

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet - Geometriai Tanszék

A Pick-tétel

SZAKDOLGOZAT

Készítette:

Berec Aleksandra
Matematika BSc hallgató

Témavezető:

Dr. Vígh Viktor
egyetemi adjunktus

Szeged
2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. A Pick-tétel	2
3. Lyukas rácspoligonok	9
4. A rácspontok súlyozása	12
5. A Pick-tétel alkalmazása rácspoligon felnagyítottjára	15
6. Rácspontok konvex lemezekben	18
7. Köszönetnyilvánítás	22
8. Nyilatkozat	23

Ábrák jegyzéke

1.	A Pick-tétel szemléltető egyszerű rácspoligonok	3
2.	Általános háromszög kiegészítve speciális derékszögű három- szögekkel	5
3.	3-dimenziós eset	8
4.	Lyukas rácspoligonok	10
5.	Speciális rácspoligonok (indák)	13

1. Bevezetés

A szakdolgozatban a Pick-tételt és annak változatait, kiterjesztéseit szeretnénk bemutatni. Fő célunk a tételre egyszerű és általános bizonyítást adni, valamint bemutatni a síkban ismert kapcsolódó eredményeket, következményeket.

George Alexander Pick osztrák matematikus 1899-ben megjelentetett tanulmányában [5] olvashatunk először az egyszerű rácspoligonok területét megadó roppant elegáns formuláról. A Pick-tételnek számos bizonyítása ismert, de talán a sokszög üres háromszögekre való felosztásán alapuló bizonyítás került be a köztudatba (lásd például [2]). Mi itt egy másik módszert választunk, amely az egyszerű téglalapokból indul ki, majd egyre bonyolultabb alakzatokra igazolja a formulát.

A jól ismert tétel igazolása után először kiterjesztjük az állítást lyukas poligonokra. Majd több alkotórészből álló, általánosított rácspoligonokat definiálunk, ezekre egy ötletes súlyozási eljárással egy nagyon általános formulát adunk. Ennek speciális eseteként példákön keresztül bemutatjuk és tovább általánosítjuk a lyukas poligonokról szóló állításokat.

A dolgozat záró fejezeteiben a tétel két alkalmazását mutatjuk be, összehasonlítjuk egy P rácspoligon k -szoros nagyítottja által letakart rácsponthokot, valamint ennek segítségével általános konvex halmaz által lefedett rácsponthok számára is felső becslést adunk.

A Pick-tétel speciálisan 2-dimenziós állítás, Reeve tetraéderes példája mutatja, hogy direkt magasabb dimenziós általánosítás nem létezhet. Megjegyezzük, hogy Reeve és Macdonald N -dimenziós rácspolitópokkal is foglalkozott, és a Pick-tételre emlékeztető, de annál lényegesen bonyolultabb eredményeket igazolt, lásd [4, 6].

2. A Pick-tétel

Ebben a szakaszban kimondjuk, majd igazoljuk a Pick-tételt, a [3] cikkben megfogalmazott bizonyítás alapján. Ehhez szükségünk van a következő definíciókra.

1. Definíció. [8] Az n -dimenziós $\mathbb{R}^n$ Euklideszi tér azon pontjait, amelyek minden koordinátája egész szám, rácpontoknak nevezzük.

2. Definíció. Rácsegyenesnek nevezzük az olyan egyeneseket, amelyek legalább két rácponton áthaladnak. Rácszakasz olyan szakasz, amelynek végpontjai rácpontok.

3. Definíció. Egyszerű poligonnak nevezzük az olyan P sokszöget, amelyet egy zárt töröttvonal határol, oldalai nem metszik egymást, és nem tartalmaz lyukat, vagyis ha a poligon belsejébe tetszőleges egyszerű, zárt görbét rajzolunk, az ez által határolt lemez minden belső pontja a poligonnak is belső pontja. Az egyszerű rácpoligon olyan egyszerű poligon, amelynek csúcsai rácpontok.

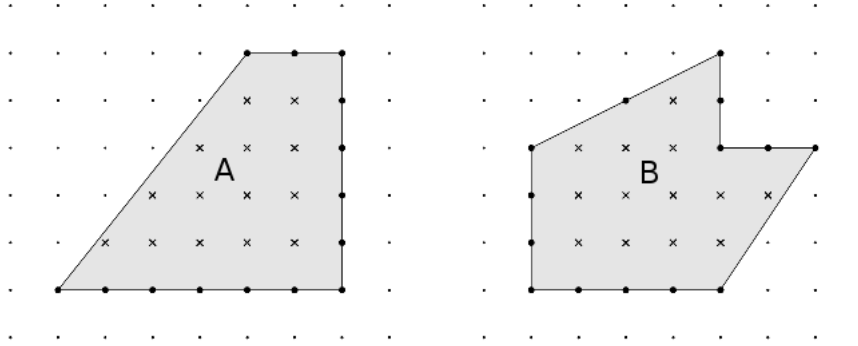
Ezek után kimondhatjuk a jól ismert Pick-tételt.

4. Tétel (Pick-tétel). [5] Minden egyszerű rácpoligon területe kiszámítható annak határán és belsejében elhelyezkedő pontok számának ismeretében, a következő formula alkalmazásával:

$$T = B + \frac{H}{2} - 1$$

ahol B a poligon belsejében lévő rácpontok számát, míg H a poligont határoló töröttvonalra illeszkedő rácpontok számát jelöli.

Mielőtt a tétel bizonyítására rátérnénk, példákkal illusztráljuk az állítást. Az 1. ábrán lévő A poligon területe $T_A = \frac{6+2}{2} \cdot 5 = 20$. Ellenőrizzük le a Pick-tétel állítását. A határpontjainak száma $H_A = 14$, összesen $B_A = 14$ belső pontja van, így $B_A + \frac{H_A}{2} - 1 = 14 + \frac{14}{2} - 1 = 20$, ami valóban egyenlő A területével.



1. ábra. A Pick-tétel szemléltető egyszerű rácspolygonok

Második esetben a terület $T_B = 3 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} = 12 + 3 + 4 = 19$. A Pick-tétel ellenőrzéséhez pedig meg kell számolni a megfelelő rácspontokat, ez esetben $H_B = 14$, $B_B = 13$, így $B_B + \frac{H_B}{2} - 1 = 13 + \frac{14}{2} - 1 = 19$ valóban.

A 4. tétel bizonyítása:

A Pick-tétel általános bizonyítását megelőzően igazoljuk néhány speciális esetben. Legkézenfekvőbb megvizsgálni egy rácspontokra igazított, tengelypárhuzamos téglalapot. A téglalap oldalainak hosszát jelölje m és n , e speciális téglalap területe $T = mn$, a jól ismert formula alapján. A Pick-tétel igazolásához meg kell számolnunk a belső és a határvonalon lévő rácspontokat. Belső pontok számát a $B = (m - 1)(n - 1)$ összefüggéssel kapjuk meg (itt emlékezzünk arra, hogy m és n nem az adott oldalon lévő rácspontok számát jelöli, hanem az oldal hosszát), a határpontok számára pedig $H = 2m + 2n$ adódik. Ezt követően számítással igazoljuk a Pick-tételt speciális téglalapokra:

$$\begin{aligned} B + \frac{H}{2} - 1 &= (m - 1)(n - 1) + \frac{2m + 2n}{2} - 1 = \\ &= mn - m - n + 1 + m + n - 1 = mn = T, \end{aligned}$$

ami igazolja a tétel helyességét tengelypárhuzamos rácstéglalapokra.

A következőkben háromszögekre bizonyítjuk a tételt. Először megmutatjuk a formulát olyan speciális derékszögű háromszögekre, amelyek befogói

tengelypárhuzamos rácsvonalak, majd ezt felhasználva igazoljuk általános háromszögek esetében is.

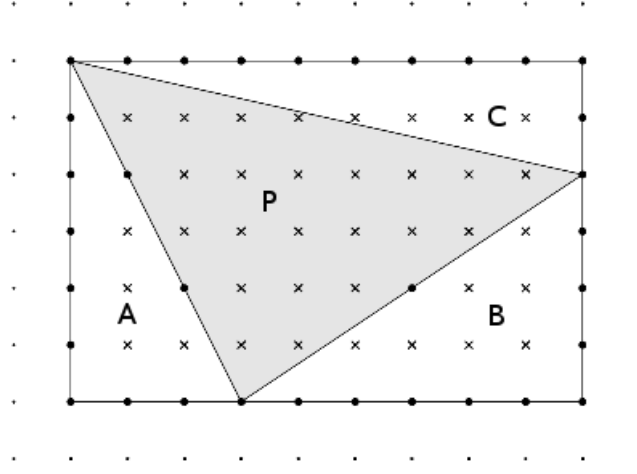
Először tehát tekintsünk egy derékszögű háromszöget, amelynek befogói tengelypárhuzamosak, befogóinak hosszát jelöljük m -mel és n -nel. Ennek területe $mn/2$. Világos, hogy a befogón lévő pontok könnyen összeszámolhatóak, míg az átfogóról nem tudunk pontosat mondani. Előfordulhat olyan eset, hogy az átfogó az összes függőleges és vízszintes rácsvonalat is rácpontban metszi, vagy csak néhányat, esetleg egyiket sem, ezért egyszerűen jelöljük k -val az átlón lévő rácpontok számát (k -ba nem számoljuk bele az átfogó két végpontját). Ebből rögtön adódik, hogy $H = m + n + k + 1$.

A belső pontokat is könnyűszerrel megszámlálhatjuk, ha a speciális derékszögű háromszögre úgy tekintünk, mint egy $m \times n$ -es téglalap felére. Előzőleg megmutattuk, hogy $(m-1)(n-1)$ belső ponttal rendelkezik egy ilyen rács-téglalap. Ha ebből kivonjuk az egyik átlón (a háromszög esetében ez az átfogó) lévő pontokat, majd az eredményt megfelezzük, akkor megkapjuk a háromszög belső pontjainak számát. Vagyis $B = ((m-1)(n-1) - k)/2$. Ezek után végezzük el a számításokat:

$$\begin{aligned} B + \frac{H}{2} - 1 &= \frac{(m-1)(n-1) - k}{2} + \frac{m+n+k+1}{2} - 1 = \\ &= \frac{mn - n - m + 1 - k}{2} + \frac{m+n+k+1}{2} + \frac{2}{2} = \\ &= \frac{mn}{2} = T, \end{aligned}$$

ami speciális derékszögű háromszögekre igazolja az állítást.

Ezek után rátérhetünk az általános háromszögek esetére. Jelöljük P -vel a vizsgált háromszöget. Ezt egészítsük ki további három speciális derékszögű háromszöggel, oly módon, hogy egy tengelypárhuzamos rács-téglalapot kapjunk. E kiegészítő háromszögek rendre A , B és C jelölést kapnak, míg a téglalap legyen D , lásd a 2. ábrát. Jegyezzük meg, hogy amennyiben P (egy vagy két) oldala tengelypárhuzamos, úgy kevesebb kiegészítő derékszögű háromszögre van szükségünk, de ez a bizonyítást lényegében nem befolyásolja. A P belső pontjainak számát jelölje B_P , határpontjainak számát H_P , az A háromszög belső pontjainak számát B_A , és így tovább.



2. ábra. Általános háromszög kiegészítve speciális derékszögű háromszögekkel

Azt már tudjuk, hogy a tétel teljesül a derékszögű háromszögekre és a téglalpra, vagyis

$$T_A = B_A + \frac{H_A}{2} - 1,$$

$$T_B = B_B + \frac{H_B}{2} - 1,$$

$$T_C = B_C + \frac{H_C}{2} - 1,$$

$$T_D = B_D + \frac{H_D}{2} - 1.$$

A fentiekből azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned} T_P &= T_D - T_A - T_B - T_C = \\ &= B_D - B_A - B_B - B_C + \frac{H_D - H_A - H_B - H_C}{2} + 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Vegyük észre, hogy ha összeadjuk a kiegészítő háromszögek határpontjainak számát, az egyenlő lesz a téglalap és a P határpontjainak számával (a P csúcsait mindkét oldalon kétszer számoltuk):

$$H_A + H_B + H_C = H_D + H_P.$$

Ebból kifejezve H_D -t:

$$H_D = H_A + H_B + H_C - H_P. \quad (2)$$

Most fejezzük ki a téglalap belső pontjainak számát a háromszögek adataival. Ekkor összegezni kell a háromszögek belső pontjainak számát, valamint a háromszögek határpontjainak számát. Így azonban a kiegészítő háromszögek külső (a D -vel egybeeső) oldalait is számoltuk, így az kivonásra kerül, valamint ki kell vonjunk még 3-t, hiszen a P csúcsait ráadásul kétszer számoltuk. Így

$$B_D = B_A + B_B + B_C + B_P + H_A + H_B + H_C - H_D - 3. \quad (3)$$

Helyettesítsük be a H_D -t a (2)-ből a (3) egyenletbe:

$$B_D = B_A + B_B + B_C + B_P + H_P - 3. \quad (4)$$

Végezetül írjuk be H_D és B_D mennyiségeket a (2) és a (4) egyenletekből az (1)-be:

$$\begin{aligned} T_P &= B_D - B_A - B_B - B_C + \frac{H_D - H_A - H_B - H_C}{2} + 2 = \\ &= B_A + B_B + B_C + B_P + H_P - 3 - B_A - B_B - B_C + \\ &\quad + \frac{(H_A + H_B + H_C - H_P) - H_A - H_B - H_C}{2} + 2 = \\ &= B_P + H_P - 3 - \frac{H_P}{2} + 2 = \\ &= B_P + \frac{H_P}{2} - 1. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy általános rácsháromszögekre is érvényes a tétel.

A tétel általános esetre:

Végezetül igazoljuk az állítást egyszerű P ráccspolygonra is, felhasználva, hogy már tudjuk az általános háromszögekre. Lényegében egy induktív gondolatmenetet alkalmazunk. Első lépésben megmutatjuk, hogy ha a tétel igaz P_1 és P_2 egyszerű ráccspolygonokra, amelyeknek metszete egy közös él, akkor igaz $P = P_1 \cup P_2$ uniójukra is.

Tehát tegyük fel, hogy a P poligon előáll P_1 és P_2 összekapcsolásával, vagyis $P = P_1 \cup P_2$, illetve P_1 és P_2 metszete egy közös él. P_1 -nek B_1 belső és H_1 határpontja, míg P_2 -nek B_2 belső- és H_2 határpontja van, továbbá tegyük fel, hogy közös határpontjaik száma K .

Egyrésztől nyilvánvaló, hogy

$$T_P = T_{P_1} + T_{P_2} = (B_1 + \frac{H_1}{2} - 1) + (B_2 + \frac{H_2}{2} - 1).$$

Másrészt számoljuk meg P belső- és határpontjait. Azok a pontok, amelyek belső pontjai P_1 -nek vagy P_2 -nek, P -nek is belső pontjai, és ide számítandó még a közös élen lévő további $K - 2$ pont is. A P határpontjainak száma pedig H_1 és H_2 összege, amelyből kivonandóak a közös határpontok. Tehát:

$$B = B_1 + B_2 + K - 2$$

$$H = H_1 + H_2 - 2K + 2$$

Ezek után alkalmazhatjuk a jól bevált módszert, végezzük el a számításokat:

$$\begin{aligned} B + \frac{H}{2} - 1 &= (B_1 + B_2 + K - 2) + \frac{H_1 + H_2 - 2K + 2}{2} - 1 = \\ &= (B_1 + \frac{H_1}{2} - 1) + (B_2 + \frac{H_2}{2} - 1) = \\ &= T_{P_1} + T_{P_2} = T \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk, hogy egy részpolygonokból összeillesztett sokszög területe megegyezik a részpolygonok területének összegével.

A bizonyítás befejezéséhez felidézzük a következő, jól ismert állítást.

5. Állítás. [7, 30. oldal, 3.1.1. Állítás.] *Bármely egyszerű k -oldalú sokszög egymást nem metsző átlókkal $k - 2$ háromszögre bontható.*

Így egy tetszőleges k oldalú rácspoligont feloszthatunk rácsháromszögekre, amelyekre már beláttuk, hogy érvényes a tétel. Ezekből az eredeti poligont újra összeillesztve a tétel a fentiek miatt érvényes marad. Ezzel a Pick-tételt beláttuk általános esetre.

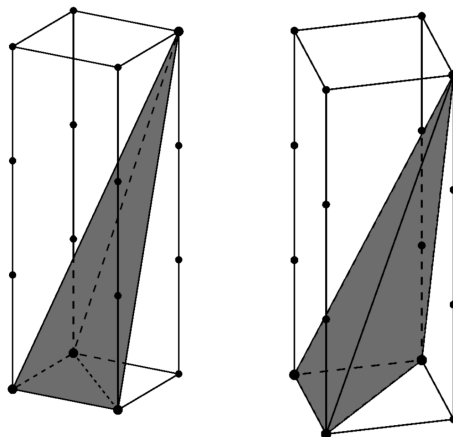
□

A következő példa Reevetől származik [6], és azt mutatja, hogy magasabb dimenzióban hasonlóan egyszerű formula nem létezhet.

Példa: Tekintsük azt a tetraédert, amely csúcsainak koordinátái a következők: $(0,0,0)$; $(1,0,0)$; $(0,1,0)$ és $(1,1,k)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, lásd a 3. ábrát. E tetraéder térfogata a következőképpen számolható: $z = 0$ síkban lévő alaplappja $1/2$ területű, ez állandó, ehhez tartozó magassága pedig k , ebből adódik, hogy térfogata $V = k/6$. Most pedig számoljuk meg a tetraéder oldalain és a benne lévő pontokat. Határpont a 4 csúcspont, ezen kívül pedig nem is tartalmaz sem határán, sem belsejében másik rácspontot, mivel egy 1×1 alapú tengelypárhuzamos rács téglatestben helyeztük el.

A Pick-tételnek így közvetlen háromdimenziós analógiája nem létezhet, mivel nincs kapcsolat a határpontok száma, a belső pontok száma és a poliéder térfogata között.

A magasabb dimenziós rokon állítások iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk [4, 6] cikkeket.



3. ábra. 3-dimenziós eset

3. Lyukas rácspoligonok

A következő szakaszban lyukas rácspoligonokra is kiterjesztjük a Pick-tételt. A vonatkozó formulában megjelenik a lyukak száma is. Az állítás és annak bizonyítása a [3] cikkben leírtakat követi.

6. Definíció. Tekintsünk egy P_0 egyszerű rácspoligont, valamint $L_1, L_2, \dots, L_n$ egyszerű rácspoligonokat ($n = 1, 2, \dots$). Tegyük fel, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén $L_i \subset P_0$, valamint $L_i \cap L_j = \emptyset$, minden lehetséges i, j párra. Ekkor a

$$P = \text{cl} \left(P_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n L_i \right)$$

rácspoligont lyukas rácspoligonnak nevezzük $L_1, \dots, L_n$ lyukakkal. (A $\text{cl}(\cdot)$ a lezárást jelöli, esetünkben annyit jelent, hogy a lyukak határai hozzátartoznak a P lyukas rácspoligonhoz.)

A P lyukas rácspoligon határpontjainak számát jelöljük H -val, ide tartoznak a külső P_0 rácspoligon határpontjai és lyukak határpontjai is. Valamint jelöljük B -vel a belső rácsponatok számát, ide tartozik minden P -be eső rácspon, ami nem határpont.

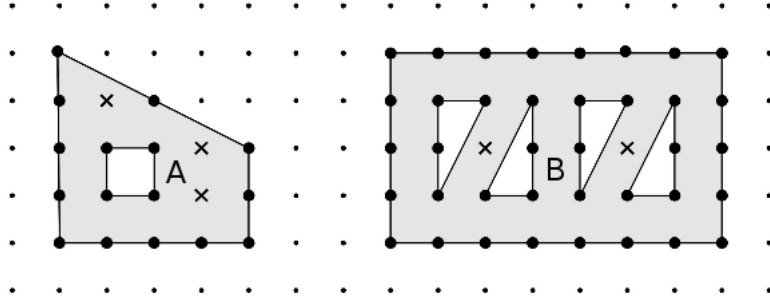
7. Tétel. Legyen P egy lyukas rácspoligon $L_1, \dots, L_n$ lyukakkal. Tegyük fel, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén a P_0 külső rácspoligonnak és az L_i lyuknak nincs közös határpontja. Ekkor P területe a következő formulával számolható:

$$T = B + \frac{H}{2} + n - 1.$$

Mielőtt a tétel igazolására rátérnénk, a 4. ábrán látható két példával szemléltetjük az állítást. Az első esetben egyetlen lyuk van, és $T_A = 2 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 4}{2} - 1 = 11$. A határpontokat vastag teli körrel jelöltük, ezekből összesen $H_A = 16$ van (emlékezzünk arra, hogy a lyukpoligon határpontjai is beszámítandóak). A belső pontokat x-szel jelöltük, ezek száma $B_A = 3$. Valamint $n_A = 1$ lyuk található a poligonban. Ezek után végezzük el a helyettesítést,

$B_A + \frac{H_A}{2} - 1 + n_A = 3 + \frac{16}{2} - 1 + 1 = 11$ valóban.

Hasonlóan a második esetben: $T_B = 24, H_B = 38$ és $B_B = 1$, a lyukak száma pedig $n_B = 4$. Ismét $B_B + \frac{H_B}{2} - 1 + n_B = 2 + \frac{38}{2} - 1 + 4 = 24 = T_B$ valóban.



4. ábra. Lyukas rácspoligonok

A 7. tétel bizonyítása

Először vizsgáljuk meg azokat a poligonokat, amelyekben pontosan egy lyuk található, majd később adunk általános bizonyítást az n lyukat tartalmazó poligonokra is.

Az egyszerűbb jelölés kedvéért a külső poligon legyen K , területe T_K , B_K belső ponttal és H_K határponttal, az L lyuk területe T_L , belső pontjainak száma B_L , és határpontjainak száma H_L . Ekkor a Pick-tétel szerint

$$T_K = B_K + \frac{H_K}{2} - 1,$$

$$T_L = B_L + \frac{H_L}{2} - 1.$$

A lyukas poligon területe:

$$T = T_K - T_L = B_K - B_L + \frac{H_K - H_L}{2}$$

Most számoljuk össze a H és B pontokat: összesen $B = B_K - B_L - H_L$ belső pontunk van, mivel a külső poligon rácspontjaiból ki kell vonni a lyukpoligont. Határpontjuk pedig összesen $H = H_K + H_L$ van. (Itt használtuk ki, hogy K -nak és L -nek nincs közös határpontja.) Adjuk össze a pontokat:

$$B + \frac{H}{2} = B_K - B_L - H_L + \frac{H_K + H_L}{2} = B_K - B_L + \frac{H_K - H_L}{2} = T,$$

ami a tételt igazolja egy lyuk esetén.

Hasonló számításokat kell végeznünk n számú lyuk esetén is. A lyukas poligon belső pontjainak számát B -vel, határpontjainak számát H -val, míg területét T -vel jelöljük. Legyen a külső poligon területe T_0 (B_0 belső-, H_0 határponttal), továbbá n lyuk, amelyek területe rendre T_i , H_i határ- és B_i belső ponttal. A lyukas poligon területe tehát:

$$T = T_0 - \sum_{i=1}^n T_i$$

Mivel $T_0 = B_0 + \frac{H_0}{2} - 1$ és $T_i = B_i + \frac{H_i}{2} - 1$ a Pick-tétel szerint, ezért

$$\begin{aligned} T &= B_0 + \frac{H_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^n \left(B_i + \frac{H_i}{2} - 1 \right) = \\ &= B_0 + \frac{H_0}{2} - 1 + n - \sum_{i=1}^n \left(B_i + \frac{H_i}{2} \right). \end{aligned}$$

A lyukas poligon belső pontjainak számát úgy számoljuk ki, hogy a külső poligon rácspontjaiból kivonjuk a lyukpoligonok rácspontjainak számát, vagyis $B = B_0 - \sum_{i=1}^n (B_i + H_i)$. A határpontok száma pedig úgy kapható meg, hogy összegezzük a külső poligon és a lyukpoligonok határpontjainak számait, $H = H_0 - \sum_{i=1}^n H_i$, így:

$$\begin{aligned} B + \frac{H}{2} - 1 + n &= B_0 - \sum_{i=1}^n (B_i + H_i) + \frac{H_0 + \sum_{i=1}^n H_i}{2} - 1 + n = \\ &= B_0 + \frac{H_0}{2} - \sum_{i=1}^n B_i - \sum_{i=1}^n H_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n H_i - 1 + n = \\ &= B_0 + \frac{H_0}{2} - \sum_{i=1}^n B_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n H_i - 1 + n = \\ &= B_0 + \frac{H_0}{2} - 1 + n - \sum_{i=1}^n \left(B_i + \frac{H_i}{2} \right) = T. \end{aligned}$$

□

4. A rácspontok súlyozása

E szakaszban a Pick-tétel egy bővített változatát mutatjuk be a [1] cikk alapján. Ezzel az előző szakasz tételét tovább általánosítjuk, mivel speciális esetként a lyukas poligonokra vonatkozó 7. tétel is következik. Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben már a lyukak kiérhetnek a külső poligon határáig is, valamint össze is érhetnek, a külső rácspoligonnak és a lyukpoligonoknak lehet közös pontja, sőt éle is - ezek tiltása előző állításunkban nem volt természetes feltevés.

Először is rajzoljunk egy tetszőleges véges gráfot a síkba, a gráf csúcsai legyenek rácspontok, élei pedig rácsszakaszok, és feltesszük, hogy semelyik élre nem illeszkedik további rácspont. A gráf élei a síkot felosztják különböző - korlátos vagy végtelen - tartományokra. Ezek után tetszőlegesen árnyékoljunk néhány korlátos tartományt. A feladat az, hogy az árnyékolt részek területét kiszámoljuk. Jegyezzük meg, hogy maradhatnak „fel nem használt élek” is: az olyan éleket indának nevezzük, amelynek mindkét oldala azonos színű (mindkét oldal árnyékolt, vagy egyik sem az). Lásd 5. ábrát.

A tétel kimondásához súlyozzuk a rácspontokat. Ha találunk olyan élet, amelynek mindkét oldala azonos színű (inda), akkor azt duplázzuk meg, és a közben kialakult tartomány színét változtassuk meg. Erre a tartományra „végtelen kicsiként” gondolunk majd, területe nulla, de az ábrákon szemléltetjük őket, lásd 5. ábrát. Ezután az alakzatot definiáló gráf minden csúcsához hozzárendeljük annak súlyát az $1 - \frac{e}{4}$ összefüggéssel, ahol e a rácspontból kifutó élek számát jelöli (figyelembe véve az indáknál leírt élduplázásokat). Az árnyékolt tartományok belső rácspontjainak súlya legyen 1. Minden más (az alakzathoz nem tartozó) rácsponthoz rendeljünk 0-t. Legyen s az összes rácspont súlyainak összege.

Lyukaknak nevezzük minden korlátos tartományt, ami nem árnyékolt. Ilyen tartomány keletkezhet például az indáknál élduplázással, ha eredetileg az inda mindkét oldala árnyékolt volt. Legyen l a lyukak száma az élduplázásokkal keletkező alakzatban.

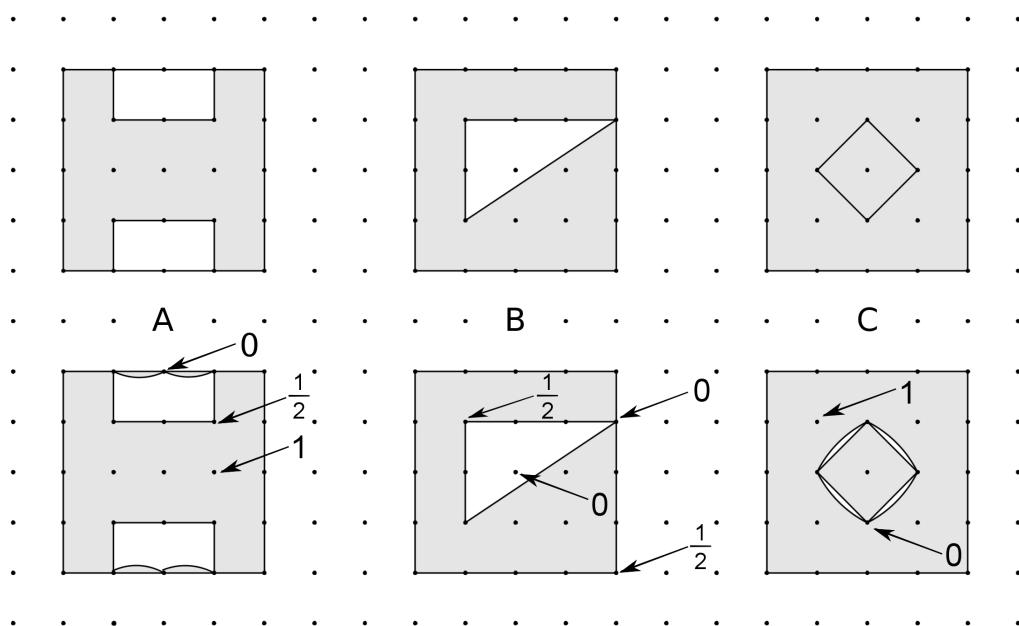
Végül tekintsük az árnyékolt tartományokat, és ezek határainak unióját. Ezen alakzatban két pont ugyanabban az összefüggő komponensben van ha a két pont összeköthető egy az alakzaton belül haladó folytonos vonallal (görbével). Legyen g az alakzat összefüggő komponenseinek száma.

8. Tétel. *A fent bevezetett jelölésekkel az árnyékolt tartományok összterületére*

$$T = s + l - g.$$

A tételt teljes általánosságban nem bizonyítjuk, csak néhány példán keresztül szemléltetjük.

Egyszerű rácspoligonok esetében a belső pontok súlya 1, a határpontoké $1/2$, így az $s = 1 \cdot b + \frac{1}{2} \cdot h$ (b belső pontok száma, h a határpontoké), $l = 0$, $g = 1$, ebből pedig az következik, hogy: $T = b + \frac{h}{2} - 1$.



5. ábra. Speciális rácspoligonok (indák)

További példaként tekintsük az 5. ábra alakzatait.

Az A esetben könnyedén kiszámíthatjuk a területet: $T_A = 4 \cdot 4 - 4 = 12$. Ezek után ellenőrizzük le a kiterjesztett Pick-tételt. Először is indát kell keresnünk, ha van ebben a helyzetben, akkor megduplázzuk azt, és az így kialakuló területet beárnyékoljuk. Ebben az esetben 4 inda is található az A poligonban. Csak ezek után kezdhetünk neki a súlyok összeadásának: $s_A = 16 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 11$. A lyukak száma nem változott az árnyékolással, tehát: $l_A = 2$. Az alakzatunk pedig egy komponensből áll, így $g_A = 1$. Miután ismerjük a területszámításhoz szükséges összes adatot, behelyettesíthetünk: $s_A + l_A - g_A = 11 + 2 - 1 = 12 = T_A$ valóban.

Vizsgáljuk meg a B esetét is, itt arra szeretnénk rávilágítani, hogy nem okoz problémát olyan lyukas rácspoligon sem, amelynél a lyuk határa nem diszjunkt a külső poligonétól. Ennek az alakzatnak a területe $T_B = 4 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 13$. Mindenek előtt indákat keresünk, de ebben az esetben nincsenek, így súlyozhatunk $s_B = 22 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 13$, majd megszámloljuk a lyukakat $l_B = 1$, és a komponenseket $g_B = 1$. Végezetül $s_B + l_B - g_B = 13 + 1 - 1 = 13 = T_B$ valóban.

A C alakzat területét nem befolyásolják a plusz indák, amelyek belül helyezkednek el, így a terület egyszerűen $T_C = 4 \cdot 4 = 16$. A másik számítási mód esetében az indákat nem hagyhatjuk figyelmen kívül, mert a formulában minden pontot fel kell tüntetni. Tehát alkalmazzuk az ismert módszert, indákat keresünk, duplázzunk, de ebben az esetben nem árnyékolunk, hanem világosítunk, mivel az indák az alakzaton belül találhatóak, így alakítunk ki 4 lyukat. A súlyok összege a következőképpen áll elő: $s_C = 16 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 13$, majd az indákkal kialakult lyukak száma: $l_C = 4$, valamint az alakzat komponenseinek száma: $g_C = 1$. Ezen adatokkal a poligon területe $T_C = 13 + 4 - 1 = 16$, ahogy azt már láttuk.

5. A Pick-tétel alkalmazása rácspoligon felnagyítottjára

Ebben a szakaszban a Pick-tétel egy érdekes alkalmazását mutatjuk be, ahol egy P rácspoligon k -szoros nagyítottja által lefedett rácspontokat számoljuk össze. A szakasz a [2] cikk alapján íródott.

A fő állításunk bizonyításához előkészületeket kell tennünk.

9. Definíció. Legyen o az origó. A p rácspontot láthatónak nevezzük, ha az op rácsszakasz nem tartalmaz o -n és p -n kívül további rácspontot.

10. Tétel. A $p = (m, n)$ rácspont akkor és csak akkor látható, ha m és n relatív prímek.

Bizonyítás: ($\Rightarrow$) Legyen $p = (m, n)$ látható pont, legyen s rácsszakasz, amelynek végpontjai p és o . Ekkor nincs más rácspont az s -en a p -n és o -n kívül. Indirekt tegyük fel, hogy m és n nem relatív prímek, vagyis legnagyobb közös osztójukra $\text{lko}(m, n) = k > 1$. Ebből következik, hogy $\frac{m}{k}$ és $\frac{n}{k}$ egész számok, és mivel s az $y = \frac{n}{m}x$ rácsegyenes része, ezért $(\frac{m}{k}, \frac{n}{k})$ pont rajta van az s -en. Ez azt jelenti, hogy az $(\frac{m}{k}, \frac{n}{k})$ pont a p és az origo közé esik, ez pedig ellentmond annak a ténynek, hogy (m, n) látható pont. Így $\text{lko}(m, n) = 1$, vagyis m és n relatív prímek.

($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy m és n relatív prímek, vagyis $\text{lko}(m, n) = 1$. Legyen s az a rácsszakasz, amelynek végpontjai o és $p = (m, n)$ pontok. Legyen $q = (m', n')$ az origótól különböző rácspont s -en. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy p látható, meg kell mutatnunk, hogy $p = q$. Három esetet vizsgálunk.

1. Tegyük fel hogy $m' = 0$, ekkor s szükségképpen függőleges. Ekkor $p = (0, n)$, és mivel $\text{lko}(m, n) = 1$, ezért $n = 1$. Mivel q az origótól különböző rácspont s -en, ezért $n' = 1$, vagyis $p = q$.

2. Ha $n' = 0$, az 1. esethez hasonlóan érvelünk.

3. Most tegyük fel, hogy $m' \neq 0$ és $n' \neq 0$. Mivel p és q is az s szakaszon helyezkedik el, ezért annak meredekségét kétféle módon is felírhatjuk $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$. Ezt átalakítva kapjuk, hogy $mn' = m'n$. Ha m osztja az egyenlet bal oldalát,

akkor szükségképpen a jobb oldalát is, vagyis $m|m'n$. Mivel m és n relatív prímek, így $m|m'$. Hasonlóan $n|n'$. A feltétel szerint q rajta van az s szakaszon, ezért $|m'| \leq |m|$ és $|n'| \leq |n|$, de m és n egész számok, így $m' = m$ és $n' = n$, vagyis $q = p$. □

11. Lemma. *Ha $p = (m, n)$ egy látható pont az ℓ origóra illeszkedő rácsegyenesen, akkor az ℓ -en lévő rácspontok mindegyike előáll $kp = (km, kn)$ alakban, ahol k egész szám.*

Bizonyítás: Legyen $p = (m, n)$ látható pont ℓ -en, és legyen $q = (i, j)$ egy p -től különböző rácspont ℓ -en. Mivel ℓ keresztülmegy p -n és az origón, így ℓ egyenlete: $y = \frac{n}{m}x$. Legyen $\text{lko}(i, j) = d$, így $\frac{i}{d}$ és $\frac{j}{d}$ egész számok, valamint relatív prímek. Világos, hogy az $(\frac{i}{d}, \frac{j}{d})$ pont szükségképpen rajta van az ℓ -en. A 10. tételből következik, hogy $(\frac{i}{d}, \frac{j}{d})$ látható. Ez azt jelenti, hogy $(\frac{i}{d}, \frac{j}{d}) = \pm(m, n)$, s így $q = \pm dp$. □

12. Lemma. *Legyen m és n nemnegatív egész számok. Ekkor azon a rácsszakaszon, amelynek végpontjai $(0, 0)$ és (m, n) , pontosan $\text{lko}(m, n) + 1$ rácspont található.*

Bizonyítás: Legyen (m, n) rácspont, és s olyan rácsszakasz, amelynek végpontjai $(0, 0)$ és (m, n) , valamint $\text{lko}(m, n) = d$. Akkor $\text{lko}(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. A 11. lemmából következik, hogy ℓ -en, $(0, 0)$ és (m, n) -t kivéve a következő pontok vannak: $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}), (\frac{2m}{d}, \frac{2n}{d}), \dots, (\frac{m(d-1)}{d}, \frac{n(d-1)}{d})$. Itt pontosan $d - 1$ rácspont található. Vagyis s rácsszakaszon összesen $d + 1$ pont van. □

13. Lemma. *Legyen P egy n csúcsú egyszerű rácspoligon a következő, az óramutató járásával ellentétes bejárás szerint felsorolt csúcspontokkal: $p_1 = (a_1, b_1), p_2 = (a_2, b_2), \dots, p_n = (a_n, b_n)$. (A számozást modulo n értjük, azaz $(a_{n+1}, b_{n+1}) \equiv (a_1, b_1)$.) Legyen továbbá $d_i = \text{lko}(a_{i+1} - a_i, b_{i+1} - b_i)$. Ekkor P határpontjainak száma $H_P = \sum_{i=1}^n d_i$.*

Bizonyítás: Az eltolás izometria a síkon, ezért a rácspontok számát megőrzi. Toljuk el P $p_i p_{i+1}$ oldalát úgy, hogy p_i az origóba kerüljön. Ekkor a 12. lemmából tudjuk, hogy annak a szakasznak, amelyeknek egyik végpontja $(0,0)$, a másik $(a_{i+1} - a_i, b_{i+1} - b_i)$ összesen a végpontjaitól különböző $d_i - 1 = \text{lnko}(a_{i+1} - a_i, b_{i+1} - b_i) - 1$ rácspontja van.

Mivel $d_i - 1$ megadja a rácspontok számát P -nek a $p_i p_{i+1}$ oldalán, ezért P határpontjainak száma a csúcsok nélkül $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$. Most adjuk hozzá P csúcsait is:

$$H_P = n + \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = n + \sum_{i=1}^n d_i - n = \sum_{i=1}^n d_i.$$

□

Ismert tény, hogy ha egy poligont k -szorosára nagyítunk, akkor az oldalainak hossza k -szorosára nő, míg a poligon területe k^2 -szeresére. A következő tétel egy ezekhez hasonló állítást fogalmaz meg.

14. Tétel. *Legyen P egyszerű rácspoligon, és k pozitív egész szám. Definíáljuk kP -t úgy, hogy $kP = \{kx | x \in P\}$, valamint jelölje L_{kP} a kP -be eső rácspontok számát, azaz $L_{kP} = B_{kP} + H_{kP}$. Ekkor*

$$L_{kP} = T_P \cdot k^2 + \frac{1}{2} H_P \cdot k + 1,$$

ahol H_P a P határpontjait, T_P pedig a P poligon területét jelöli.

Bizonyítás:

Ismert, hogy: $\text{lnko}(ka, kb) = k \cdot \text{lnko}(a, b)$, így a A 13. lemmából, annak jelöléseit megtartva következik, hogy

$$\begin{aligned} H_{kP} &= \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \text{lnko}(k(a_{i+1} - a_i), k(b_{i+1} - b_i)) = \\ &= k \sum_{i=1}^n \text{lnko}((a_{i+1} - a_i), (b_{i+1} - b_i)) = kH_P \end{aligned}$$

Azt már megtárgyaltuk, hogy k -szoros nagyításnál a P területe k^2 -szeresére nő, vagyis: $T_{kP} = T_P \cdot k^2$.

Írjuk fel a Pick-tételt kP -re, és adjunk mindkét oldalhoz $H_{kP}/2 + 1$ -t. Így kapjuk, hogy

$$kP + \frac{H_{kP}}{2} + 1 = B_{kP} + \frac{H_{kP}}{2} - 1 + \frac{H_{kP}}{2} + 1 = B_{kP} + H_{kP} = L_{kP}. \quad (5)$$

Az eddigieket összevetve

$$L_{kP} = T_{kP} + \frac{1}{2}H_{kP} + 1 = T_P \cdot k^2 + \frac{1}{2}H_P \cdot k + 1,$$

ahogy állítottuk. □

A Pick-tétel ezen következménye lehetővé teszi a kP poligon rácspontjainak számának meghatározását, ha ismerjük P területét és határpontjainak számát.

6. Rácspontok konvex lemezekben

Végül az előző szakaszban már igazoltakhoz, hasonló állítást mutatunk tetszőleges konvex lemezekre. A szakasz a [2] cikk alapján készült.

Először felidézzük a konvexitásról a továbbiakhoz szükséges definíciókat és ismereteket.

15. Definíció. Legyen $R \subseteq \mathbb{R}^2$ ponthalmaz. R konvex, ha minden x és y pontjára teljesül, hogy az őket összekötő szakasz minden pontja R -be esik. Az R -t tartalmazó összes konvex ponthalmaz metszetét R konvex burkának nevezzük. Egy R síkbeli ponthalmazt konvex lemeznek nevezünk, ha R zárt, korlátos, konvex és tartalmaz egy nyílt körlapot.

16. Lemma. A konvex lemezek halmazán a terület és a kerület monoton mennyiségek a tartalmazásra nézve, azaz ha $R_1 \subseteq R_2$ két konvex lemez, akkor kerületeikre $K_{R_1} \leq K_{R_2}$ és területeikre $T_{R_1} \leq T_{R_2}$. Egyenlőség csak akkor áll mindkét esetben, ha $R_1 = R_2$.

A következő állításunk mutatja, hogy egy egyszerű rácspoligon kerülete mindig felülbecsli a határpontjai számát.

17. Állítás. *Legyen P egyszerű rácspoligon. Ekkor*

$$H_P \leq K_P.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha P minden oldala tengelypárhuzamos.

Bizonyítás: Járjunk körbe óramutató járásával ellentétesen P határán. Bármely két egymás után érintett rácspon távolsága legalább egy, amiből az egyenlőtlenség azonnal következik. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha bármely két egymás után érintett rácspon szomszédos a rácsban, vagyis P minden oldala valamelyik tengellyel párhuzamos. □

18. Lemma. *Legyen P egy egyszerű rácspoligon, L_P a P -beli rácsponatok száma. Ekkor*

$$L_P \leq T_P + \frac{1}{2}K_P + 1.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha P minden oldala tengelypárhuzamos.

Bizonyítás: Az (5) formulát $k = 1$ -gyel felírva, és felhasználva a 17. állítást kapjuk, hogy

$$L_P = T_P + \frac{1}{2}H_P + 1 \leq T_P + \frac{1}{2}K_P + 1.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, amikor a 17. állításban.

Ez a lemma konvex lemezekre is változtatás nélkül igaz.

19. Tétel. *Legyen R konvex lemez $\mathbb{R}^2$ -ben, az R -be eső rácsponatok számát jelölje L_R . Ekkor:*

$$L_R \leq T_R + \frac{1}{2}K_R + 1.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha R egy tengelypárhuzamos rács téglalap.

Bizonyítás: Ha R nem tartalmaz rácsponatot, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül, egyenlőség nem állhat. Feltehetjük tehát, hogy R -be esik rácspon. Két esetet vizsgálunk.

Először tegyük fel, hogy az R -be eső rácsponatok mind egy $k - 1$ hosszú szakaszon vannak, ekkor nyilván $L_R = k$. ($k = 1$ esetet elfajuló esetként

megengedjük.) Továbbá világos, hogy $K_R \geq 2(k-1)$, valamint $T_R > 0$. Így $T_R + K_R/2 + 1 > 2(k-1)/2 + 1 = k$, vagyis az állítás igaz, egyenlőség ismét nem teljesülhet.

Végül tegyük fel, hogy R -ben vannak nem kollineáris rácspontok. Legyen P az R -be eső rácspontok konvex burka. Világos, hogy P egy egyszerű rácspoligon, $L_R = L_P$, valamint $P \subseteq R$ tartalmazás miatt $K_P \leq K_R$ és $T_P \leq T_R$. Így felhasználva 18. lemmát kapjuk, hogy

$$L_R = L_P \leq T_P + \frac{1}{2}K_P + 1 \leq T_R + \frac{1}{2}K_R + 1.$$

Egyenlőség akkor állhat, ha minden becslésünkben egyenlőség teljesül. Ebből következik, hogy P tengelypárhuzamos rácspoligon, valamint $P = R$. Továbbá kihasználva R konvexitását kapjuk, hogy R szükségképpen téglalap, amire valóban egyenlőség teljesül.

□

Hivatkozások

- [1] Chiron Anderson, Shivani Angappan, and Adam Cimpeanu, *Pick's Theorem – and Beyond!* (2009), 4 – 6. http://www.jamestanton.com/wp-content/uploads/2009/04/picks_theorem_focus_web-version.pdf.
- [2] Kenyon College and Jennifer Garbett, *Pick's Theorem and Minkowski's Theorem* (2010), 25 – 31. <http://documents.kenyon.edu/math/GarbettJSenEx2011.pdf>.
- [3] Tom Davis, *Pick's Theorem* (2003). <http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf>.
- [4] Ian G. Macdonald, *The volume of a lattice polyhedron*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 719–726.
- [5] Georg A. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre.*, Sonderabdr. Naturw.-medizin. Verein f. Böhmen „Lotos” Nr. 8, 9 S. 8° (1899). (1899) (German).
- [6] John E. Reeve, *A further note on the volume of lattice polyhedra*, J. London Math. Soc. **34** (1959), 57–62.
- [7] Szabó László, *Kombinatorikus geometria és geometrisai algoritmusok*, Polygon (Szeged), 2003.
- [8] Wikipédia, *Rácspont*. <http://hu.wikipedia.org/wiki/R%C3%A1cspont>.

7. Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, Dr. Vígh Viktornak, hogy tudásával, türelmével és hasznos tanácsaival segítséget nyújtott dolgozatom elkészítésében.

Külön köszönöm szüleimnek, családomnak, hogy mellettem álltak és segítettek munkámat megértésükkel, szeretetükkel.

És ezúton szeretném megköszönni barátaimnak, Anikónak és Alexnek, hogy kitartottak mellettem, és építő kritikával segítettek a szakdolgozatom létrejöttét.

8. Nyilatkozat

Alulírott Berec Aleksandra, Matematika BSc szakos hallgató, kijelentem, hogy a diplomadolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2015. május 14.

Berec Aleksandra