

Többszörös fedések zárt sokszögekkel

Kovács István

Tóth Géza

2013. március 14.

Definíciók

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ síkbeli halmazokból álló halmazrendszer, és legyen A egy síkbeli halmaz, $k \geq 0$. $\mathcal{H}$ az A halmazt *k-szorosan fedi*, ha A minden pontját legalább k darab $\mathcal{H}$ -hoz tartozó halmaz tartalmazza.

Definíció

Egy síkbeli S halmazt *fedés-felbonthatónak* hívunk, ha létezik olyan $k = k(S)$ pozitív egész szám, hogy a sík tetszőleges k -szoros fedése S eltoltjaival felbomlik két fedésre. ($A = \mathbb{R}^2$)

Egyszerűbb példák

Egyáltalán van értelme a kérdésnek? (egyszerűbb példák: körök, félsíkok, konkáv alakzatok)

Állítás

A sík véges sok félsíkkal való legalább 4-szeres fedése felbontható két részre.

Bizonyítás.

Ha van 3 félsík ami együtt fed, készen vagyunk.

Ha nem, a komplementereikre alkalmazható a Helly tétel, ami ellentmondáshoz vezet.



Körök: sokkal mélyebb probléma, publikált eredmények nélkül

Magasabb dimenziók: általában nem a válasz

Konkáv négyszögek nem (!) fedés-felbonthatóak (Biz. később)

Gyakorlati alkalmazások – szenzorrendszerek

Adottak egy szobában szenzorok, minden szenzor egy kör alakú területet tud megfigyelni, de legfeljebb egy órát működik (pl. kifogy benne az elem).

Kérdés: Hány órán keresztül figyelhető meg a teljes szoba a szenzorok által? Mi a szenzorrendszer legjobb ütemezése?

Megoldás: A szenzorok által megadott fedés felbontása több részre.

Gyakorlati alkalmazás motiválja a korlátok csökkentését, algoritmusok vizsgálatát.

Eddigi eredmények

Sejtés (Pach János, 1980)

Minden korláatos konvex halmaz fedés-felbontható.

Tétel

(a) (Pach, 1986) *Minden nyílt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög fedés-felbontható.*

(b) (Mani, Pach, 1987) *A nyílt egységkör fedés-felbontható.*

(c) (Tardos, Tóth, 2007) *Minden nyílt háromszög fedés-felbontható.*

(d) (Pálvölgyi, Tóth, 2010) *Minden nyílt, konvex sokszög fedés-felbontható.*

Ellenpéldák

Fontos a konvexitás?

Tétel (Pach, Tardos, Tóth, 2007)

Konkáv négyszögek nem fedés-felbonthatóak.

Sőt, konkáv sokszögek egy tág osztályáról megmutatták, hogy nem fedés-felbonthatóak (Pálvölgyi, 2010).

Három dimenzióban is sok az ellenpélda. (Poliéderek, gömb)
Nem csak eltoltak esetén szintén sok ellenpélda (pl.
tengelypárhuzamos téglalapok)

További problémák

Mi a helyzet zárt sokszögekkel? Eddigi eredmények miért csak nyíltakra igazak?

Miért nem jó a valószínűségi módszer?

Mik lehetnek a valódi korlátok?

Végtelenszeres fedések: abszolútság vagy leíró halmazelmélet?
(Akár függetlenségi kérdések is előjöhetnek.)

Saját eredmények

Pach tételének általánosítása zárt esetekben:

Tétel

Minden zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög fedés-felbontható.

Hasonló eredmények végtelenszeres fedésekre:

Tétel

A sík minden zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög eltoltjaival való végtelenszeres fedése felbontható két végtelenszeres fedésre.

Sőt, erősebb esetekben is igazak! Ehhez további definíciók szükségesek.

Felbonthatóság változatai

Definíció

Egy S síkbeli halmaz

{véges, lokálisan véges, megszámlálható, illetve tetszőleges}

{sík- illetve totális- }

fedés-felbontható, ha létezik olyan k , hogy a

{sík, illetve tetszőleges halmaz}

{véges, lokálisan véges, megszámlálható, illetve tetszőleges}

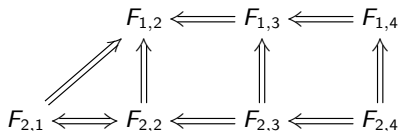
k -szoros fedése felbontható két fedésre.

Illetve fontos, hogy a fedő halmazok nyíltak, vagy zártak.

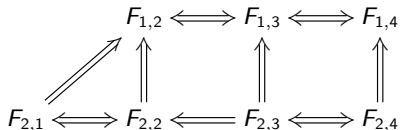
	véges	lokálisan véges	megszámlálható	tetszőleges
a sík	$F_{1,1}$	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$
tetszőleges halmaz	$F_{2,1}$	$F_{2,2}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$

Felbonthatóság változatai - összefüggések

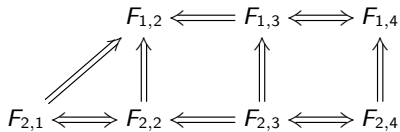
Általánosan:



Nyílt halmaz eltoltjai esetén:



„Szép”, zárt halmaz eltoltjai esetén:



Általános eset: nagyon keveset tudunk, a bizonyítások erősen használják a végességet

Nyílt halmazok: általános topológiai megfontolások (csak a teljes sík fedésekor)

Zárt halmazok: topológiai megfontolások (kevesebbet tudunk)

„Szép” zárt halmazok: Pálvölgyi fogalma, zárt halmazok tágabb osztályára igaz (pl. konvex zárt halmazok)

A mi bizonyításunk általánosan működik

Felbonthatóság változatai - eredmények

Középpontosan szimmetrikus, nyílt, konvex sokszögek esetén:

	véges	lokálisan véges	megszámlálható	tetszőleges
a sík	—	[P86]	[P86]	[P86]
tetszőleges halmaz	[P86]	[P86]	[KT]	[KT]

Középpontosan szimmetrikus, zárt, konvex sokszögek esetén:

	véges	lokálisan véges	megszámlálható	tetszőleges
a sík	—	[P86]	[KT]	[KT]
tetszőleges halmaz	[P86]	[P86]	[KT]	[KT]

Fedések felbontása több részre

Mi a helyzet ha nem csak két fedésre szeretnénk felbontani a fedést? Ez is működik!

Tétel

Minden nyílt vagy zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex S sokszöghöz és $n > 0$ -hoz létezik egy $k(n)$ konstans a következő tulajdonsággal. Ha a sík tetszőleges H részhalmazát lefedjük S eltoltjaival legalább $k(n)$ -szeresen, akkor a fedés felbontható n darab fedésre.

A végtelen esetben is tetszőleges halmaz fedését is tekinthetjük:

Tétel

Egy tetszőleges síkbeli halmaz, nyílt vagy zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög eltoltjaival való végtelenszeres fedése felbontható két végtelenszeres fedésre.

Nyitott kérdések

Lehet-e különbség, ha a síknak csak egy részhalmazát fedjük?
(Nem korlátos alakzatokkal igen.)

Sejtés

Korlátos alakzat akkor és csak akkor sík-fedés-felbonthaó ($F_{1,4}$), ha totális-fedés-felbontható ($F_{2,4}$).

Kimondhatjuk Pach sejtésének végtelen általánosítását is:

Sejtés

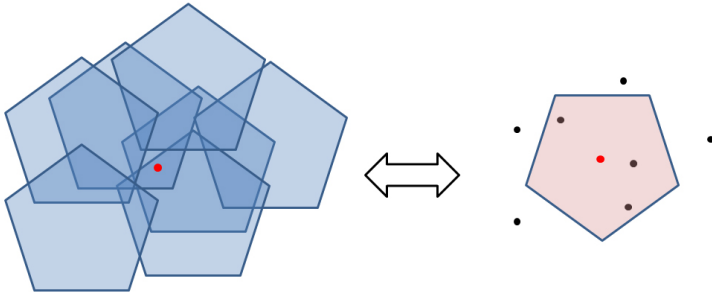
A sík egy korlátos konvex halmaz eltoltjaival való végtelenszeres fedése felbontható két végtelenszeres fedésre.

Dualizálás

Eltoltak $\leftrightarrow$ pontok

Legalább k -fedés $\leftrightarrow$ legalább k pont a sokszögben

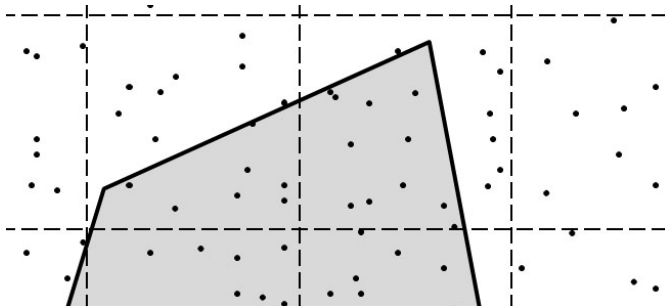
Felbontás $\leftrightarrow$ pontok kétszínezése



A bizonyítás fő ötletei

Osszuk fel a síkot kisebb négyzetekre! Egy négyzetbe a sokszög csak ékszerűen metszhet bele.

Térjünk át a sokszögről ékekre, így csak véges sok lehetőséggel kell foglalkoznunk.

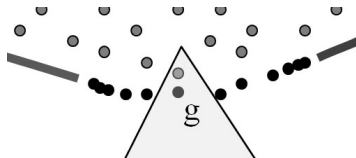


A bizonyítás fő ötletei

Megkülönböztetünk határpontokat, és belső pontokat. Ötletek a színezésre:

- ▶ Határpontokat színezzük felváltva
- ▶ A belső és határpontok legyenek különböző színűek

Mindkét színezés javításra szorul, a kettő ötvözése adja a jó színezést. **Megoldás:** gazdag határpontok

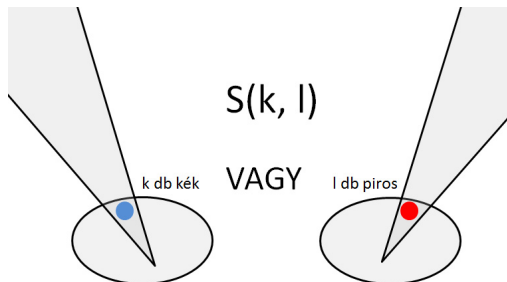


Egy ellenpélda

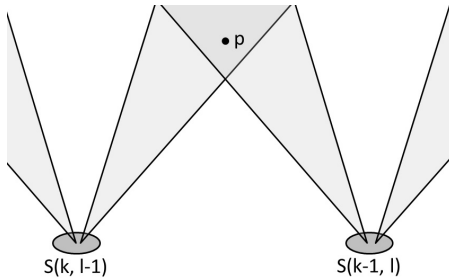
Tétel

Konkáv négyszögek nem fedés-felbonthatóak

Bizonyítás kettős indukcióval, konkáv sokszögek tágabb osztályára is alkalmazható.



Egy ellenpélda



A bizonyítás fő ötletei

Mi a probléma a végtelen esetekkel?

- ▶ Dualizálás – OK
- ▶ Ékekre áttérés – OK
- ▶ Új probléma: torlódási pontok
- ▶ Lesznek határpontok?
- ▶ Van értelme szomszédságról beszélni?
- ▶ Fantom határpontok

Megoldások:

- ▶ A határ részletesebb vizsgálata, finomabb felosztása
- ▶ Belső pontok színezése
- ▶ Több határréteg (akár végtelen sok)

Összefoglalás

A dolgozatban megoldott problémák:

- ▶ Pach tételének általánosítása zárt alakzatokra
- ▶ Nyílt esetben is erősebb állítások
- ▶ Végtelenszeres fedések felbontása végtelen fedésekre
- ▶ Felbonthatóság változatainak összefoglalása, a köztük lévő összefüggések vizsgálata

További kérdések:

- ▶ További általánosítás, nem csak szimmetrikus sokszögekre
- ▶ Újabb összefüggések a felbonthatóság változatai között
- ▶ Végtelenszeres fedések további vizsgálata

Köszönöm a figyelmet!