikus** vektornyaláb C -n egy 2-rangú kvázi-parabolikus vektornyaláb C -n és minden $j \in \{0, \dots, n\}$ -re egy $0 \leq \alpha_-^j < \alpha_+^j < 1$ választás (**parabolikus súlyok**). Egy $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu^j\}_j, \{\alpha_\pm^j\}_j)$ parabolikus nyaláb **parabolikus foka**

$$\deg_{\text{par}}(E) = \deg(E) + \sum_{j=0}^n (\alpha_-^j + \alpha_+^j).$$

PARABOLIKUS STABILITÁS

Legyen $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu^j\}_j, \{\alpha^j_{\pm}\}_j)$ egy 2 rangú parabolikus vektornyaláb C -n és $F \subset E$ egy rész-vonalnyalábja. Legyen

$$\beta^j(F) = \alpha^j_+$$

ha $F_{t_j} = \mu^j$ és

$$\beta^j(F) = \alpha^j_-$$

ha $F_{t_j} \neq \mu^j$. Legyen $\deg_{\text{par}}(F) = \deg(F) + \sum_{j=0}^n \beta^j(F)$.

DEFINÍCIÓ

$(E, \bar{\partial}^E, \{\mu^j\}_j, \{\alpha^j_{\pm}\}_j)$ *parabolikusan stabil* ha minden $F \subset E$ rész-vonalnyalábra

$$\frac{\deg_{\text{par}}(F)}{\text{rank}(F)} < \frac{\deg_{\text{par}}(E)}{\text{rank}(E)}.$$

A PARABOLIKUS NYALÁBOK MODULUSTERE

Rögzítsük C -t, $t_0, \dots, t_n$ -et, $\{\alpha_{\pm}^j\}_j$ -at.

TÉTEL (MEHTA–SESHADRI 1980)

- ▶ Az $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu\}_j, \{\alpha_{\pm}^j\}_j)$ 0 parabolikus fokú 2 rangú parabolikus vektornyalábhoz akkor és csak akkor létezik olyan $\rho : \pi_1(C \setminus \{t_0, \dots, t_n\}, x_0) \rightarrow \mathrm{U}(2)$ irreducibilis ábrázolás amelyre $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}^E$ és $\rho([\gamma_j])$ sajátértékei $\exp(2i\pi\alpha_{\pm}^j)$, ha parabolikusan stabil.
- ▶ Létezik egy $N = 1 + r^2(g - 1) + (n + 1)r(r - 1)/2$ -dimenziós kvázi-projektív

$$\mathcal{P}^s = \mathcal{P}^s(C, \{t_0, \dots, t_n\}, \{\alpha_{\pm}^j\}_j)$$

varietás, amely modulustere a C feletti $t_0, \dots, t_n$ -ban parabolikus stabil nyaláboknak.

LOGARITMIKUS KONNEXIÓ

DEFINÍCIÓ

Egy $(E, \bar{\partial}^E)$ 2-rangú holomorf vektornyaláb feletti **logaritmikus konnexió** $t_0, \dots, t_n$ szinguláris pontokkal egy olyan

$$\nabla : E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_C} K_C(t_0 + \dots + t_n)$$

leképezés, amely teljesíti a Leibniz-szabályt:

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla(\sigma)$$

(minden f holomorf függvényre és σ holomorf szelésre), és amelynek A_j konnexió-mátrixa t_j körül minden j -re E valamely holomorf trivializációjában egy $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{C})$ -értékű meromorf függvény egyszerű pólussal.

KOMPATIBILITÁS

Legyen most $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu\}_j)$ egy 2 rangú kvázi-parabolikus nyaláb C felett és ∇ egy logaritmikus konnexió E -n.

Minden $j \in \{0, \dots, n\}$ -re válasszunk egy z_j holomorf koordinátát t_j körül amelyre $z_j(t_j) = 0$. Ekkor $\text{res}_{z_j=0}(A_j)$ egy jól-értelmezett endomorfizmusa $E|_{t_j}$ -nek.

DEFINÍCIÓ

∇ *kompatibilis* a parabolikus struktúrával, ha minden j -re $\text{res}_{z_j=0}(A_j)$ megtartja μ^j -t.

STABILITÁS

Legyen $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu\}_j, \{\alpha_{\pm}^j\}_j)$ egy 2 rangú parabolikus nyaláb C felett és ∇ egy kompatibilis logaritmikus konnexió E -n.

DEFINÍCIÓ

$(E, \bar{\partial}^E, \{\mu\}_j, \{\alpha_{\pm}^j\}_j, \nabla)$ *parabolikusan stabil* ha minden olyan $F \subset E$ rész-vonalnyalábra amelyre

$$\nabla|_F : F \rightarrow F \otimes_{\mathcal{O}_C} K_C(t_0 + \cdots + t_n),$$

teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{\deg_{\text{par}}(F)}{\text{rank}(F)} < \frac{\deg_{\text{par}}(E)}{\text{rank}(E)}.$$

STABIL LOGARITMIKUS KONNEXIÓK MODULUSTERE

Rögzítsünk minden $j \in \{0, \dots, n\}$ -re $\lambda_+^j, \lambda_-^j \in \mathbf{C}$ értékeket.

TÉTEL (BIQUARD–BOALCH 2004,
INABA–IVASZAKI–SZAITO 2006)

Létezik egy kvázi-projektív

$$\mathcal{M}^s = \mathcal{M}^s(C, \{t_0, \dots, t_n\}, \{\alpha_{\pm}^j\}_j, \{\lambda_{\pm}^j\}_j)$$

varietás, amely modulustere a C feletti $t_0, \dots, t_n$ -ban parabolikusan stabil logaritmikus konnexióknak, amelyekre $\text{res}_{t_j}(\nabla)$ sajátértékei μ -n (illetve $E|_{t_j/\mu}$ -n) λ_+^j (illetve λ_-^j).

FELEJTŐ-LEKÉPEZÉS

Ha $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu^j\}_j, \{\alpha^j_{\pm}\}_j)$ parabolikusan stabil és ∇ egy kompatibilis logaritmikus konnexió E -n, akkor $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu^j\}_j, \{\alpha^j_{\pm}\}_j, \nabla)$ is parabolikusan stabil.

Legyen $\mathcal{M}_0^s \subseteq \mathcal{M}^s$ a parabolikusan stabil $(E, \bar{\partial}^E, \{\mu^j\}_j, \{\alpha^j_{\pm}\}_j)$ nyalábokon értelmezett logaritmikus konnexiók halmaza. Ekkor nyerünk egy

$$Q : \mathcal{M}_0^s \rightarrow \mathcal{P}^s$$

felejtő-leképezést.

KANONIKUS FILTRÁLÁS

Legyen $\deg(E) = 2g - 1$, tegyük fel hogy $2g - 2 + n \geq 0$, $n > 0$.
Jelöljük $L = K_C(t_0 + \dots + t_n)$. A Riemann-Roch tétel miatt $\dim H^0(C, E) > 0$; válasszunk egy $\sigma \in H^0(C, E)$ szelést.

TÉTEL (SZAITO-SZ.)

Létezik egy egyértelmű

$$0 = F^r \subset F^{r-1} \subset \dots \subset F^1 \subset F^0 \subset E$$

filtrálás vektornyalábokkal, amelyre $F^{r-1} = \text{Im}(\sigma)$ és amelyre minden $0 < k < r$ -re

$$\text{Gr}(\nabla) : F^k / F^{k+1} \rightarrow F^{k-1} / F^k \otimes L$$

izomorfizmus.

LÁTSZÓLAGOS SZINGULARITÁSOK

Továbbá,

$$F = F^0 \cong \bigoplus_{j=0}^{r-1} L^{-j}.$$

Legyen $T_{(E,\nabla,\sigma)} = \text{coker}(F \rightarrow E)$, azaz

$$0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow T_{(E,\nabla,\sigma)} \rightarrow 0.$$

Ekkor $T_{(E,\nabla,\sigma)}$ egy $N = 1 + r^2(g-1) + (n+1)r(r-1)/2$ hosszú torzió-kéve.

Definiáljuk a

$$\begin{aligned} q : \mathcal{M}_0^s &\rightarrow S^N(C) \\ (E, \nabla) &\mapsto \text{supp}(T_{(E,\nabla,\sigma)}) \end{aligned}$$

biracionális morfizmust.

FIBRUMOK VISZONYA

TÉTEL (Sz. 2012)

$q^{-1}(t_j)$ fibruma Q -nak.

MEGJEGYZÉS

N. Katz kérdése 1996.

TÉTEL (LORAY–SZAITO–SIMPSON)

Ha $C = \mathbf{P}^1$ és $n = 3$ akkor q és Q általános fibrumai 1 pontban metszik egymást.

KONNEXIÓ-MÁTRIX F -EN

Legyen $C = \mathbf{P}^1$, $t_0 = \infty$, $r = 2$. Ekkor $N = n - 2$ és

$$q(E, \nabla) = \{q_1, \dots, q_{n-2}\} \in S^{n-2} \mathbf{P}^1.$$

Tegyük fel, hogy $q_j \neq q_k$ ha $j \neq k$. Legyen

$$\omega = \frac{dz}{\prod_{j=1}^n (z - t_j)}$$

Ekkor F egy alkalmas f_1, f_2 trivializációjában

$$\nabla = d + \begin{pmatrix} 0 & H \\ 1 & G \end{pmatrix} \omega$$

valamely G, H racionális függvényekre.

PARABOLIKUS STRUKTÚRA F -EN

Többek között, t_j -ben ∇ reziduuma F -en:

$$\begin{pmatrix} 0 & H(t_j) \\ 1 & G(t_j) \end{pmatrix} \operatorname{res}_{z=t_j}(\omega)$$

kísérőmátrix, tehát sajátirányai csak a sajátértékeiktől függenek.
A kompatibilitás miatt ekkor rögzített $\lambda_{\pm}^j$ esetén a kvázi-parabolikus struktúra F -en független ∇ -tól.

ELEMI TRANSZFORMÁCIÓK

Továbbá, G, H -nak $\{t_0, \dots, t_n\}$ -en kívül csak egyszerű pólusai vannak $\{q_1, \dots, q_{n-2}\}$ -ban és minden $k \in \{1, \dots, n-2\}$ -re létezik egy egyértelmű olyan $p_k \in \mathbf{C}$, amelyre q_k körül

$$e_{2,k} = \frac{f_2 + p_k f_1}{z - q_k} \in E.$$

Legyen $P \in \mathbf{C}[z]/(z^{n-1})$ az az 1 főegyütthatójú polinom, amelyre minden $k \in \{1, \dots, n-2\}$ -re

$$P(q_k) = p_k$$

és

$$e_2 = \frac{f_2 + P(z)f_1}{z - q_k}.$$

FLIPEK

Legyen $n = 3$, ekkor $N = 1$, $q_1 = q$, $p_1 = p$, $P = p$. Az $(f_1, f_2) \rightsquigarrow (e_1 = f_1, e_2)$ áttérési mátrix

$$Elm_{q,p} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p}{z-q} \\ 0 & \frac{1}{z-q} \end{pmatrix}.$$

Tehát adott $(E_1, \nabla_1), (E_2, \nabla_2)$ esetén $((q_1, p_1), (q_2, p_2))$ paraméterekkel az $E_1 \rightsquigarrow E_2$ áttérési mátrix

$$Elm_{q_2,p_2} \circ Elm_{q_1,p_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{p_2-p_1}{z-q_1} \\ 0 & \frac{z-q_2}{z-q_1} \end{pmatrix}.$$

Rögzítsük (E_1, ∇_1) -et és q_2 -t.

Cél: belátni, hogy létezik pontosan egy $p_2 \in \mathbf{C}$ amelyre

$Elm_{q_2,p_2} \circ Elm_{q_1,p_1}^{-1}$ parabolikus izomorfizmus.

NYALÁB-IZOMORFIZMUSOK

Mivel $E_1 \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \cong E_2$ azért

$$\mathcal{H}om(E_1, E_2) \cong \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O}(-1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Legyen

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b + cz & 1 \end{pmatrix} \in H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{H}om(E_1, E_2))$$

tetszőleges.

FLIPEK ÉS NYALÁB-IZOMORFIZMUSOK

Cél: belátni, hogy létezik pontosan egy $(p_2, a, b, c) \in \mathbf{C}^4$ amelyre

$$g^{-1} \circ Elm_{q_2, p_2} \circ Elm_{q_1, p_1}^{-1}$$

triviálisan hat a kvázi-parabolikus struktúrán $\rightsquigarrow$ lineáris egyenletrendszer, egyértelmű megoldással. QED.

π_1

