

Pont-kör konfigurációk

BSc Szakdolgozat

Írta:

Varga Ákos

matematika BSc szakos
hallgató

Témavezető:

Dr. Gévay Gábor

egyetemi docens

Definíció

Illeszkedési struktúrának nevezzük a $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ hármast, ahol $\mathcal{P}$ és $\mathcal{C}$ két diszjunkt, nemüres halmaz, és $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{C}$ **illeszkedési reláció**. $\mathcal{P}$ és $\mathcal{C}$ az illeszkedési struktúra **alaphalmazai**.

Definíció

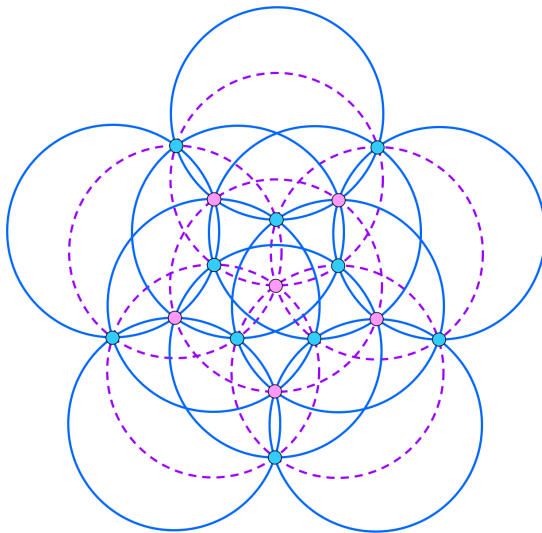
A $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ és $(\mathcal{P}', \mathcal{C}', \mathcal{I}')$ illeszkedési struktúrák **izomorfak**, ha léteznek olyan $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, $p \rightarrow p'$, és $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $c \rightarrow c'$ bijekciók, hogy $(p, c) \in \mathcal{I}$ pontosan akkor, ha $(p', c') \in \mathcal{I}'$.

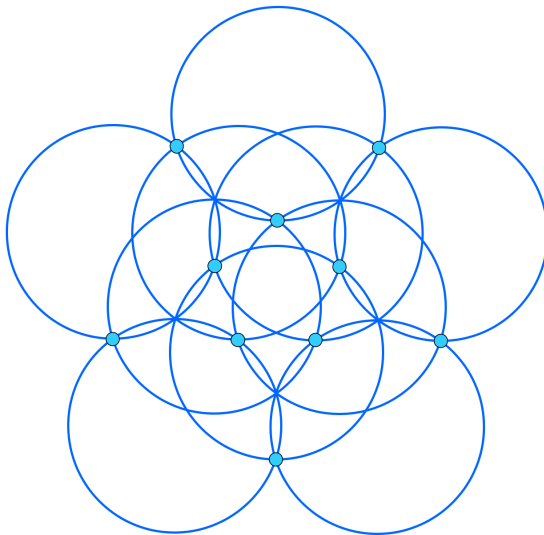
Definíció

Az (n_k) **pont-kör konfiguráció** olyan $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ illeszkedési struktúra, ahol $|\mathcal{P}| = |\{\text{pontok}\}| = n$, $|\mathcal{C}| = |\{\text{körök}\}| = n$, és $\mathcal{I}$ elemei az illeszkedő pont-kör párok, ahol minden pont k számú körrel, és minden kör k számú ponttal illeszkedik. Ekkor azt mondjuk, hogy a pontok és körök **incidenciaszáma** k .

Definíció

Legyen $(n_k) = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$, és $(m_l) = (\mathcal{P}', \mathcal{C}', \mathcal{I}')$. Az (m_l) pont-kör konfiguráció **részkonfigurációja** az (n_k) pont-kör konfigurációnak, ha $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, és $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$.





Definíció

Az (n_k) pont-kör konfiguráció **izometrikus**, ha minden köre egyenlő sugarú.

Megjegyzés

Az előző példában szereplő (16_5) pont-kör konfiguráció – és ebből adódóan részkonfigurációja is – izometrikus.

Clifford-tétellánc (H. S. M. Coxeter)

- 1 Legyen $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ három egyenes, jelölje $\mathcal{P}_{ij}$ az $\mathcal{L}_i$ és $\mathcal{L}_j$ egyenesek metszéspontját, ekkor a $\mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{23}, \mathcal{P}_{13}$ pontok mind rajta vannak egy $\mathcal{C}_{123}$ -mal jelölt körön.
- 2 Legyen $\mathcal{L}_4$ egy negyedik egyenes. Ekkor a $\mathcal{C}_{123}, \mathcal{C}_{234}, \mathcal{C}_{134}, \mathcal{C}_{124}$ körök átmennek egy közös ponton, melyet $\mathcal{P}_{1234}$ -gyel jelölünk.
- 3 Legyen $\mathcal{L}_5$ egy ötödik egyenes. Ekkor a $\mathcal{P}_{1234}, \mathcal{P}_{2345}, \mathcal{P}_{1345}, \mathcal{P}_{1245}, \mathcal{P}_{1235}$ pontok mind rajta vannak egy $\mathcal{C}_{12345}$ -tel jelölt körön.
- 4 Legyen $\mathcal{L}_6$ egy hatodik egyenes. Ekkor a $\mathcal{C}_{12345}, \mathcal{C}_{23456}, \mathcal{C}_{13456}, \mathcal{C}_{12456}, \mathcal{C}_{12356}, \mathcal{C}_{12346}$ körök átmennek egy közös ponton, melyet $\mathcal{P}_{123456}$ -tal jelölünk.

És így tovább . . .

Megjegyzés

Páros sok egyenes pontot, páratlan sok egyenes pedig kört határoz meg az egyes tételek szerint. Konkrétan, ha adottak az $\mathcal{L}_{i_1}, \mathcal{L}_{i_2}, \dots, \mathcal{L}_{i_{2k}}$ egyenesek, akkor az általuk meghatározott pontot $\mathcal{P}_{i_1 i_2 \dots i_{2k}}$ jelöli, az $\mathcal{L}_{i_1}, \mathcal{L}_{i_2}, \dots, \mathcal{L}_{i_{2m+1}}$ egyenesek által meghatározott kört pedig $\mathcal{C}_{i_1 i_2 \dots i_{2m+1}}$.

Definíció

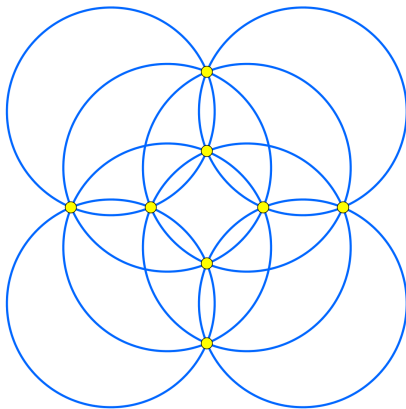
Az egyes tételek során előálló $\mathcal{P}_{i_1 i_2 \dots i_{2k}}$ pontokat, és $\mathcal{C}_{i_1 i_2 \dots i_{2m+1}}$ köröket **$2k$ -ad rendű Clifford-pontoknak**, illetve **$(2m + 1)$ -ed rendű Clifford-köröknek** nevezzük.

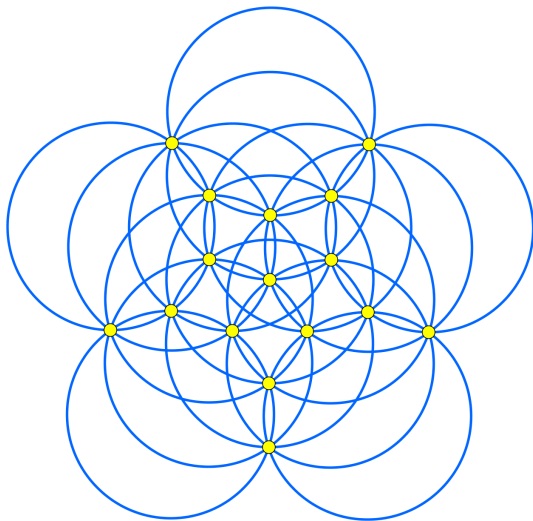
Clifford-féle (2_n^{n-1}) pont-kör konfigurációk előállítása

- 1 Előállítjuk a Clifford-tétellánc segítségével az n alapegyenes által meghatározott Clifford-pontokat és Clifford-köröket.
- 2 Felveszünk egy O középpontú K kört úgy, hogy a középpont ne essen alapegyenesre, Clifford-pontra, vagy Clifford-körre.
- 3 Invertáljuk K -ra az összes alapegyenest, Clifford-pontot és Clifford-kört.
- 4 A Clifford-pontok inverzei pontok, Clifford-körök inverzei körök, az alapegyenesek inverzei szintén körök lesznek. Az inverzió illeszkedéstartó tulajdonsága miatt az alapegyenesek, Clifford-pontok, illetve Clifford-körök közti illeszkedési relációk az inverz alakzatokra is átöröklődnek, **Clifford-féle (2_n^{n-1}) pont-kör konfigurációt** kapunk.

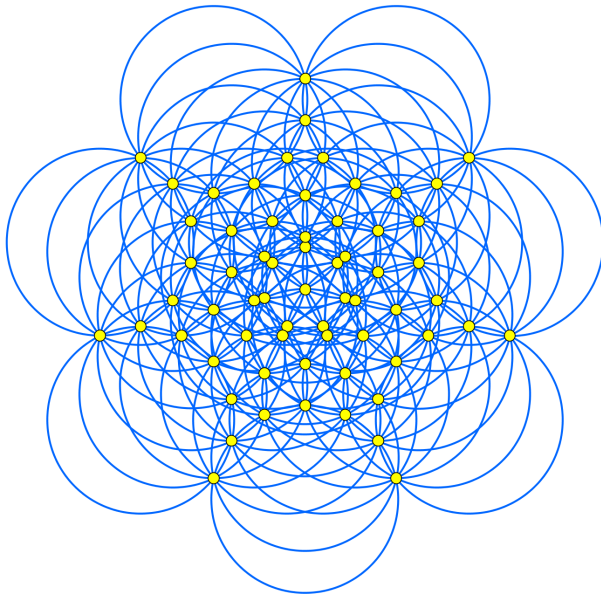
Tétel

A Clifford-féle (2_n^{n-1}) pont-kör konfigurációknak létezik izometrikus reprezentációja.





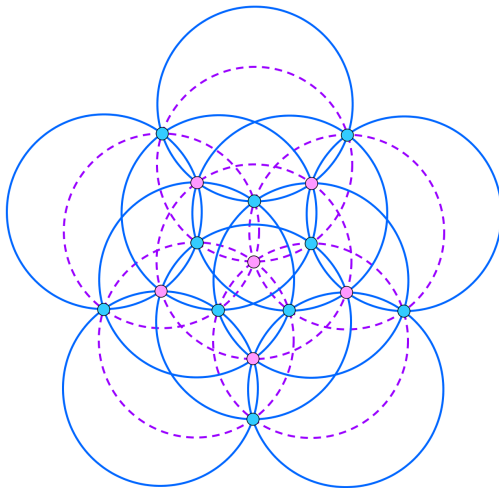
Clifford-féle (2^{n-1}_n) pont-kör konfigurációk



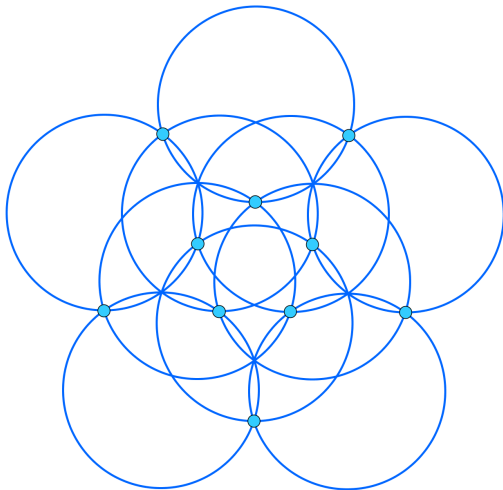
Tétel (Gévay Gábor & Tomaz Pisanski 2014)

Minden $n \geq 3$ esetén létezik $\left(\binom{2n-1}{n-1}_n\right)$ pont-kör konfiguráció, amely a $\left(\binom{2n-2}{n-1}_n\right)$ Clifford-féle pont-kör konfiguráció részkonfigurációja, és így létezik izometrikus reprezentációja.

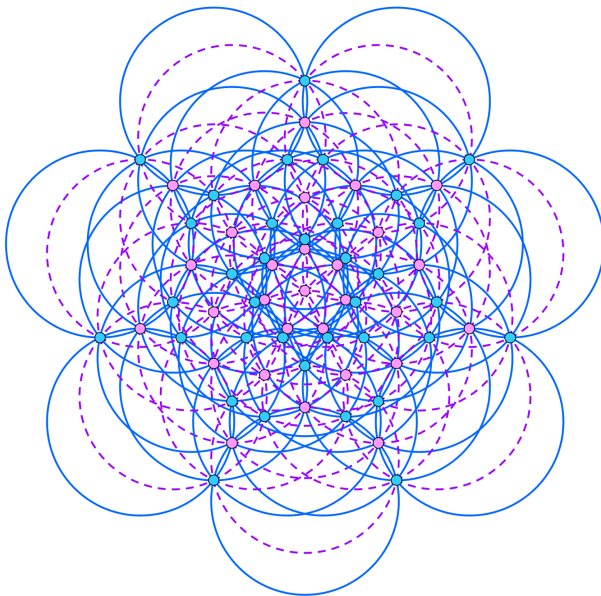
Kneser-féle $\binom{2n-1}{n-1}_n$ pont-kör konfigurációk



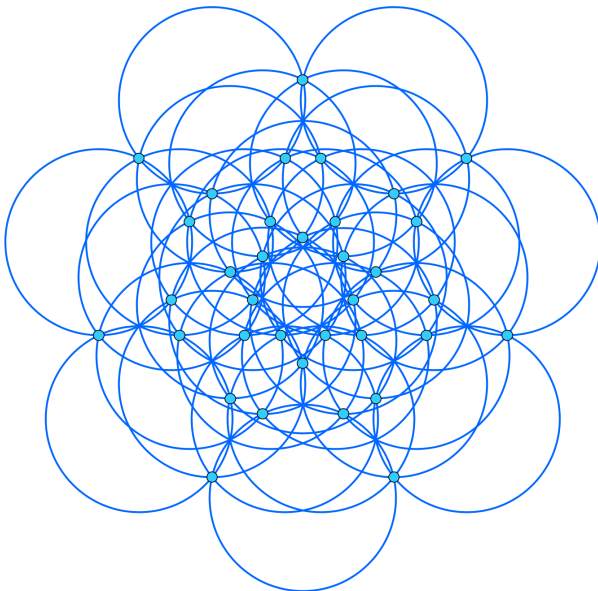
Kneser-féle $\binom{2n-1}{n-1}_n$ pont-kör konfigurációk



Kneser-féle $\left(\binom{2n-1}{n-1}_n\right)$ pont-kör konfigurációk

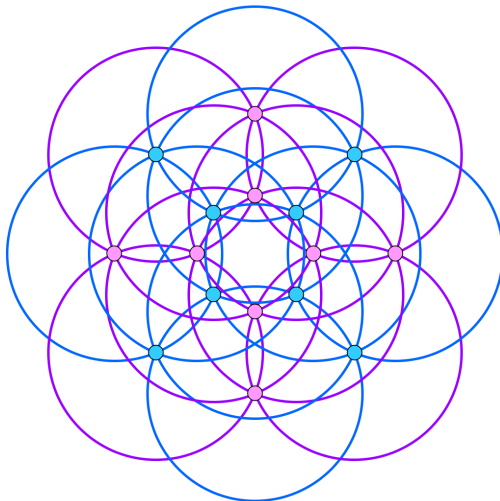


Kneser-féle $\left(\binom{2n-1}{n-1}_n \right)$ pont-kör konfigurációk



Tétel (Gévy Gábor & Tomaz Pisanski)

Minden $n \geq 3$ esetén létezik izometrikus (2^n_n) pont-kör konfiguráció, amely felbontható két diszjunkt Clifford-féle (2^{n-1}_n) pont-kör konfigurációra.



Tétel

Legyen $n, d, k \in \mathbb{N}$. Ha létezik k számú csúccsponttal rendelkező, d -reguláris egységélű gráf, akkor létezik $k2^n$ számú csúccsponttal rendelkező, $(d + n)$ -reguláris egységélű gráf.

Következmény

Minden $k \geq 1$, és megfelelő $d \geq 0$ esetén létezik izometrikus $((k2^n)_{n+d})$ pont-kör konfiguráció.

Következmény

$k = 1$ és $d = 0$ esetben izometrikus (2^n_n) pont-kör konfigurációt kapunk.

Tétel

Legyen $d \geq 2$, és $k_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ha létezik k_1 számú csúcsponttal rendelkező, d -reguláris egységélű gráf, akkor létezik $k_1 k_2 \dots k_n$ számú csúcsponttal rendelkező, $(d + 2(n - 1))$ -reguláris egységélű gráf.

Következmény

Minden $k_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, n$), és megfelelő $d \geq 2$ esetén létezik izometrikus $((k_1 k_2 \dots k_n)_{d+2(n-1)})$ pont-kör konfiguráció.

$((k_1 k_2 \dots k_n)_{d+2(n-1)})$ pont-kör konfigurációk

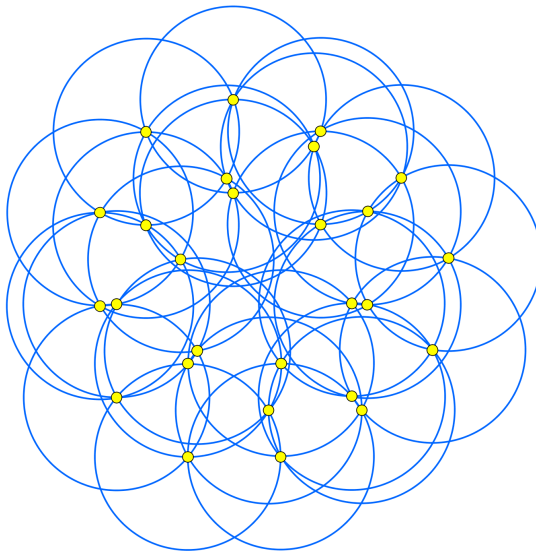
Következmény

Minden $k_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, n$) esetén létezik izometrikus $((k_1 k_2 \dots k_n)_{2n})$ pont-kör konfiguráció.

Következmény

Minden $k_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, n$) esetén létezik izometrikus $((2k_1 k_2 \dots k_n)_{2n+1})$ pont-kör konfiguráció.

- ❶ (2_n^{n-1}) pont-kör konfigurációk.
- ❷ $\left(\binom{2n-1}{n-1}_n \right)$ pont-kör konfigurációk
- ❸ (2_n^n) pont-kör konfigurációk.
- ❹ $((k2^n)_{n+d})$ pont-kör konfigurációk
- ❺ $\left((k_1 k_2 \dots k_n)_{d+2(n-1)} \right)$ pont-kör konfigurációk



Köszönöm a figyelmet!