

DIPLOMAMUNKA

**Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika Tanszék**

Szomszédsági politópok egyes geometriai tulajdonságai

Készítette: Zarnócz Tamás
SZTE Alkalmazott
Matematika MSc.

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc
SZTE Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

**SZTE
2014**

Tartalomjegyzék

1. Tartalmi összefoglaló	3
2. Bevezetés	4
2.1. Jelölések	4
2.2. Politópok	5
2.3. A Shemer-féle varrás	10
2.4. Példák varrásra	12
3. Eredmények	17
3.1. Szomszédsági politópokról	17
3.2. Láthatóság	19
3.3. Nem varrott 9 csúcsú szomszédsági politópok	20
3.4. A részpolitópok feltérképezése	22
4. További célok	31
Ábrák, táblázatok	32
Nyilatkozat	37
Irodalomjegyzék	38

1. fejezet

Tartalmi összefoglaló

Diplomamunkám motivációjául a felső határ tételben [6] fontos szerepet játszó (adott csúcsszám mellett a legtöbb lappal rendelkező) szomszédsági politópok, illetve ezek végtelen osztályainak generálása szolgált. Shemer [7] cikkében ismertette a varrásnak nevezett eljárást, mellyel n csúcsú szomszédsági politópból $n+1$ csúcsú szintén szomszédsági politóp nyerhető. Azonban léteznek más, "nem varrott" szomszédsági politópok is, amelyek kis csúcsszám mellett még kisebbségét alkotják a szomszédsági politópok osztályának, azonban tudjuk, hogy amint $n \rightarrow \infty$, a szomszédsági politópoknak csupán töredéke varrott, szintén Shemer [7] cikke alapján. Mivel egy szomszédsági politóp részpolitópja is szomszédsági (amennyiben az még nemelfajuló és elég csúcsa van), így ha egy nem varrott politópból csúcsokat hagyunk el, előbb-utóbb varrott szomszédsági politópot kell kapnunk. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi történik ilyen elhagyott csúcsok "visszargasztásakor", azaz hogy hogyan lehetne még a varráson kívül szomszédsági politópokból nagyobb csúcsszámú szintén szomszédsági politópot nyerni. Ehhez a rendelkezésünkre álló példákat vizsgáljuk, amiket Altshuler és Steinberg [2] cikkéből vettünk. Itt felsorolják az összes 4-dimenziós 9 csúccsal rendelkező szomszédsági politópot, amik közül a nem varrottakra nézzük meg, hogy hogyan keletkezhettek egy 8 csúcsú szomszédsági politópból.

2. fejezet

Bevezetés

2.1. Jelölések

Először következzen néhány általánosabb jelölés, melyet a dolgozatban használni fogunk. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ rendre legyen a természetes számok, illetve a valós számok halmaza, legyen továbbá $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$

Az $\mathbb{E}^d$ d -dimenziós Euklideszi térben fogunk dolgozni. Következzenek az ezzel kapcsolatos jelölések. Az $\mathbb{E}^d$ tér pontjait kis latin betűkkel jelöljük, mint például x , vagy x_1, x_2 stb. A pontthalmazok jelölésére nagy latin betűket használunk: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $P = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Az előbbi $[x_1, \dots, x_n]$ jelölés rövidített jelölés $\text{conv}(x_1, \dots, x_n)$ -re, ami az $x_1 \dots x_n$ pontok konvex burkát jelenti. Itt jegyezzük meg, hogy ha nem mondunk mást, akkor az alsó indexszel ellátott kis latin betű – mint például az x_1 – szintén az $\mathbb{E}^d$ Euklideszi tér egy pontja (nem pedig koordináta). A tér pontjai és az adott pont helyvektorai közt nem teszünk különbséget (a környezetből kiderül, hogy melyikre gondolunk). Használni fogjuk az abszolútérték jelet pontthalmaz elemszámának jelölésére, mint például: $|\{x_1, \dots, x_n\}| = n$. Legyen továbbá $\text{int}(F)$ az F pontthalmaz belső pontjainak halmaza, azaz azon $x \in F$ pontok halmaza, melyeknek létezik olyan N_x nyílt környezete, hogy $N_x \subset F$, $\text{relint}(F)$ pedig F relatív belsejének halmaza, vagyis azoknak a pontoknak a halmaza, melyek $\text{aff}(F)$ -ben belső pontjai F -nek, ahol $\text{aff}(F)$ alatt F affin burkát értjük, s később pontosan definiáljuk. Például a 3-dimenziós térben egy kockának a belső pontja pontosan azok a pontjai a kockának, melyek egyetlen lapon sincsenek rajta, míg ha F az egyik négyzetlapja, akkor ennek relatív belseje az F affin burkában tekintett belső pontjai, azaz F olyan pontjai, melyek nincsenek élen illetve nem a csúcsok.

Az $\mathbb{E}^d$ d -dimenziós térben *hipersík* alatt egy $(d - 1)$ -dimenziós affin alteret értünk. Egy hipersík két diszjunkt nyílt féltérre bontja a teret.

2.2. Politópok

Ebben a fejezetben a politópoknak, illetve azok bizonyos osztályainak alapvető tulajdonságait ismertetem. Az itt leírt definíciók illetve állítások megtalálhatók például a [4] könyvben.

2.2.1. Definíció (Affin (konvex) burok). Egy ponthalmaz affin (konvex) burkán a ponthalmazt tartalmazó összes affin altér (konvex halmaz) metszetét értjük, jele $\text{aff}(F)$.

A konvex burok fogalmára már a politópok definíciójához szükségünk lesz, az affin burok pedig a támaszhipersík fogalmához lesz szükséges.

2.2.2. Definíció ((Konvex) politóp). Az $\mathbb{E}^d$ euklideszi térben *politóp*nak nevezzük véges sok pont konvex burkát. Politóp dimenziója alatt affin burkának dimenzióját értjük.

Egy politóp lapjainak definiálásához szükségünk lesz a támaszhipersík fogalmára is.

2.2.3. Definíció (Támaszhipersík). Egy ponthalmaz *támaszhipersík*ján olyan hipersíkot értünk, melynek van közös pontja a ponthalmazzal és a halmaz minden pontja ugyanabban a (hipersík által határolt) zárt féltérben van.

Végül következzen a fogalom, ami miatt bevezetésre került a támaszhipersík: nézzük mit értünk egy politóp lapján.

2.2.4. Definíció. Az $F \subset P$ pontosan akkor *lapja* P -nek, ha létezik olyan H támaszhipersíkja P -nek, hogy $F = P \cap H$. Az F lap dimenzióján affin burkának dimenzióját értjük, azaz $\dim(F) = \dim(\text{aff}(F))$.

Következzen néhány politópok esetében használt jelölés. A P politóp k -dimenziós lapjainak halmazát jelölje $\mathcal{F}_k(P)$. Néhány speciális esetben azonban eltérünk ettől. A csúcsok $\mathcal{F}_0(P)$ halmazát jelölje $\mathcal{V}(P)$, az élek esetén $\mathcal{E}(P) := \mathcal{F}_1(P)$, a hiperlapok $\mathcal{F}_{d-1}$ halmazára pedig bevezetjük az $\mathcal{F}(P)$ jelölést. Legyen továbbá $\mathcal{B}(P) = \bigcup_{i=0}^{d-1} \mathcal{F}_i(P)$ az összes valódi lap halmaza, $\mathcal{L}(P) = \mathcal{B}(P) \cup P$ pedig az összes lap halmaza. Ezen definíciók és tételek, illetve azok bizonyításai megtalálhatóak például a [8] jegyzetben.

2.2.5. Állítás. *Tetszőleges $P \in \mathbb{E}^d$ esetén igazak a következők:*

1. P bármely $F \in \mathcal{L}(P)$ lapja is politóp, $F \in \mathcal{F}_k$ esetén egy k -dimenziós politóp.
2. Lap lapja is lapja az eredeti politópnak, azaz $F \in \mathcal{L}(P)$ és $G \in \mathcal{L}(F)$ esetén $G \in \mathcal{L}(P)$ is teljesül.

Számunkra a politópok metrikus tulajdonságai nem lesznek fontosak, csupán kombinatorikus ekvivalencia erejéig különböztetjük meg a politópokat. Következzen ehhez a kombinatorikus ekvivalencia definíciója.

2.2.6. Definíció (Kombinatorikus ekvivalencia). Azt mondjuk, hogy a P és Q politópok *kombinatorikusan ekvivalensek*, ha létezik egy olyan $f : \mathcal{L}(P) \rightarrow \mathcal{L}(Q)$ bijekció a lapok halmazán, ami a dimenziót és a tartalmazást megőrzi, azaz

- $\forall F \in \mathcal{F}_k(P)$ esetén $f(F) \in \mathcal{F}_k(Q)$, illetve
- $\forall F, G \in \mathcal{L}(P)$ -re ha $F \subset G \Rightarrow f(F) \subset f(G)$.

Egy speciális politóp típus definiálására szükségünk lesz a szimpliciális politóp fogalmához.

2.2.7. Definíció (Szimplex). A d -dimenziós standard szimplex az $[e_1, \dots, e_{d+1}] \subset \mathbb{E}^{d+1}$ pontthalmazt értjük, ahol e_i jelöli az i -edik egységvektort a standard ortonormált bázisban. A standard szimplex kombinatorikus osztályának tetszőleges elemét (azaz bármilyen d -dimenziós szimplexet) jelölje Δ_d .

A jelen dolgozat szempontjából érdekes szomszédsági politópok legismertebb osztályát a ciklikus politópok alkotják. Ennek definiálása több féleképp történhet, ahogy itt definiáljuk, ahhoz szükségünk lesz a momentumgörbe fogalmára.

2.2.8. Definíció (Momentumgörbe). *Momentumgörbének* az $\mathbb{E}^d$ térben az $m(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ görbét nevezzük.

A momentumgörbe ismeretében már tudjuk definiálni a ciklikus politóp fogalmát.

2.2.9. Definíció (Ciklikus politóp). A d -dimenziós n csúcsú *ciklikus politóp* alatt olyan politópot értünk, mely kombinatorikusan ekvivalens egy olyan politóppal, amit a momentumgörbe n különböző pontjának konvex burkaként kapunk, azaz $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ esetén a $P = [m(t_1), \dots, m(t_n)]$ politóppal.

2.2.10. Definíció (Szomszédsági politóp). Azt mondjuk, hogy a P politóp k -szomszédsági, ha bármely k csúcsa lapot határoz meg, azaz $\forall S \subset \mathcal{V}(P), |S| \leq k \Rightarrow \text{conv}(S) \in \mathcal{F}(P)$. A politóp *szomszédsági*, ha $\lfloor d/2 \rfloor$ -szomszédsági, ahol $\lfloor x \rfloor$ az $x \in \mathbb{R}$ alsó egészrészze.

Megjegyzés. A definícióból látható, hogy a Δ_d d -dimenziós szimplex minden $d \in \mathbb{N}_+$ esetén $d + 1$ -szomszédsági. Ezt a kivételes esetet (illetve az egyéb okokból rendhagyóan viselkedő $d + 2$ csúcsút) kizárandó általában fel fogjuk tenni, hogy egy szomszédsági politópnak legalább $d + 3$ csúcsa van.

Ismert, hogy egy szomszédsági politóp csúcsai általános helyzetben vannak, illetve az is, hogy páros dimenzióban szükségképp szimpliciális egy politóp, amennyiben szomszédsági. Ezeket lásd pl. [4]-ben.

Mivel jelen dolgozatban főleg a politópok kombinatorikus tulajdonságaival foglalkozunk, így legtöbbször elég a politópokat kombinatorikus ekvivalencia erejéig megkülönböztetnünk. Belátható, hogy adott d dimenzióban adott $n(\geq d + 3)$ csúcsszám mellett az összes n csúcús d -dimenziós ciklikus politóp egymással kombinatorikusan ekvivalens, ezek osztályát jelölje $C(n, d)$. Helyenként $C(n, d)$ alatt az osztály egy konkrét (tetszőleges) példányát értjük. A ciklikus politópok lapjait ismerjük Gale párossági feltétele alapján, amit a következő tételben mondunk ki pontosan.

2.2.11. Tétel ([4] 4.7.2 tétel). *Legyen $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, illetve $m_i := m(t_i)$ (ahol m a korábban bevezetett momentumgörbe – ezt a jelölést a későbbiekben is alkalmazzuk ugyanezzel a feltétellel). Legyen továbbá $T = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Egy $T_d = \{m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_d}\} \subset T$ csúcshalmaz pontosan akkor határozza meg $C(n, d)$ egy hiperlapját, ha $T \setminus T_d$ bármely két elemét páros sok elem választja el ($m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1} = m_1$)-ben.*

Ezen a ponton talán érdemes megállni egy példa erejéig, és megnézni a 2.2.11-ben foglaltakat például $C(7, 4)$ -re, azaz a 7 csúcús, 4-dimenziós ciklikus politóp lapjaira. A ciklikus politópok szimplicialitása miatt, azaz mivel a ciklikus politópok minden hiperlapja szimplex (jelen esetben 3-dimenziós, azaz tetraéder), ezért a hiperlapok ismerete által minden lapot ismerünk, tehát a 2.2.11 tételre lesz csak szükségünk. A tétel alapján 4 elemű részhalmazokat kell kiválasztanunk az $\mathbb{N}_7$ halmazból úgy, hogy párokat alkossanak a kiválasztott elemek. Párok alatt két, a ciklikus sorrendben egymást követő elemet értünk, tehát például $\{3, 4\}$ vagy $\{1, 7\}$. Ilyen négyelemű részhalmazok a következők:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 5, 6\}, \\ &\{2, 3, 6, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 7\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{1, 4, 5, 7\}, \{1, 5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Ez alapján tehát $C(7, 4) = [m_1, \dots, m_7]$ hiperlapjai a következők:

$$\begin{aligned} F_1 &= [m_1, m_2, m_3, m_4], F_2 = [m_1, m_2, m_4, m_5], F_3 = [m_1, m_2, m_5, m_6], \\ F_4 &= [m_1, m_2, m_6, m_7], F_5 = [m_1, m_2, m_3, m_7], F_6 = [m_2, m_3, m_4, m_5], \\ F_7 &= [m_2, m_3, m_5, m_6], F_8 = [m_2, m_3, m_6, m_7], F_9 = [m_3, m_4, m_5, m_6], \\ F_{10} &= [m_3, m_4, m_6, m_7], F_{11} = [m_1, m_3, m_4, m_7], F_{12} = [m_4, m_5, m_6, m_7], \\ F_{13} &= [m_1, m_4, m_5, m_7], F_{14} = [m_1, m_5, m_6, m_7]. \end{aligned}$$

A $C(7, 4)$ ciklikus politóp j -dimenziós ($0 \leq j \leq 3$) lapjait megkapjuk, ha bármely F_i -ből ($i \in \mathbb{N}_{14}$) kiválasztunk $j + 1$ elemet, s vesszük azok konvex burkát. Nyilván $j = 0$ -ra a csúcsokat kapjuk, ami nem túl érdekes, de például $j = 2$ esetén megkaphatjuk az $F = [m_1, m_2, m_3]$ lapot ($i = 1$, illetve $i = 5$ esetén a fenti felsorolás szerint), ami egy

kétdimenziós lapja $C(7, 4)$ -nek. Sőt, azt is észre vehetjük, hogy $F = F_1 \cap F_5$, amiből látható, hogy a F_1 és F_5 hiperlapok szomszédosak, mégpedig F mentén. Emlékeztetőül: két azonos (k) dimenziós lapot akkor nevezünk szomszédosnak, ha metszetük eggyel kisebb $(k - 1)$ dimenziós, azaz $F, F' \in \mathcal{F}_k(P)$ esetén F és F' pontosan akkor szomszédos, ha $\dim(F \cap F') = k - 1$.

2.2.12. Definíció (Univerzális lap ([7] 3.2 definíció)). A $P \subset \mathbb{E}^d$ politóp egy $F \in \mathcal{F}_i(P)$ lapját u -univerzálisnak nevezzük, ha $\forall S \subset \mathcal{V}(P) : |S| \leq u \Rightarrow [S \cup F] \in \mathcal{F}_{i+u}(P)$. Az F lap univerzális, ha $\lfloor \frac{1}{2}(d - |\mathcal{V}(F)|) \rfloor$ -univerzális. Ha $i = 1$, akkor F -et univerzális élnek nevezzük. Egy P politóp i -dimenziós univerzális lapjainak halmazát jelölje $\mathcal{U}_i(P)$.

Nyilvánvalóan ha egy lap u -univerzális, akkor bármilyen $0 \leq u_0 < u$ esetén u_0 -univerzális is. Egy u -univerzális lap rendelkezik tehát azzal a tulajdonsággal, hogy bármely legfeljebb u csúccsal kiegészítve is P egy lapját alkotja.

Mivel a ciklikus politópok szimpliciálisak ([4]), ezért a hiperlapok ismerete által az összes lapjukat is ismerjük, ugyanis ha $F = [m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_d}]$ egy hiperlapja $C(n, d)$ -nek, akkor ennek bármely j elemű részhalmaza egy $j - 1$ -dimenziós lapot határoz meg.

2.2.13. Tétel ($C(n, d)$ univerzális élei ([7] 3.5 tétel)). Legyen $d \geq 4$, $n \geq d + 3$ és $C(n, d) = [m_1, m_2, \dots, m_n]$. Az $\mathcal{E}(P) \ni E = [x, y]$ él pontosan akkor univerzális élé $C(n, d)$ -nek, ha $E = [m_i, m_{i+1}]$ valamely i -re azzal a konvencióval, hogy $m_{n+1} = m_1$.

Bizonyítás. Legyen $E = [m_i, m_{i+1}]$. Hogy ez az él univerzális, azaz hogy $k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$ -re k -univerzális, elég megmutatnunk, hogy tetszőleges k további csúcsát kiválasztva $C(n, d)$ -nek, van olyan hiperlap, amely tartalmazza ezt a k pontot, m_i -t és m_{i+1} -et. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $i = 1$, hiszen 2.2.11 tételből látszik, hogy ha $[m_i, m_{i+1}]$ -ről tudunk valamit állítani, akkor ugyanezt állíthatjuk $[m_1, m_2]$ -ről is és viszont. Legyenek a kiválasztott pontok $\{m_{i_1}, \dots, m_{i_k}\}$. Ekkor az $F = [m_1, m_2, m_{i_1}, m_{i_1+1}, \dots, m_{i_k}, m_{i_k+1}]$ lap eleget tesz a 2.2.11 tételben megfogalmazott feltételnek, ha minden a konvex burokbán szereplő csúcs különbözik. Ha pedig nem, akkor létezik olyan F' , hogy $F \subset F'$ és F' teljesíti a feltételt. Ehhez vegyük például a duplikált pontok helyett a ciklikus sorrendben legelső olyan csúcsot, amelyet még nem választottunk ki. Megjegyezzük, hogy itt is éltünk azzal a konvencióval, hogy $m_{n+1} = m_1$.

A többi él esetén elég találnunk k további csúcsot úgy, hogy ne legyen P -nek olyan hiperlapja, amely tartalmazza az él két végpontját, és ezt a k pontot. Legyen $E = [m_i, m_j]$ úgy, hogy $0 < i < i + 1 < j \leq n$. Ekkor

$$|M| = |\mathcal{V}(C(n, d)) \setminus \{m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, m_{j-1}, m_j, m_{j+1}\}| \geq d - 3 (\geq 1).$$

Mivel $k = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1 \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor - 1$, ezért ki tudjuk választani M k elemét úgy, hogy nem választunk ki sem két egymással szomszédosat, sem pedig olyat, ami az él valamely

végpontjával szomszédos lenne. Könnyen látható 2.2.11 alapján, hogy ezen csúcsokat $C(n, d)$ egyetlen hiperlapja sem fogja tartalmazni. $\square$

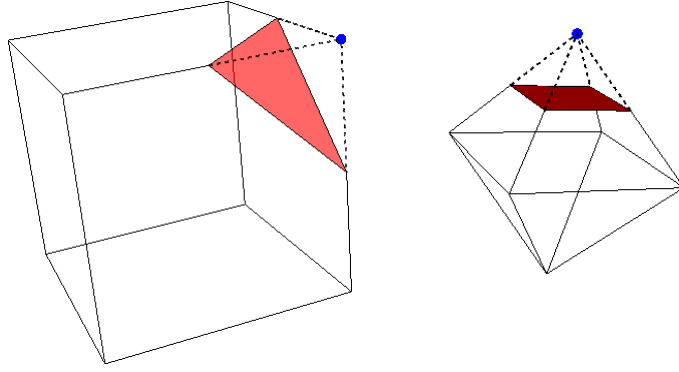
Megjegyzés. Az $n \geq d + 3$ technikai feltétel ahhoz kell, hogy a szimplexet, illetve a rendhagyó struktúrájú $C(d + 2, d)$ -t kihagyjuk.

Láttuk tehát, hogy $C(n, d)$ univerzális élei a politóp élgráfjában egy Hamilton-kört alkotnak. Ismert (lásd pl. [7]-ben), hogy bármely $2m$ -dimenziós (itt is, és ezután is felteesszük páros dimenzió esetén, hogy $m \geq 2$, ugyanis szomszédsági politópok csak 4 dimenziótól kezdve léteznek) n csúcsú ($n \geq 2m + 3$) szomszédsági politóp esetén az univerzális élek gráfja a ciklikus politópok esetén ilyen, minden egyéb esetben pedig utak uniója. Nyitott kérdés azonban, hogy tetszőleges szomszédsági politópnak szükségszerűen van-e univerzális éle.

Megjegyzés. A következő két definícióban (csúcsfigura, illetve élfigura) csak a kombinatorikus típus érdekel bennünket, tehát a megfelelő politóposztály egy reprezentánsát vesszük.

2.2.14. Definíció (Csúcsfigura). Legyen P d -dimenziós politóp, $x \in \mathcal{V}(P)$. A P politóp x csúcshoz tartozó *csúcsfiguráján* egy olyan $P/\{x\}$ -szel jelölt $d - 1$ -dimenziós politópot értünk, melynek minden i -dimenziós lapja ($0 \leq i \leq d - 2$) megfeleltethető P egy x -et tartalmazó $i + 1$ -dimenziós lapjának úgy, hogy ez a megfeleltetés egy tartalmazást őrző bijekció.

Szemléletesen például 3 dimenzióban a csúcsfigurát úgy lehet elképzelni, mint ha az adott csúcsot "levágnánk" a politópról, s ami a vágás helyén marad (egy sokszög), az a csúcsfigura. Megjegyezzük egyrészt, hogy ez koránt sem precíz, mivel nem is ez a célja a szemléltetésnek, illetve azt is, hogy ez a metszet a gömbfelületen ad egy (gömbi) politópot, ami viszont megfeleltethető egy közönséges értelemben vett politópnak. Az iméntieket a 2.1 ábra hivatott szemléltetni. A csúcsfigura nekünk arra lesz hasznos, hogy jól szemlélteti a csúcsot tartalmazó lapok egymáshoz viszonyított helyzetét, illetve ha egy E univerzális élre tekintjük 4 dimenzióban a politóp ezen élre vonatkoztatott élfiguráját, akkor az egy $(n - 2)$ -szög lesz, ami az eredeti politóp E -t tartalmazó hiperlapjainak szomszédságáról elárul mindent. Ez annak köszönhető, hogy egy univerzális él minden csúcsot "lát", azaz az univerzális él és egy tetszőleges harmadik csúcs konvex burka mindig kétdimenziós lap. A 2.6 ábrán látható például egy univerzális élre vonatkozó élfigura. Ebben a sokszögben minden él az eredeti politóp egy ezt az élt tartalmazó hiperlapjának felel meg, illetve két olyan hiperlap, mely tartalmazza az univerzális élt, pontosan akkor szomszédos, ha az élfigurában a nekik megfelelő élek szomszédosak. Például a vastaggal szedett élek az $[x_1, x_2, x_n, \bar{x}]$, illetve az $[x_1, x_{n-1}, x_n, \bar{x}]$ szomszédos hiperlapokat jelölik.



2.1. ábra. Egy kocka csúcsgörájája egy (szabályos) háromszög, egy (szabályos) oktaéderé pedig egy négyszög (négyzet)

2.2.15. Definíció (Élfigura). Legyen P d -dimenziós politóp, $x, y \in \mathcal{V}(P)$, továbbá $E = [x, y] \in \mathcal{E}(P)$. A P politóp E él szerinti élfiguráján a $P/E = (P/\{x\})/\{y\} = (P/\{y\})/\{x\}$ $d - 2$ -dimenziós politópot értjük.

Az élfigura fogja nekünk szemléltetni az adott élben összefutó lapok egymáshoz viszonyított helyzetét (szomszédságát).

Megjegyzés. A definícióban egy állítás is szerepel, amit nem bizonyítottunk: Az élfigura nem függ a csúcsgörák sorrendjétől.

2.3. A Shemer-féle varrás

Az alábbiakban ismertetem röviden a Shemer által bevezetett varrásnak nevezett eljárást. Erről bővebben [7] cikkekben találhat az Olvasó leírást. Mi itt egy rövid ismertetőt adunk az eljárásról, annak néhány fontos tulajdonságát kiemelve. Ez a legfőbb ismert eljárás (ciklikustól különböző) szomszédsági politóptok végtelen osztályainak generálására. Ilyen eljárások megismerése azért fontos például, mert McMullen [6] cikkében bizonyított felső határ tételben kimondja, hogy a szomszédsági politóptok rendelkeznek maximális lapszámmal adott csúcsszám mellett.

2.3.1. Definíció (Torony). A P politópban *torony* alatt lapok egy szigorúan bővülő halmozát értjük, azaz $\mathcal{T} = \{F_j\}_{j=1}^k$ egy torony, ha $F_j \in \mathcal{F}(P)$ és $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k$.

2.3.2. Definíció (Univerzális torony). Legyen P $2m$ -dimenziós szomszédsági politóp. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{T} = \{F_j\}_{j=1}^m$ torony *univerzális*, ha $\forall j$ ($1 \leq j \leq m$) esetén $F_j \in \mathcal{U}(P)$ és $|\mathcal{V}(F_j)| = 2j$.

Bevezetjük még az $\mathcal{F}_i = \{F \mid F \in \mathcal{F}(P), F_i \subset F\}$ jelölést a F_i -t tartalmazó hiperlapokra, azzal a megjegyzéssel, hogy $\mathcal{F}_i = \emptyset$, ha $i > m$, illetve hogy $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(P)$. Végül legyen $\mathcal{C}(\mathcal{T}) = (\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2) \cup (\mathcal{F}_3 \setminus \mathcal{F}_4) \cup \dots$

Megjegyzés. Néha a $\mathcal{T}$ tornyot kiegészítjük az $F_0 = \emptyset$ lappal.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{E}^d$ Euklideszi tér egy x pontja a P politóp F hiperlapja *fölött* (*alatt*) helyezkedik el, ha az F által meghatározott hipersík elválasztja (nem választja el) P -t és x -et. Az x pont pontosan $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ fölött helyezkedik el, ha minden $F \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$ esetén F fölött van, $F' \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{C}(\mathcal{T})$ esetén pedig F' alatt van. Shemer 1982-es [7] cikkében megmutatta, hogy tetszőleges P szomszédsági politóp és ennek bármely $\mathcal{T}$ tornya esetén létezik olyan $\bar{x}$ pont, amely pontosan $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ fölött helyezkedik el.

2.3.3. Tétel (Lemma 4.4 ([7])). *Legyen P $2m$ -dimenziós szomszédsági politóp, $\mathcal{T}$ ebben egy torony. Legyen $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P, \mathcal{T})$. Ekkor létezik olyan $\bar{x}$ pont, mely pontosan $\mathcal{C}$ fölött helyezkedik el.*

Az alábbiakban, tekintettel a tétel fontosságára, röviden ismertetjük Shemer eredeti bizonyítását.

Bizonyítás. A bizonyítás a $\mathcal{T} = \{F_i\}_{i=1}^k$ torony k magasságára vonatkozó teljes indukcióval történik. Ha $k = 0$, akkor $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathcal{T}) = \emptyset$, tehát P bármely $\bar{x}$ belső pontja megfelel, hiszen ekkor $\bar{x}$ minden $F \in \mathcal{F}(P)$ alatt helyezkedik el. Ha $k \geq 1$, akkor legyen $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \{F_1\}$, és $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(P, \mathcal{T}')$. Ekkor az indukciós feltevés alapján létezik egy x pont, amely pontosan $\mathcal{C}'$ fölött helyezkedik el. Legyen $p \in \text{relint}(F_1)$, és legyen $\bar{x} = (1 + \varepsilon)p - \varepsilon x$. Ekkor ha ε elég kicsi, akkor $\bar{x}$ pontosan $\mathcal{C}$ fölött helyezkedik el. $\square$

Az $\bar{x}$ ponthoz viszonyított helyzetük alapján kategorizáljuk P hiperlapjait. Az I. kategóriába kerülnek azok a hiperlapok, melyek nem tartalmazzák a F_1 varróélt, $\bar{x}$ ezek alatt van. A II. kategóriába soroljuk azon hiperlapokat, melyek tartalmazzák F_1 -et, de F_2 -t nem, $\bar{x}$ ezek fölött helyezkedik el, és így tovább. Az $\bar{x}$ pont létezése alapvető fontosságú a varrás szempontjából, ugyanis ez garantálja, hogy a keletkező politóp is szomszédsági lesz, ha az eredeti az volt. Ezen konstrukció által a ciklikustól különböző szomszédsági politópok végtelen osztályait tudjuk generálni.

2.3.4. Tétel (Varrás (4.6 tétel [7])). *Legyen P egy szomszédsági $2m$ -politóp, $\mathcal{T}$ legyen P egy univerzális tornya, és legyen $\bar{x}$ olyan pont, mely pontosan $\mathcal{T}$ fölött helyezkedik el. Ekkor a $P^+ := [\bar{x}, P]$ egy szomszédsági $2m$ -politóp, továbbá $\mathcal{V}(P^+) = \mathcal{V}(P) \cup \{\bar{x}\}$. Azt mondjuk, hogy P^+ -t a P politópból úgy kaptuk, hogy a $\mathcal{T}$ tornyon át rávarrtuk az $\bar{x}$ csúcsot.*

Természetesen különböző $\mathcal{T}$ tornyok esetén más és más P^+ -t kaphatunk, és mivel az univerzális lapok központi szerepet töltenek be az eljárásban, így fontos ismerni, hogy mely (univerzális) lapok tűnnek el, illetve maradnak meg, valamint azt, hogy milyen újak keletkeznek.

2.3.5. Tétel (P^+ hiperlapjai [4]). *Legyen $P^+ = [P, \bar{x}]$ a P -ből az $\bar{x}$ pont $\mathcal{T}$ tornyon át történő varrásával keletkezett politóp. Ekkor P^+ lapjai a következő két típus valamelyikébe esnek:*

1. $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{C}(\mathcal{T})$, ekkor $\bar{x}$ F alatt van.
2. $F = [\bar{x}, G]$, ahol G egy $(2m - 2)$ -dimenziós lapja P -nek úgy, hogy léteznek P -nek $F_1, F_2 \supset G$ lapjai, melyekre $F_1 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{C}(\mathcal{T})$ ($\bar{x}$ ez alatt van) és $F_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$ ($\bar{x}$ fölött van).

Következzen a varrott politópok univerzális lapjait leíró tétel, ami alapján követhető az univerzális élek eltűnése, illetve azok keletkezése.

2.3.6. Tétel (P^+ univerzális lapjai [7]). *Legyen P^+ az $\bar{x}$ csúcs $\mathcal{T}$ -n át történő P -re varrásával nyert politóp.*

1. Ha $0 < j \leq m$ páros, akkor F_j univerzális lapja P^+ -nak
2. Ha $0 < j \leq m$ páratlan, akkor F_j nem univerzális lap P^+ -ban, de $j < m$ esetén továbbra is lap marad.
3. $[F_{j-1}, x_j, \bar{x}]$ (és persze $[F_{j-1}, y_j, \bar{x}]$ is) univerzális $(2j - 1)$ -lap P^+ -ban.

Így például 4 dimenzióban a varrás után tehát tűn(het)nek el univerzális élek, viszont legalább két új biztosan keletkezik is (a varróél mindkét végpontja az új csúccsal 2.3.6 Tétel 3. pontja alapján). Ez a tény garantálja, hogy az eljárás végtelen sokszor megismételhető, és így szomszédsági politópok végtelen osztályait tudja generálni.

Lee [5] cikkében tekintette a varrás egy olyan általánosítását, ahol univerzális torony helyett tetszőleges $P \subset \mathbb{E}^d$ politóp és $\mathcal{T}(P) = \{F_i\}_{i=1}^k$ közösleges (nem feltétlen univerzális) torony esetén létezik olyan pont, mely pontosan $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ fölött helyezkedik el, s hogy az eltűnő és keletkező lapok ugyanúgy lekövethetőek, mint Shemer varrása során. Az egyetlen lényeges különbség az, hogy általában egy ilyen varrással a keletkező politóp nem feltétlen szomszédsági. Viszont Shemer [7] cikkében azt állítja, hogy ha a $\mathcal{T}$ toronynak része egy univerzális torony, akkor a keletkező politóp is szomszédsági lesz. Vizsgálta még a varrás általánosítását Finbow-Singh is doktori disszertációjában [3].

2.4. Példák varrásra

A továbbiakban 4 dimenzióban fogunk dolgozni, ennek megfelelően ha mást nem mondunk, jelöljön P egy 4-dimenziós szomszédsági politópot, valamint legyen $C(n) = C(n, 4)$. Tekintsük át a 4-dimenziós varrást kicsit részletesebben! 4 dimenzióban a $\mathcal{T}$

torony viszonylag egyszerű: csupán egy varróélből, és egy varró 3-lapból (hiperlap) áll. A 2.3.3 tétel bizonyításából jól látszik, hogy az $\bar{x}$ pont megtalálása a $\mathcal{T}$ tornyon történő "lépkedéssel" zajlik, ami négy dimenzióban csupán annyi, hogy keresünk egy pontot, amelyből csak a varrólap látszik, majd ezt "átfűzzük" a varróélen, amivel pont azt érjük el, hogy ebből a pontból a varróélt tartalmazó összes hiperlap látszik, kivéve a varrólapot.

Varrás: $C(8, 4) \rightarrow C(9, 4)$

Nézzünk meg most egy konkrét példát a varrásra, amikor ciklikus politópból ismét ciklikusat kapunk! Legyen $P = C(8) = [\{m_i\}_{i=1}^8]$. A követhetőség és érthetőség kedvéért felsoroljuk P minden hiperlapját is (2.2.11 alapján, innen ellenőrizheti is az Olvasó):

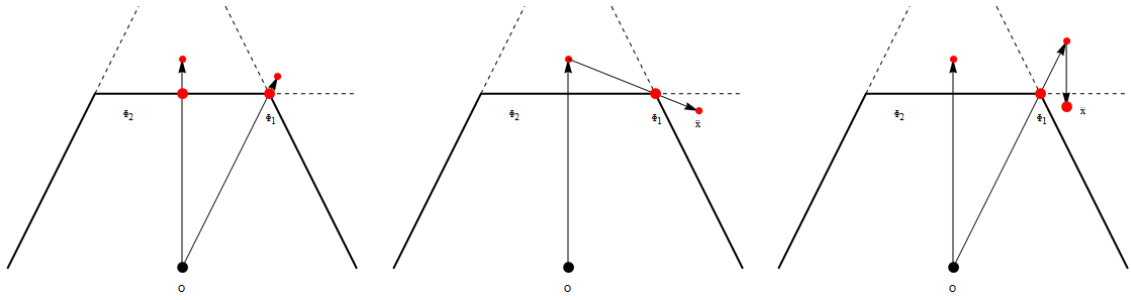
$$(1234), (1245), (1256), (1267), (1278), (1238), (2345), (2356), (2367), (2378), \\ (3456), (3467), (3478), (1348), (4567), (4578), (1458), (5678), (1568), (1678).$$

Legyen $F_1 = [m_1, m_8]$, és $F_2 = [m_1, m_2, m_7, m_8] =: (1278)$ és $\mathcal{T} = \{F_1, F_2\}$ univerzális torony P -ben, továbbá $\mathcal{F}_1 = \{F : F \subset F_1\}$ és $\mathcal{F}_2 = \{F_2\}$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az origó P belsejében van (ez egy eltolással elérhető, legyen például $m'_i = m_i - \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 m_j$, és $P' = [\{m'_i\}_{i=1}^8] \cong P$). Ekkor

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2 = \{(1238), (1348), (1458), (1568), (1678)\}.$$

A 2.3.3 tétel és annak bizonyítása szerint fogunk végigmenni a varráson, az indukció itt ugyanis csak két lépés. Először $\mathcal{C}'' = \emptyset$, ekkor P bármely belső pontja megfelel $\bar{x}_2$ -nek. Ezután $\mathcal{C}' = \mathcal{F}_2 = \{F_2\}$, azaz olyan pontot keresünk, amely pontosan a F_2 varrólap fölött helyezkedik el, avagy amiből pontosan a F_2 varrólap látszik. Ilyen pontot a bizonyítás alapján úgy kapunk, ha vesszük F_2 egy belső pontját, s ennek $(1 + \varepsilon)$ -szorosa elég kis ε esetén megfelel: $\bar{x}_1 := (1 + \varepsilon)\bar{x}_2$. Innen, hogy már ismerjük az $\bar{x}_1$ pontot, az indukciós lépés szerint tudunk találni egy olyan pontot, amiből $\mathcal{F}_1$ minden lapja látszik, azaz az összes F_1 -re illeszkedő lap. Ehhez vesszük F_1 egy belső x pontját, s ezt az origótól egy " ε -nyit kintebb toljuk", azaz vesszük az $\bar{x}_0 = (1 + \varepsilon)x$ pontot. Ebből pontosan az $\mathcal{F}_1$ -beli lapok látszanak. Azt kell még elérnünk, hogy a F_2 varrólap ne látszódjon, csak a többi, azaz pontosan a $\mathcal{C}$ fölött elhelyezkedő pontra van szükségünk. Az $\bar{x}_0$ pontból kiindulva, ami az $\mathcal{F}_1$ -beli hiperlapoktól kevesebb, mint ε -nyi távolságra van, át kell haladnunk a F_2 varrólap hipersíkján úgy, hogy még a politópon kívül maradjunk, ilyen a bizonyítás alapján például az $\bar{x} = \bar{x}_0 - \varepsilon\bar{x}_1$ pont.

Megjegyzés. A fentieket a 2.2, 2.3 és 2.4 ábrák hivatottak érzékeltetni. Figyelem, az ábra csalóka, F_2 3-dimenziós (1-dimenziósnak ábrázolva), F_2 pedig 1 dimenziós (pontként ábrázolva), továbbá a F_1 -re illeszkedő másik lap hivatott jelölni az összes többi rá illeszkedő hiperlapot, nem csak egyet közülük.



2.2. ábra. Pontosan $\mathcal{F}_i$ fölött
elhelyezkedő pont találása.

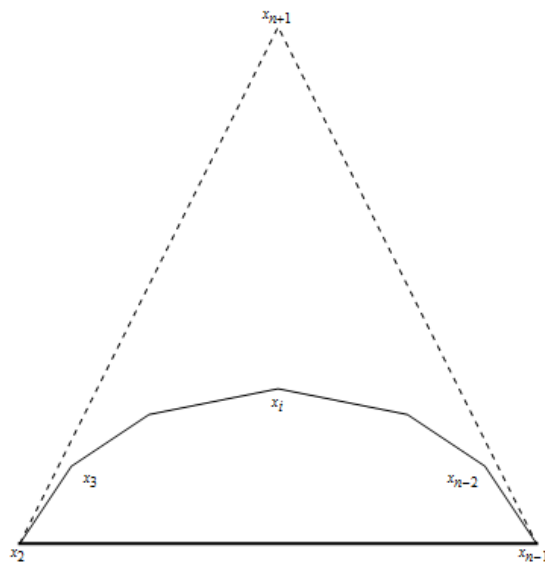
2.3. ábra. Pont "átfűzése" la-
pon.

2.4. ábra. Egy varrolépés
megtétele.

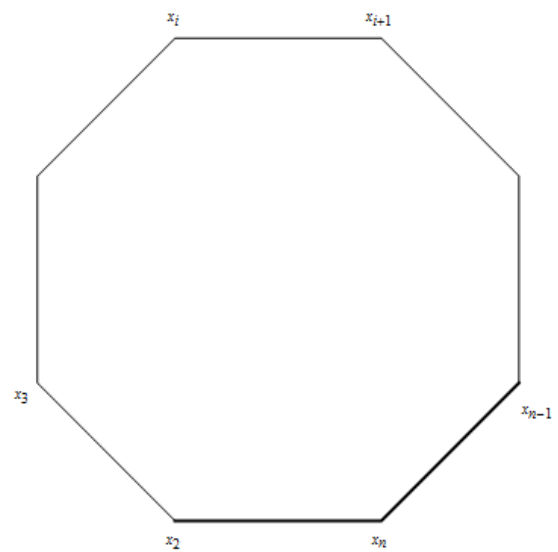
Most, hogy megtaláltuk a pontot, már csak a lapokat kell feltérképeznünk, illetve az univerzális éleket. Nézzük először, hogy P mely lapjai maradnak meg, és melyek tűnnek el. Az eltűnő, illetve megmaradó lapokkal a 2.3.5 tétel alapján nincs nehéz dolgunk: a $\mathcal{C}$ -ben lévők tűnnek el, a többi megmarad, azaz az eltűnő lapok: $\{(1238), (1348), (1458), (1568), (1678)\}$. A keletkező lapok mindegyike tartalmazni fogja $x_9 = \bar{x}$ -t és x_1, x_8 közül az egyiket. Ezek kiderítéséhez a $P^+/(19)$, (illetve a $P^+/(89)$) élfigurákat használjuk (lásd 2.6 ábra). Ebben minden él P^+ egy (19) -re ((89)-re) illeszkedő lapjának felel meg, ezek éleit pedig az $\bar{x}$ -ból történő láthatóságok alapján tudjuk (lásd 2.5 ábra). A keletkező oldalakat pedig leolvassuk:

$$(1239), (1349), (1459), (1569), (1679), (1789), (1289), \\ (2389), (3489), (4589), (5689), (6789), \cancel{(1789)}, \cancel{(1289)}$$

Megjegyzés. A felső sor a $P^+/(19)$ -ből olvasható le, az alsó pedig $P^+/(89)$ -ből (az áthú-



2.5. ábra. $P/(1n)$ élfigura, és a hiperlapok
elhelyezkedése $x_{n+1} := \bar{x}$ -hoz képest.



2.6. ábra. $P^+/(1\bar{x})$ élfigura ($F_1 = (1n), F_2 = (12[n-1]n)$)

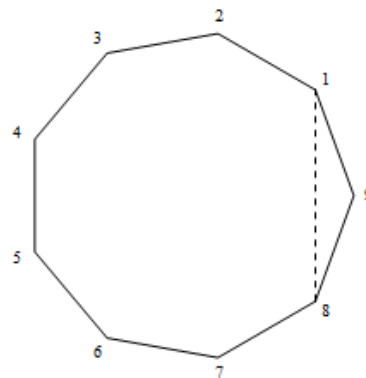
zás ismétlődés miatt van). Látható, hogy a megfelelő sorokban minden hiperlap tartalmazza azt az élt, amely alapján az élfigurát vettük, illetve még a lapot reprezentáló oldal két végpontjának megfelelő csúcsot. Fontos megemlítenünk azt is, hogy az élfigurákban lévő csúcsokat meg kellene különböztetnünk az eredeti csúcsoktól, azaz például $P/[x_1, x_2]$ -ben az $[x_1, x_2, x_3]$ lapnak *megfelelő* csúcsot x_3 helyett mondjuk x_3^* -gal kellene jelölnünk, hiszen $x_3 \neq x_3^*$, de ezt a pongyolaságot a könnyebb érthetőség kedvéért megengedjük magunknak.

Ezek alapján már ismerjük P^+ minden lapját, amik megegyeznek azzal, amit kapunk kellett $(C(9, 4))$ lapjai 2.2.11 alapján ismertek):

(1278), (1234), (1245), (1256), (1267), (2345), (2356),
 (2367), (2378), (3456), (3467), (3478), (4567), (4578), (5678);
 (1239), (1349), (1459), (1569), (1679), (1789), (1289),
 (2389), (3489), (4589), (5689), (6789).

Egyetlen lépés maradt hátra, a keletkezett politóp univerzális éleinek meghatározása. Ez megtehető akár kézzel is az univerzális él definíciója alapján, de mivel ismert a 2.3.6 tétel, így még könnyebb dolgunk van. A tétel 4-dimenzióban egyszerűbben is megfogalmazható: A keletkező politópnak két új univerzális éle van, mégpedig amiket az új csúcs $(\bar{x})$ és a varróél egyik, illetve másik végpontja határoznak meg, a régi univerzális élek közül pedig azok maradnak továbbra is univerzálisak, amelyeknek vagy nincs közös csúcsuk a varrólappal, vagy egyetlen közös csúcsuk van vele, és ez a közös csúcs nincs a varróélen. Formálisan $u \in \mathcal{U}_1(P)$ esetén $u \in \mathcal{U}_1(P^+) \Leftrightarrow u = [a, x]$ ($a \in F_1$), vagy $|u \cap (F_2 \setminus F_1)| = 1$.

Esetünkben az eredeti univerzális élek közül ((12), (23), (34), (45), (56), (67), (78), (18)) megmarad mindegyik az (18) varróélt kivéve, újonnan pedig az (19) és (89) univerzális élek keletkeznek. Ezek gráfját a 2.8 ábra mutatja.



2.7. ábra. $P = C(9, 4)$ univerzális élei $C(8, 4)$ -re varrás után

Varrás: $C(8, 4) \rightarrow S(9, 4)$

Nézzünk meg még egy példát a varrásra, amikor a keletkező politóp nem ciklikus. Kiindulási politópunk továbbra is $P = C(8, 4)$, azonban legyen $\mathcal{T} = \{F_1, F_2\}$, ahol $F_1 = [x_1, x_8] \subset F_2 = [x_1, x_6, x_7, x_8]$. A továbbiakban is használjuk az $[x_{i_1} \dots x_{i_k}] = (i_1 \dots i_k)$ jelölést. Legyen $P^+ = [P, x_9]$, ahol $x_9 = \bar{x}$ a 2.3.3 tétel alapján kapott pont. Ekkor $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{T}) = \{(1238), (1348), (1458), (1568), (1278)\}$. $F \setminus \mathcal{C}$ -beli hiperlapok megmaradnak, $\mathcal{C}$ -ben lévő lapok eltűnnek, $P^+/(19)$ és $P^+/(89)$ élfigurák alapján pedig a keletkező lapok:

$$(1569), (1459), (1349), (1239), (1279), (1789), (1689), \\ (5689), (4589), (3489), (2389), (2789).$$

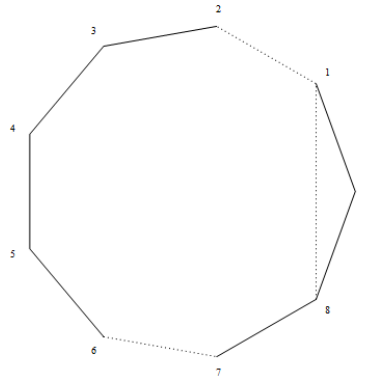
Az univerzális élek vizsgálata maradt még hátra. Az eredeti $(12), (23), (34), (45), (56), (67), (78), (18)$ élekből az (18) varróél megszűnik univerzális lenni (mint mindig), illetve az $e_1 = (12)$ valamint $e_2 = (67)$ élek sem lesznek univerzálisak a keletkező $S(9, 4)$ politópban, mivel

$$|e_1 \cap F_2 \setminus F_1| = |(12) \cap (67)| = |\emptyset| = 0 \neq 1,$$

illetve

$$|\mathcal{V}(e_2) \cap \mathcal{V}(F_2 \setminus F_1)| = |\mathcal{V}(67) \cap \mathcal{V}(67)| = 2 \neq 1.$$

Keletkezik viszont a szokásos két univerzális él: (19) és (89) . Így az univerzális élek gráfja már nem egy ciklus (Hamilton-kör a csúcsok halmazán), hanem két diszjunkt út uniója: $(19), (89), (78)$, illetve $(23), (34), (45), (56)$.



2.8. ábra. $P = S(9, 4)$ univerzális élei $C(8, 4)$ -re varrás után

3. fejezet

Eredmények

3.1. Szomszédsági politópokról

Ismertetünk a teljesen varrott szomszédsági politópok számát illetően néhány eredményt, előtte azonban ismerkedjünk meg az ehhez szükséges definíciókkal.

3.1.1. Definíció (Teljesen varrott szomszédsági politóp). A P $2m$ -dimenziós szomszédsági politópot *teljesen varrottnak* nevezzük, ha megkapható $C(2m + 3, 2m)$ -ből a korábban ismertetett varrás ismételt alkalmazásával. *Varrottnak* nevezünk egy politópot, ha egy szomszédsági politópból megkapható néhány (de legalább 1) varrolépés elvégzésével.

A Shemer által [7] cikkben bevezetett jelöléssel fogunk élni a szomszédsági politópok számát illetően.

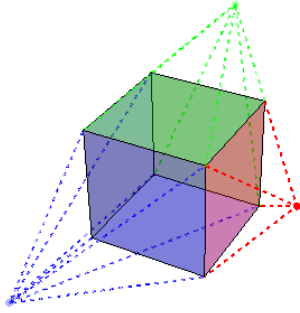
3.1.2. Definíció. Jelölje $g(v, 2m)$ a v csúcsú $2m$ -dimenziós szomszédsági politópok különböző kombinatorikus típusainak számát.

4 dimenzióban a 7 és 8 csúcsú szomszédsági politópok mindegyike teljesen varrott (lásd [4] és [2]), a 9 csúcsúak között azonban már a 23 megvalósítható közül csupán 18 varrott (lásd szintén [2]). Shemer [7] cikkében megmutatta, hogy a varrott szomszédsági politópok száma a szomszédsági politópok $g(2m + \beta, 2m)$ számának csupán egy csekély (eltűnő) hányadát adja mind rögzített $\beta \geq 4, m \rightarrow \infty$, mind pedig rögzített $m \geq 2$ és $\beta \rightarrow \infty$ esetén.

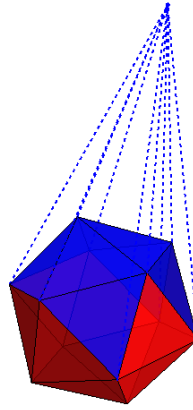
Innen ered a motiváció, hogy valahogyan még generáljuk szomszédsági politópok végtelen osztályait. Shemer szerint megmutatható, hogy ha a $\mathcal{T}$ torony tetszőleges bővítése egy univerzális toronynak, akkor (egyrészt 2.3.3 tétel bizonyításából látszik, hogy ilyen módon kapott $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ esetén is létezik az $\bar{x}$ pont, másrészt pedig) a kapott politóp szintén szomszédsági lesz. Ennek általánosítása Lee [5] cikkében megtalálható, "zászlón át" történő varrásként (az a zászló fogalom megegyezik Shemer tornyának fogalmával,

azaz lapok szigorúan bővülő rendszerét jelenti, illetve általános esetben tetszőleges torony/zászló esetén nem feltétlen szomszédsági a kapott politóp). Sőt, mivel tudjuk, hogy szomszédsági politópok részpolitópja is (azaz néhány csúcs elhagyása után a megmaradó csúcsok konvex burka) szomszédsági, ezért tekinthetjük a következő eljárást is (szintén Shemer [7] cikke nyomán): Vegyünk egy szomszédsági politópot, és varrások, valamint csúcselhagyások tetszőleges sorrendben történő egymás utáni elvégzésével is szomszédsági politópokat kapunk. Ezen eljárás 4-dimenzióban nem produkál semmi újat, de $m \geq 3$ esetén már szigorúan több politóp kapható meg így, mint pusztán varrással. Ezen eljárások együttesen sem hoztak túl sok javulást az előállítható szomszédsági politópok számát illetően.

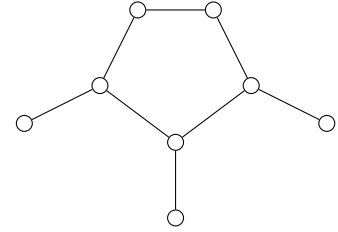
Azt vizsgáltuk (igaz, nem túl nagy mintán), hogy hogyan nyerhetőek kisebb szomszédsági politópból azok a szomszédságiak, amelyek nem varrottak. Mivel a 8 csúcsúak között még mind teljesen varrott, azaz elérhetőek $C(7, 4)$ -ből varrással. A 9 csúcsú 4-dimenziós szomszédságiakból már van viszont olyan, amely nem varrott, egész pontosan öt. Vizsgálatunk módja az volt, hogy mivel tudjuk, hogy szomszédsági politóp részpolitópja is szomszédsági, ezért ha elhagyjuk egy csúcsát ezeknek a nem varrott politópoknak, akkor melyik eggyel kisebb csúcsszámú politóppal kapunk kombinatorikusan ekvivalenst. Ezt a vizsgálatot Wolfram Mathematica[®] program segítségével végeztük. A programkód kérésre elérhető. A vizsgálat abból állt, hogy az 5 tárgyalt 9 csúcsú nem varrott szomszédsági politóp csúcsait egyesével elhagyva megnéztük, hogy az így megmaradó hiperlapokat melyik 8 csúcsú szomszédsági politóp hiperlapjaiba lehet átcímkezéssel átvenni. Az 5 hiányzó hiperlap miatt lehetséges volt elméletileg, hogy akár több 8 csúcsú is lehetett az őse, ám a vizsgálat során szerencsére kiderült, hogy nem ez a helyzet: minden politópnak egyértelmű őse van. (Megjegyezzük, hogy nem kellett volna mind a 9 csúcsra megnézni a politópok kombinatorikus szimmetriái miatt, viszont a kód szempontjából egyszerűbb volt az összesre, a futási időben pedig elhanyagolható a különbség.) Miután megtudtuk az őseket, megnéztük, hogy melyik az az öt hiperlap, ami az elhagyott csúcsból látszik, és ezek elhelyezkedését, illetve egymáshoz viszonyított helyzetét vizsgáltuk. Ezt az öt politópot a 4.2 ábra mutatja be.



3.1. ábra. A láthatóság egy kockán ábrázolva. A piros pontból egy, a zöldből kettő, a kékből 3 lapja látszik a kockának.



3.2. ábra. Egy ikozaéder, illetve egy külső pontból látható lapjai (kék), valamint a látott lapok szomszédsági gráfja



3.2. Láthatóság

Ebben a szakaszban bevezetünk néhány definíciót, melyek a vizsgálataink tárgyalásához szükségesek.

3.2.1. Definíció (Láthatóság). P legyen d -dimenziós politóp, x pedig egy rajta kívül eső pont, amely nem esik P egyetlen hiperlapjának sem a hipersíkjába (erre a továbbiakban úgy hivatkozunk, hogy legyen a pont általános helyzetben). Azt mondjuk, hogy az x pontból *látszik* P egy F hiperlapja, ha $[P, x]$ -nek F nem lapja. Jelölje $\mathcal{C}(P, x)$ a P politópból az x külső pontból látott lapok halmazát.

A fogalom, illetve ennek alkalmazása megtalálható például Grünbaum [4] könyvében, illetve Altshuler és Shemer közös [1] cikkében. Eszerint egy politóp hiperlapjait 3 osztályba soroljuk $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}_B$, illetve $\mathcal{F}_C$ aszerint, hogy az x pont a hiperlapokhoz képest hol helyezkedik el. Az $\mathcal{F}_A$ osztályba kerülnek azok a hiperlapok, amelyeknek hipersíkjába pont beleesik x , ezekkel mi már tárgyalt okokból nem foglalkozunk. A $\mathcal{F}_B$ osztályban vannak azok a hiperlapok, melyek fölött helyezkedik el az x pont, $\mathcal{F}_C$ -ben pedig azok, amelyek alatt van. Tehát $\mathcal{C}(P, x) = \mathcal{F}_B$. Ha a hiperlapok ilyen partíciója ismert, Grünbaum leírta a keletkező politóp lapjait, melyet Altshuler és Shemer korrigáltak [1] cikkükben. Az utóbbiban szereplő módon közöljük a tételt.

3.2.2. Tétel (Grünbaum [4]). Legyen $P \subset \mathbb{E}^d$ politóp, $x \in \mathbb{E}^d \setminus P$ rajta kívül eső pont, és legyen $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B, \mathcal{F}_C$ P hiperlapjainak olyan partíciója, hogy x beleesik az $\mathcal{F}_A$ -ban lévő hiperlapok hipersíkjába, $\mathcal{F}_B$ hiperlapoknak a hipersíkjai elválasztják P -t és x -et, a $\mathcal{F}_C$

beli hiperlapok pedig nem. Ekkor $P^+ = [P, x]$ minden F lapja pontosan a következők valamelyike:

1. $F \in \mathcal{F}_C$
2. $F = [G, x]$, ahol $G \in \mathcal{F}_A$ egy részhalmazában lévő elemek metszete
3. $F = [G, x]$, ahol G mind egy $\mathcal{F}_B$ -beli, mind pedig egy $\mathcal{F}_C$ -beli elemnek lapja.

Altshuler és Shemer [1] cikkükben vizsgálták, hogy milyen $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B, \mathcal{F}_C$ esetén létezik olyan x pont, mely teljesíti a fent elvártakat, azaz $\mathcal{F}_A$ hiperlapjainak a síkjába esik, $\mathcal{F}_B$ lapjai elválasztják P -t és x -et, $\mathcal{F}_C$ hiperlapjai pedig nem.

3.2.3. Definíció (Láthatósági gráf). Legyen P d -dimenziós politóp, x rajta kívül eső, általános helyzetben lévő pont, $\mathcal{C}(P, x)$ pedig az x -ből látott hiperlapok halmaza. Definiáljuk a $G = \mathcal{G}(P, x)$ gráfot a következőképpen: $V = \mathcal{V}(G) = \{F : F \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{C}(P, x)\}$, $E = \mathcal{E}(G) = \{(a, b) : a, b \in V(G), \dim(a \cap b) = d - 2\}$, $G = (V, E)$. A $\mathcal{G}(P, x)$ gráfot a P politóp x pontbeli láthatósági grádjának nevezzük.

A láthatósági gráfot szemléletesen úgy képzelhetjük el, hogy a külső pontból látott hiperlapok szomszédsági gráfja, azaz a hiperlapoknak feleltetjük meg a gráf pontjait, az élek pedig a szomszédos hiperlapok között futnak. Két hiperlapot akkor nevezünk szomszédosnak, ha metszetük $(d - 2)$ -dimenziós lap.

3.3. Nem varrott 9 csúcsú szomszédsági politópok

Jelen fejezettől mind az írást mind pedig az olvasást megkönnyítendő, bevezetjük a következő egyszerűbb jelölést a $P = [x_1, \dots, x_n]$ politóp lapjaira: $(ijk\ell) := [x_i, x_j, x_k, x_\ell]$. Továbbá a [2] cikkből átvett politópoknak is rövidebb jelölést adunk, hogy kényelmesebb legyen róluk beszélni. Legyen $P^i := N_i^8$, $i = 1, 2, 3$, valamint legyen $Q^1 = N_7^9$, $Q^2 = N_{17}^9$, $Q^3 = N_{19}^9$, $Q^4 = N_{20}^9$ és $Q^5 = N_{22}^9$. Ezek hiperlapjaira is beveztünk egy globális jelölést. Jelölje F_j^i P^i lapjait $i = 1, 2, 3$, illetve $j = 1, \dots, 20$, továbbá jelölje G_j^i Q^i lapjait $i = 1, \dots, 5$, illetve $j = 1, \dots, 27$.

Az öt vizsgált politópot hiperlapjaik listájával ismertetjük, ahogyan a [2] cikkben is szerepelnek, illetve a jelölést is átvettük innen, valamint felsoroljuk még a politópok univerzális éleit is. Az adatokat a 4.2 táblázat tartalmazza. Az univerzális élek alapján rögtön látszik, hogy nem lehetnek varrottak, hiszen ezek gráfja nem tartalmaz cseresznyét (2 hosszú utat), ami a varrás során automatikusan keletkezik.

Észrevehetjük, hogy adott csúcsszám, illetve dimenzió esetén a szomszédsági politópok hiperlapjainak száma kombinatorikus típustól függetlenül egyforma. Ez nem véletlen:

3.3.1. Állítás (Szomszédsági politópok hiperlapjainak száma [4]). *Ha P $2m$ -dimenziós v csúcsú szomszédsági politóp, akkor*

$$|\mathcal{F}(P)| = \binom{v-m}{m} + \binom{v-m-1}{m-1}$$

Megjegyezzük, hogy a szomszédsági politópok bármely dimenziós lapjainak száma is ismert, és csak a d dimenzió, illetve a csúcsok n számának függvénye. A szomszédsági mivoltból automatikusan következik $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -nél kisebb k -ra:

$$|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k+1}, \quad \text{ha } k \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor.$$

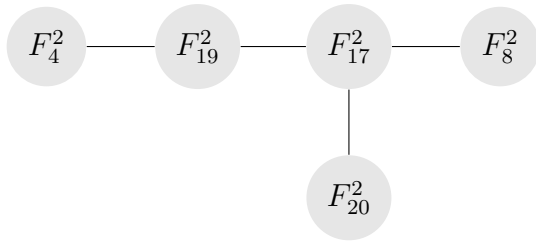
Ez alapján pedig a Dehn-Sommerville egyenletekből (lásd pl. [4, 9]-ben) már következik tetszőleges k -ra a k -dimenziós lapok száma [9] alapján, ezt az Olvasó megtalálja például a [4] könyvben.

McMullen 1970-ben belátta, hogy a szomszédsági politópok lapjainak száma maximális. Az eredményről bővebben pl. [4]-ben találhat az Olvasó leírást.

Nézzük meg most részletesen egy példán, hogy mi történt a vizsgálat során. Legyen például $P = Q^5$, és hagyjuk el P 1-es csúcsát, jelölje az így kapott politópot P^- . A 4.2 táblázat alapján ismerünk P^- 20 lapjából 15-öt (azt az ötöt, amelyik látszik az 1-es csúcsból, azokat nem ismerjük – érdekes maga tény, hogy ez minden esetben 5):

$$(3467), (3456), (4567), (5678), (2678), (2378), (3478), \\ (3569), (3459), (2459), (2349), (3679), (2379), (2679), (2689).$$

P^- azonban szükségképp szomszédsági, és mivel 8 csúcsából ilyen csak 3 van ($C(8, 4) = P^1, P^2, P^3$, lásd 4.1 táblázat), ezért valamelyikkel kombinatorikusan ekvivalens kell hogy legyen a részpolitóp. Nincs más dolgunk, mint találni a 8 csúcs egy olyan átcímkezését, hogy ez a 15 lap a 3 ismert politóp valamelyikének 15 lapja legyen. Két permutáció is megfelel: $(19)(2876543)$, illetve (194823765) . Ezek mindegyike P^- 15 ismert hiperlapját P^2 valamely 15 hiperlapjába viszik át (Ezt úgy kell értelmezni, hogy $P = Q^5$ csúcsain végrehajtjuk ezt a permutációt, és amelyik csúcs így 9-es lett, azt eldobjuk; ekkor pontosan P^2 -nak valamely 15 hiperlapját kapjuk). Ezek után meg tudjuk mondani azt is, hogy P^- melyik 5 lapja látszik a P -ben 1-essel címkézett csúcsból. Ezek pedig a következők: $F_4^2 = (1457), F_{19}^2 = (1478), F_{17}^2 = (2378), F_8^2 = (3467), F_{20}^2 = (3478)$ (lásd 4.1 és 4.2 táblázatok). Az 1-es csúcsból a láthatósági gráfot a 3.3 ábra mutatja, azt pedig, hogy az 5 politóp megfelelő indexű csúcsait elhagyva melyik kisebb csúcsúszámú politóppal kapunk kombinatorikusan ekvivalenset, azt a 3.4 ábrán látható.



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3. ábra. P^2 látható lapjai olyan külső x pontból, mellyel együtt Q^5 a konvex burka (a "T"-gráf)

3.4. ábra. Q^i j indexű csúcsát elhagyva a kapott politóp $P^{A_{i,j}}$.

3.4. A részpolitópok feltérképezése

A vizsgálatok bemutatása előtt megfogalmazunk egy sejtést amely a szomszédsági politópok egy külső pontból vett láthatósági gráfja és az ezzel a ponttal együtt alkotott politóp szomszédsági mivolta között 4 dimenzióban.

3.4.1. Sejtés. Legyen P egy 4-dimenziós n csúcsú szomszédsági politóp, legyen x rajta kívül eső általános helyzetben lévő pont, és legyen $\mathcal{G}(P, x)$ a P politóp x -beli láthatósági gráfja. A $\mathcal{G}(P, x)$ gráf pontosan akkor $n - 3$ csúcsú fa, ha $[P, x]$ szomszédsági politóp.

Nyilvánvalóan akármilyen fa nem fordulhat elő láthatósági gráfként (például minden csúcs foka legfeljebb 4 lehet), de úgy tűnik, hogy ha a $n - 3$ hiperlap látszik, és ezek szomszédsági grájában nincs ciklus, akkor a keletkező politóp szomszédsági lesz.

Felmerül a kérdés, hogy ezek az esetek, amiket vizsgálunk, vajon nem-e speciális esetei a Lee-féle általánosított varrásnak (lásd 2.3, illetve bővebben az [5] cikkben), azaz esetleg található-e olyan zászló a 8 csúcsú 4-dimenziós szomszédsági politópokban, amire varrva a nem varrott (Shemer-értelemben) 9 csúcsúak közül kapjuk valamelyiket?

A válasz az, hogy olyan eset biztosan van, ami nem tartozhat (üres halmazt nem tartalmazó) zászlóhoz, ugyanis zászlón varrás során is kell lennie az eltűnő lapoknak legalább egy közös csúcsának (a legkisebb lap a zászlóban közös lapja kell, hogy legyen az összes eltűnő hiperlapnak), olyan példa pedig van, amelyben ez nem teljesül (a látható 5 tetraéderlap gráfja egy csillag, azaz egy adott hiperlap, illetve annak négy szomszédja tűnik el). Megjegyezzük, hogy az ellenpélda léte önmagában értelmet ad a vizsgálatoknak, ezért diplomamunkám szempontjából irreleváns, hogy van-e olyan eset, ami zászlón történő varrással előáll, azonban egyelőre ismeretlen.

Viszont a Lee-féle általánosított varrás is hoz érdekes példákat. Legyen például P $2m$ -dimenziós szomszédsági politóp, $\mathcal{T}(\mathcal{C}(P)) = \{F_i\}_{i=1}^m$ egy univerzális tornya és cseréljük ki F_m -et valamely F'_m lapra úgy, hogy $F_{m-1} \subset F \subset F'_m$ (ekkor nyilván F $(2m - 2)$ -dimenziós). Ekkor tulajdonképpen "majdnem" Shemer-módon varrunk, csak két varró

hiperlapunk van. Könnyen látható, hogy az eljárás majdnem szomszédsági politópot ad, azaz egy ilyen lépés után kapott politópnak egyetlen olyan csúcspárja lesz, amely nem alkot élt. Ez nyilván nem szomszédsági, viszont még mindig viszonylag sok lapja lesz. Az eljárás végesen folytatható, amíg marad univerzális él a politópban (egy lépés során a varróélen kívül legfeljebb még 2 univerzális él tud eltűnni), tehát így is nyerhetjük nagy lapszámmal rendelkező politópok véges osztályait.

Megjegyezzük továbbá azt is, hogy a torony bármely eleménél megtehető, hogy eggyel kisebb dimenziós lapra cseréljük, csak alacsonyabb dimenziós lapok esetén többet fog veszíteni a politóp szomszédsági mivoltából, azaz több olyan csúcspár is lesz, ami nem alkot élt.

Shemer a [7] cikkében azt állítja, hogy ha olyan torony mentén varrunk, amelynek része egy univerzális torony, akkor is szomszédsági politópot kapunk

A Shemer-féle varrás (ld. 2.3) egy speciális eset, ugyanis a varrás során az új pontból a láthatósági gráf egy speciális fa, egész pontosan egy $(n - 3)$ hosszúságú út. Azonban nem csak a varrás produkál utat. Például Q^1 8-as csúcsát elhagyva az elhagyott csúcsból a megmaradt politóp (P^2) 5 látható lapjának szomszédsági gráfja szintén egy út.

3.4.2. Megjegyzés. Legyen P konvex politóp, x egy általános helyzetben lévő külső pont, $\mathcal{G}(P, x)$ pedig P x -beli láthatósági gráfja. Ekkor a $\mathcal{G}(P, x)$ gráf összefüggő.

3.4.3. Lemma. Legyen P egy 4-dimenziós n csúcsú szomszédsági politóp, x rajta kívül eső általános helyzetben lévő pont, és legyen $\mathcal{G}(P, x)$ a P politóp x -beli láthatósági gráfja. Ha $P^+ = [P, x]$ szomszédsági, akkor $\mathcal{V}(\mathcal{G}(P, x)) \geq n - 3$, továbbá ha $\mathcal{G}(P, x)$ tartalmaz kört, akkor az egyenlőtlenség szigorú.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{G}(P, x)$ -nek egyetlen pontja van, az annyit jelent hogy pontosan egy lap látszik x -ből, azaz pontosan négy csúcs (emlékeztetőül: tudjuk, hogy a P politóp szimpliciális).

Innentől minden további él a 3.4.2 lemma miatt éllel csatlakozik a gráf többi részéhez, tehát valamely másik korábbi lappal 3 közös csúcsa van, azaz egyetlen további csúccsal járul(hat) hozzá az x -ből látott csúcsok számához. Ha ezzel az éllel nem keletkezett $\mathcal{G}(P, x)$ -ben kör, akkor hozzá is járul (ekkor ez a csúcs "még nem látszott"), ha viszont kör keletkezik, akkor nem járult hozzá új látott csúccsal, hiszen két korábbi lappal is szomszédos volt (nyilván különböző 2-dimenziós lap mentén, azaz mind a négy csúcsa látszott már valamely korábbi hiperlapok miatt), tehát új csúcs ettől a hiperlaptól nem látszik.

Ezek után már csak össze kell számolnunk a látott csúcsokat. Az első hiperlap 4-gyel járul hozzá a látott csúcsok számához, minden további pedig 1-gyel, ha ettől a csúcstól nem keletkezett kör, ha pedig igen, akkor nem járul hozzá, azaz ha $n - 3$ lapnál kevesebb

látszik x -ből, akkor az új csúcs nem lát minden korábbi csúcsot, tehát $[P, x]$ nem lehet szomszédsági, ha pedig $n - 3$ lap látszik, de ezek szomszédsági gráfjában van kör, akkor is legfeljebb $3 + n - 3 - 1 = n - 1$ csúcs látszik x -ből, azaz $[P, x]$ szintén nem lehet szomszédsági. Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

Tekintsük át a kapott eredményeket. A 45 esetből kombinatorikus szempontból 13 lényegesen különböző fordult elő az alapján, hogy milyen politópból melyet kaptunk, illetve milyen volt a láthatósági gráf (tehát ha adott politópból két különböző pontot elhagyva a láthatósági gráf izomorf volt, a megmaradó szomszédsági politóp pedig kombinatorikusan ekvivalens, akkor nem tekintettük különbözőnek a két esetet). Megjegyezzük, hogy előfordulhat, hogy ezek között is vannak, amelyek egymással nem kombinatorikusan ekvivalensek, hiszen attól, hogy a láthatósági gráf mondjuk egy fa, attól még a hiperlapok többféleképp is csatlakozhatnak egymáshoz. A következőkben leírtakat összevetheti az Olvasó 3.4, 4.1, 4.2 ábrákkal és a 4.1, 4.2 táblázatokkal.

A program több permutációt is adott (természetesen) minden esetben, amelyek a politópokat egymásba viszik, a következőkben mi ezek közül egyet választunk a demonstráláshoz.

Esetek Q^1 -ből

A következőkben a Q^1 -ből adódó esetekből tekintünk át pár különbözőt.

Az 1-es, 2-es, 5-ös és 6-os csúcsok

Az 1-es, 2-es, 5-ös, illetve 6-os csúcs elhagyásával az elhagyott pontból a politóp láthatósági gráfja egy a 3.3 ábrán láthatóval izomorf gráf (továbbiakban "T"-gráf), a megmaradó politóp pedig mind a négy esetben P^2 volt.

Az 1-es csúcsot nézzük meg részletesebben. Ekkor Q^1 -ből elhagyjuk az összes olyan lapot, amely tartalmazza az 1-es csúcsot. Az eltűnő hiperlapok a következők:

$$G_1^1, G_7^1, G_8^1, G_{10}^1, G_{12}^1, G_{14}^1, G_{16}^1, G_{18}^1, G_{19}^1, G_{21}^1, G_{25}^1, G_{26}^1.$$

A megmaradó lapok alapján a program P^2 -vel találta ekvivalensnek, az egyik permutáció ami az ekvivalenciát biztosítja: (19)(28)(37)(46). Látjuk, hogy ez az egyes csúcsot viszi a 9-esbe, tehát az 1-est kell eldobnunk, a többit pedig a permutáció szerint átcímkezni. Ezek után megkeressük azt az öt lapot, amely nincs meg a csonkolt Q^1 -ben, de P^2 -ben igen, ugyanis ezek azok a lapok, amelyek a "visszaragasztáskor" látszanak. Ezek a következők:

$$F_1^2 = (1234), F_{16}^2 = (1238), F_2^2 = (1256), F_{14}^2 = (1268), F_{15}^2 = (2678).$$

A látható lapok gráfját az Olvasó is ellenőrizheti, hogy egy "T"-gráf.

A 3-as, 4-es, 7-es és 8-as csúcsok

A 3-as, 4-es, 7-es valamint a 8-as csúcs elhagyása esetén szintén P^2 a megmaradó politóp, azonban ekkor a láthatósági gráf az elhagyott pontokból mind a négy esetben egy 4 él hosszú út volt (akárcsak a varrásnál, viszont ezek mégsem varrások – nincs közös él, a varrásnál pedig az univerzális varróél közös).

A 3-as csúcs fog a példa alapjául szolgálni. Q^1 3-ast tartalmazó (elhagyandó) lapjai a következők:

$$G_1^1, G_2^1, G_3^1, G_4^1, G_5^1, G_7^1, G_9^1, G_{10}^1, G_{11}^1, G_{22}^1, G_{23}^1, G_{24}^1.$$

Ekkor is P^2 -vel ekvivalens a politóp, egy lehetséges permutáció az (139482765). Az öt kimaradt lap pedig a következő:

$$F_4^1 = (1457), F_{12}^1 = (1578), F_{17}^1 = (2378), F_{15}^1 = (2678), F_{13}^1 = (5678).$$

Ez az öt lap pedig egy 5 hosszú utat határoz meg, mint szomszédsági gráf.

A 9-es csúcs

Egy érdekes eset volt a 9-es csúcs elhagyása, egyrészt azért is, mert mindössze 3 esetben volt a láthatósági gráf egy csillag (ez az egyik), másrészt pedig azért, mert ez egy olyan példa, ami biztosan nem keletkezhetett általánosított (zászlón történő) varrással, hiszen a látott 5 lap csúcshalmazának metszete üres, azaz nem található alap a zászlónak (közös legkisebb lap). A megmaradó politóp szempontjából szintén érdekes ez az eset, hiszen ez az egyetlen eset, amikor az ő a ciklikus politóp: P^1 . Érdekes, azonban nem meglepő, hogy mindössze egy esetben adódott ilyen, hiszen a ciklikus politóp rengeteg szimmetriája miatt várhatóan kevesebb esetet produkál.

A 9-es csúcs elhagyásával eltűnő hiperlapjai Q^1 -nek:

$$G_{16}^1, G_{17}^1, G_{18}^1, G_{19}^1, G_{20}^1, G_{21}^1, G_{22}^1, G_{23}^1, G_{24}^1, G_{25}^1, G_{26}^1, G_{27}^1.$$

A megmaradó politóp közvetlenül a ciklikus politóp (P^1), az identikus permutációval elérhető tehát.

Esetek Q^2 -ből

A [2] cikkben 17-es sorszámú Q^2 politóp szintén 3 különböző esetet adott, s ezek struktúrája is hasonló a Q^1 -nél tárgyaltakhoz.

Az 1-es, 2-es, 5-ös és 6-os csúcsok

Az 1-es, 2-es, 5-ös, illetve 6-os csúcs elhagyása mind P^2 -re vezetett vissza, a láthatósági gráf pedig út volt.

Példaként az 1-es csúcsot hagyjuk el, s nézzük meg lépésről lépésre, hogy milyen politóp marad, s milyen lesz a láthatósági gráf.

Hagyjuk tehát el Q^2 1-es csúcsát, és vele együtt az összes rá illeszkedő hiperlapot is. Ezek a hiperlapok a következők:

$$G_1^2, G_2^2, G_3^2, G_4^2, G_{10}^2, G_{11}^2, G_{13}^2, G_{14}^2, G_{15}^2, G_{19}^2, G_{20}^2, G_{21}^2.$$

Az így megmaradt 15 hiperlapra alkalmazva például az (1946)(23)(78) permutációt, látszani fog az ekvivalencia P^2 -vel, s így már könnyen kideríthető az 5 keresett hiperlap is, illetve ezek szomszédsági gráfja is.

$$F_3^2 = (1245), F_5^2 = (2345), F_6^2 = (2356), F_7^2 = (2367), F_{12}^2 = (2678).$$

Ezek szomszédsági gráfja pedig egy 5 csúcsú út.

A 3-as, 4-es, 7-es és 8-as csúcsok

A 3-as, 4-es, 7-es valamint a 8-as csúcs elhagyásának esetei csupán a láthatósági gráfban különböznek az előző esettől, ugyanis a megmaradó politóp szintén kombinatorikusan ekvivalens P^2 -vel, a láthatósági gráf viszont ezekben az esetekben a fentebb tárgyalt "T"-gráf volt.

Példánkat a 3-as csúcs elhagyására nézzük meg.

Elhagyott hiperlapjainkat ismét a 4.2 táblázat alapján könnyen meghatározhatjuk:

$$G_1^2, G_5^2, G_6^2, G_7^2, G_8^2, G_{13}^2, G_{20}^2, G_{21}^2, G_{23}^2, G_{24}^2, G_{26}^2, G_{27}^2.$$

Ezek elhagyása után a megmaradó 15 lap átcímkezhető P^2 15 lapjává például az (1639)(48)(57) permutációval, s ezáltal kideríthető az az 5 lap, amit így nem kaptunk meg:

$$F_1^2 = (1234), F_{16}^2 = (1238), F_2^2 = (1256), F_{14}^2 = (1268), F_{17}^2 = (2378).$$

Ezen öt lap szomszédsági struktúrája alapján pedig egy "T"-gráfot határoz meg.

A 9-es csúcs

A 9-es csúcs itt is rendhagyóan viselkedett, ez az eset P^3 -ra vezetett vissza, és a 3 ritka eset egyike volt, ugyanis a láthatósági gráf ez esetben is csillag volt, azaz a látható hiperlapok egy kitüntetett hiperlap, és annak négy szomszédja voltak (természetesen négy ágú csillag a gráf, akárcsak Q^1 esetén, 5 csúcson másmilyen csillag nem is lehet).

Ezt az esetet is megnézzük lépésről lépésre. Induljunk ki ismét Q^2 -ből, s hagyjuk el a 9-es csúcsát a rá illeszkedő összes lappal együtt. Ekkor az elhagyott lapjaink:

$$G_{16}^1, G_{17}^1, G_{18}^1, G_{19}^1, G_{20}^1, G_{21}^1, G_{22}^1, G_{23}^1, G_{24}^1, G_{25}^1, G_{26}^1, G_{27}^1.$$

A 12 lap elhagyásával Q^2 megmaradó 15 lapja például az (1265)(37)(48) permutációval P^3 15 lapját kapjuk. Ekkor a P^2 -ből kimaradó lapok, amik pontosan az elhagyott csúcsból látható hiperlapok a következők:

$$F_{16}^2 = (1348), F_{15}^2 = (2378), F_8^2 = (3467), F_{17}^2 = (3478), F_{20}^2 = (4578).$$

Ezek a hiperlapok pedig P^3 -ban egy F_{17}^2 középpontú 4 ágú csillagot határoznak meg szomszédsági gráfként, az elhagyott csúcsból tehát ez a láthatósági gráf.

Esetek Q^3 -ból

Az első 8 csúcs

Ez az összességében két esetet produkáló politóp volt talán a legérdektelenebb olyan szempontból, hogy 8 esetben is ugyanaz volt mind a megmaradó politóp kombinatorikus típusa, mind pedig a megmaradt politópnak az ebből a pontból látott hiperlapjainak struktúrája (láthatósági gráfja). Az 1-8 csúcsok bármelyikét elhagyva ugyanis a láthatósági gráf egy út volt, amegmaradt politóp pedig P^2 .

Nézzük meg az 1-es csúcsra például a megmaradó politópot, s abban az elhagyott pontból vett láthatósági gráfot.

Az 1-es csúcsot elhagyva az eltűnő hiperlapok a következők:

$$G_1^3, G_7^3, G_9^3, G_{11}^3, G_{13}^3, G_{14}^3, G_{16}^3, G_{18}^3, G_{19}^3, G_{21}^3, G_{25}^3, G_{26}^3.$$

A megmaradt lapok átvihetők a csúcsok megfelelő permutációjával P^2 politóp hiperlapjaiba. Ehhez egy jó permutáció például az (194253678). Ezután be tudjuk azonosítani a kimaradt lapokat, pontosan ezek látszanak az elhagyott csúcsból:

$$F_1^2 = (1234), F_{18}^2 = (1348), F_4^2 = (1457), F_{19}^2 = (1478), F_{10}^2 = (4567).$$

Ezek gráfja pedig könnyen ellenőrizhetően egy út.

A 9-es csúcs

A 9-es csúcs ebben az esetben is kitüntetett szerepet töltött be, ennek elhagyása esetén ugyanis más politópot kaptunk (P^3 -at), illetve a láthatósági gráf ismét egy csillag lett (ez a 3. és egyben utolsó eset).

A 9-es csúcs elhagyásával Q^3 eltűnő hiperlapjai:

$$G_{16}^1, G_{17}^1, G_{18}^1, G_{19}^1, G_{20}^1, G_{21}^1, G_{22}^1, G_{23}^1, G_{24}^1, G_{25}^1, G_{26}^1, G_{27}^1.$$

Az identikus permutáció ismét megfelelő, hiszen az így megmaradó hiperlapok mindegyike hiperlapja P^3 -nak. A kimaradóak pedig, amelyeket nem kaptuk meg így:

$$F_3^3 = (1245), F_2^3 = (1256), F_{11}^3 = (1268), F_4^3 = (1567), F_6^3 = (2356).$$

Ezek szomszédsági gráfja pedig világos, hogy egy F_2^3 középpontú 4 ágú csillag.

Q^4

Az első 3 eset furcsa anomáliája után (1-8 csúcsok ugyanazt a politópot adták ősnek, a 9-es pedig egy különbözőt) megszakadt ez a tendencia, ugyanis a 2 különböző esetet szolgáltató N_20^9 esetén nem volt a 9-es csúcs semmilyen szempontból sem kitüntetett (és semelyik másik csúcs sem).

A 2-es, 5-ös és 7-es csúcsok

A 2-es, 5-ös illetve a 7-es csúcsokat elhagyva vezetett vissza a politóp P^3 -ra, s mindhárom esetben egy út volt a láthatósági gráf.

A 2-es csúcs elhagyása esetén keletkező példát részletezzük ki ebből a blokkból.

A 2-es csúcs eltűnéséhez elhagyandó hiperlapok a következők:

$$G_1^4, G_2^4, G_4^4, G_{10}^4, G_{11}^4, G_{12}^4, G_{16}^4, G_{20}^4, G_{22}^4, G_{23}^4, G_{25}^4, G_{27}^4.$$

A politóp megmaradt hiperlapjai átcímkezhettek az (14)(297)(38) permutációval például P^3 politóp hiperlapjaivá, s ez esetben a meg nem kapott hiperlapok:

$$F_{18}^3 = (1458), F_7^3 = (2367), F_{15}^3 = (2378), F_{17}^3 = (3478), F_{20}^3 = (4578).$$

Ez az öt hiperlap pedig szomszédságot tekintve egy utat határoz meg.

Az 1-es, 3-as, 4-es, 6-os, 8-as és 9-es csúcsok

A fennmaradó 6 csúcs (1, 3, 4, 6, 8, 9-es csúcsok) mindegyikében P^2 lett a megmaradó politóp, a láthatósági gráf pedig a már sokat emlegetett "T"-gráf.

A figyelmes Olvasó észrevehette, hogy a 9-es csúcs elhagyása esetén könnyű követni az eltűnő hiperlapokat, hiszen a [2] cikkben, s így e dolgozatban is úgy vannak a politópok hiperlapjai felsorolva, hogy a 9-es csúcs pontosan az utolsó 12 lapban szerepel. Mi azonban tartjuk magunkat ahhoz a trendhez, hogy a legkisebb sorszámú csúcsot hagyjuk el.

Hagyjuk tehát el az 1-es csúcsot! Ekkor az eltűnő hiperlapok:

$$G_1^4, G_2^4, G_3^4, G_7^4, G_8^4, G_{11}^4, G_{13}^4, G_{14}^4, G_{23}^4, G_{24}^4, G_{25}^4, G_{26}^4.$$

A csúcsokon ható (194863)(257) permutációval (többek között) elérhető, hogy megmaradó politópunk 15 hiperlapját megfeleltessük P^2 15 hiperlapjával. Az elhagyott 1-es csúcsból a láthatósági gráf csúcsainak megfelelő hiperlapokat, s ezek szomszédságának

leolvashatósága által az éleket is szolgáltatja az az 5 hiperlapja P^3 -nak, melyet így nem kaptunk meg:

$$F_2^3 = (1256), F_{11}^3 = (1268), F_6^3 = (2356), F_7^3 = (2367), F_9^3 = (3456).$$

Javasoljuk az Olvasónak, hogy maga próbálja meg felrajzolni az öt hiperlap alapján a láthatósági gráfot, s csak utána olvasson tovább! Ellenőrzésképp ismét egy "T"-gráfot kellett, hogy kapjon (melynek 3-as fokú csúcsa az F_6^3 , másodfokú csúcsa pedig az F_2^3 hiperlapnak megfelelő csúcs).

Esetek Q^5 -ből

További 3 esetet szolgáltatott az utolsó politóp. Itt ismét volt egy kitüntetett szerepű csúcs, ám az nem a 9-es, hanem az 5-ös volt.

Az 5-ös csúcs

Ez esetben a megmaradó politóp P^3 lett, a láthatósági gráf pedig a "T"-gráf.

Az 5-ös csúcs elhagyása után megszűnnek a rá illeszkedő hiperlapok, azaz a következők:

$$G_1^5, G_2^5, G_{10}^5, G_{11}^5, G_{12}^5, G_{18}^5, G_{19}^5, G_{21}^5, G_{22}^5, G_{24}^5, G_{26}^5, G_{27}^5.$$

A csúcsokon ható (13597)(268) permutáció szolgáltat egy ekvivalenciát a megmaradó 15 hiperlap és P^3 15 hiperlapja között. Azon öt hiperlap, mely nem talál párt Q^5 megmaradó hiperlapjaiból a következő:

$$F_{14}^3 = (1238), F_{16}^3 = (1348), F_8^3 = (3467), F_{17}^3 = (3478), F_{20}^3 = (4578).$$

A szomszédsági gráfja ennek az öt csúcsnak (ami egyben az elhagyott csúcsból a láthatósági gráf) pedig egy "T"-gráf.

A 2-es, 3-as és 7-es csúcsok

Ezen csúcsok esetén a megmaradó politóp P^2 , a láthatósági gráf pedig egy út.

A 2-es csúcson mutatjuk be a példát, így az erre illeszkedő hiperlapok fognak eltűnni:

$$G_1^5, G_2^5, G_{10}^5, G_{11}^5, G_{12}^5, G_{18}^5, G_{19}^5, G_{21}^5, G_{22}^5, G_{24}^5, G_{26}^5, G_{27}^5.$$

Permutációt nem nehéz találnunk, ugyanis a 2-es csúcsot egyszerűen eldobva, s a 9-es 2-essel címkézve már meg is kapjuk a keresett politópot, ami a P^2 . (A permutáció tehát a (29) csere.)

$$F_1^2 = (1234), F_{1238}^2 = (1245), F^2 = (2378), F^2 = (2678).$$

A láthatósági gráf pedig egy út.

Az 1-es, 4-es, 6-os, 8-as és 9-es csúcsok

Az őspolitóp itt is P^2 , viszont a láthatósági gráf ezen esetekben a "T"-gráf.

Demonstrálni ezt az esetet az 1-es csúcson fogjuk.

Az eltűnő hiperlapok:

$$G_1^5, G_2^5, G_3^5, G_7^5, G_8^5, G_{11}^5, G_{13}^5, G_{14}^5, G_{23}^5, G_{24}^5, G_{25}^5, G_{26}^5.$$

A megmaradó hiperlapokat a csúcsok (194823765) permutációja P^2 15 hiperlapjába viszi. A kimaradó lapok, melyek a láthatósági gráfot fogják alkotni:

$$F_4^2 = (1457), F_{19}^2 = (1478), F_{17}^2 = (2378), F_8^2 = (3467), F_{20}^2 = (3478).$$

Ellenőrizhető, hogy valóban a "T"-gráfot szolgáltatja ezen öt csúcs szomszédsági gráfja.

4. fejezet

További célok

Szakedolgozatom írása során az alapprobléma több lehetséges útírányt is kijelölt további kutatásokhoz. Az egyik viszonylag nagyobb terület lehet ténylegesen karakterizálni azon láthatósági gráfokat melyek szomszédsági politópot generálnak (ez potenciálisan a 3.4.1 sejtés bizonyításával, esetleg cáfolatával jár), s ezáltal szomszédsági politópok végtelen osztályainak generálására nyílhatna lehetőség. Ehhez nyilvánvalóan az kell, hogy ezeket a láthatósági gráfokat megvalósító pont valóban létezzen minden (vagy legalább jelentős számú) esetben. Ennek vizsgálata a problémát elviheti az analitikus geometria irányába.

Távlati cél egy olyan eljárást találni, melynek segítségével a meglévő szomszédsági politópokból további, eddig meg nem kapott szomszédsági politópok olyan végtelen osztályait generálják, melyek az összes kombinatorikus típus egy nemeltűnő hányadát alkotják.

Ábrák, táblázatok

P	$P^1 = C(8, 4)$	P^2	P^3
$\mathcal{F}(P)$	$F_1^1 = (1234)$	$F_1^2 = (1234)$	$F_1^3 = (1234)$
	$F_2^1 = (1267)$	$F_2^2 = (1256)$	$F_2^3 = (1256)$
	$F_3^1 = (1256)$	$F_3^2 = (1245)$	$F_3^3 = (1245)$
	$F_4^1 = (1245)$	$F_4^2 = (1457)$	$F_4^3 = (1567)$
	$F_5^1 = (2345)$	$F_5^2 = (2345)$	$F_5^3 = (2345)$
	$F_6^1 = (2356)$	$F_6^2 = (2356)$	$F_6^3 = (2356)$
	$F_7^1 = (2367)$	$F_7^2 = (2367)$	$F_7^3 = (2367)$
	$F_8^1 = (3467)$	$F_8^2 = (3467)$	$F_8^3 = (3467)$
	$F_9^1 = (3456)$	$F_9^2 = (3456)$	$F_9^3 = (3456)$
	$F_{10}^1 = (4567)$	$F_{10}^2 = (4567)$	$F_{10}^3 = (4567)$
	$F_{11}^1 = (1238)$	$F_{11}^2 = (1568)$	$F_{11}^3 = (1268)$
	$F_{12}^1 = (1278)$	$F_{12}^2 = (1578)$	$F_{12}^3 = (1678)$
	$F_{13}^1 = (2378)$	$F_{13}^2 = (5678)$	$F_{13}^3 = (2678)$
	$F_{14}^1 = (1348)$	$F_{14}^2 = (1268)$	$F_{14}^3 = (1238)$
	$F_{15}^1 = (3478)$	$F_{15}^2 = (2678)$	$F_{15}^3 = (2378)$
	$F_{16}^1 = (1458)$	$F_{16}^2 = (1238)$	$F_{16}^3 = (1348)$
	$F_{17}^1 = (4578)$	$F_{17}^2 = (2378)$	$F_{17}^3 = (3478)$
	$F_{18}^1 = (1568)$	$F_{18}^2 = (1348)$	$F_{18}^3 = (1458)$
	$F_{19}^1 = (1678)$	$F_{19}^2 = (1478)$	$F_{19}^3 = (1578)$
	$F_{20}^1 = (5678)$	$F_{20}^2 = (3478)$	$F_{20}^3 = (4578)$
$\mathcal{U}_1(P)$	$(12)(23)(34)(45)$	$(78)(18)$	$(67)(78)(18)$
	$(56)(67)(78)(18)$	$(23)(34)(56)$	$(23)(34)(45)$

4.1. táblázat. 8 csúcsú szomszédsági politópok hiperlapjai és univerzális élei [2] I táblázat

P	Hiperlapok				
Q^1	$G_1^1 = (1234)$	$G_2^1 = (2345)$	$G_3^1 = (2367)$	$G_4^1 = (3467)$	$G_5^1 = (3456)$
	$G_6^1 = (4567)$	$G_7^1 = (1238)$	$G_8^1 = (1278)$	$G_9^1 = (2378)$	$G_{10}^1 = (1348)$
	$G_{11}^1 = (3478)$	$G_{12}^1 = (1458)$	$G_{13}^1 = (4578)$	$G_{14}^1 = (1678)$	$G_{15}^1 = (5678)$
	$G_{16}^1 = (1689)$	$G_{17}^1 = (5689)$	$G_{18}^1 = (1589)$	$G_{19}^1 = (1679)$	$G_{20}^1 = (2679)$
	$G_{21}^1 = (1279)$	$G_{22}^1 = (3569)$	$G_{23}^1 = (2369)$	$G_{24}^1 = (2359)$	$G_{25}^1 = (1459)$
	$G_{26}^1 = (1249)$	$G_{27}^1 = (2459)$			
Q^2	$G_1^2 = (1234)$	$G_2^2 = (1256)$	$G_3^2 = (1245)$	$G_4^2 = (1567)$	$G_5^2 = (2345)$
	$G_6^2 = (2356)$	$G_7^2 = (2367)$	$G_8^2 = (3456)$	$G_9^2 = (4567)$	$G_{10}^2 = (1268)$
	$G_{11}^2 = (1678)$	$G_{12}^2 = (2678)$	$G_{13}^2 = (1238)$	$G_{14}^2 = (1458)$	$G_{15}^2 = (1578)$
	$G_{16}^2 = (4589)$	$G_{17}^2 = (5789)$	$G_{18}^2 = (4579)$	$G_{19}^2 = (1489)$	$G_{20}^2 = (1389)$
	$G_{21}^2 = (1349)$	$G_{22}^2 = (2789)$	$G_{23}^2 = (2389)$	$G_{24}^2 = (2379)$	$G_{25}^2 = (4679)$
	$G_{26}^2 = (3469)$	$G_{27}^2 = (3679)$			
Q^3	$G_1^3 = (1234)$	$G_2^3 = (2345)$	$G_3^3 = (2367)$	$G_4^3 = (3467)$	$G_5^3 = (3456)$
	$G_6^3 = (4567)$	$G_7^3 = (1678)$	$G_8^3 = (2678)$	$G_9^3 = (1238)$	$G_{10}^3 = (2378)$
	$G_{11}^3 = (1348)$	$G_{12}^3 = (3478)$	$G_{13}^3 = (1458)$	$G_{14}^3 = (1578)$	$G_{15}^3 = (4578)$
	$G_{16}^3 = (1679)$	$G_{17}^3 = (5679)$	$G_{18}^3 = (1579)$	$G_{19}^3 = (1689)$	$G_{20}^3 = (2689)$
	$G_{21}^3 = (1289)$	$G_{22}^3 = (3569)$	$G_{23}^3 = (2369)$	$G_{24}^3 = (2359)$	$G_{25}^3 = (1459)$
	$G_{26}^3 = (1249)$	$G_{27}^3 = (2459)$			
Q^4	$G_1^4 = (1234)$	$G_2^4 = (1245)$	$G_3^4 = (1457)$	$G_4^4 = (2345)$	$G_5^4 = (3467)$
	$G_6^4 = (4567)$	$G_7^4 = (1568)$	$G_8^4 = (1578)$	$G_9^4 = (5678)$	$G_{10}^4 = (2678)$
	$G_{11}^4 = (1238)$	$G_{12}^4 = (2378)$	$G_{13}^4 = (1348)$	$G_{14}^4 = (1478)$	$G_{15}^4 = (3478)$
	$G_{16}^4 = (2359)$	$G_{17}^4 = (3459)$	$G_{18}^4 = (4569)$	$G_{19}^4 = (3469)$	$G_{20}^4 = (2379)$
	$G_{21}^4 = (3679)$	$G_{22}^4 = (2679)$	$G_{23}^4 = (1259)$	$G_{24}^4 = (1569)$	$G_{25}^4 = (1289)$
	$G_{26}^4 = (1689)$	$G_{27}^4 = (2689)$			
Q^5	$G_1^5 = (1234)$	$G_2^5 = (1245)$	$G_3^5 = (1457)$	$G_4^5 = (3467)$	$G_5^5 = (3456)$
	$G_6^5 = (4567)$	$G_7^5 = (1568)$	$G_8^5 = (1578)$	$G_9^5 = (5678)$	$G_{10}^5 = (2678)$
	$G_{11}^5 = (1238)$	$G_{12}^5 = (2378)$	$G_{13}^5 = (1348)$	$G_{14}^5 = (1478)$	$G_{15}^5 = (3478)$
	$G_{16}^5 = (3569)$	$G_{17}^5 = (3459)$	$G_{18}^5 = (2459)$	$G_{19}^5 = (2349)$	$G_{20}^5 = (3679)$
	$G_{21}^5 = (2379)$	$G_{22}^5 = (2679)$	$G_{23}^5 = (1569)$	$G_{24}^5 = (1259)$	$G_{25}^5 = (1689)$
	$G_{26}^5 = (1289)$	$G_{27}^5 = (2689)$			

4.2. táblázat. Nem varrott 9 csúcsú 4-dimenziós szomszédsági politópok [2] II táblázat

	Q^1	Q^2	Q^3	Q^4	Q^5
1	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1238 \\ 1256 \\ 1268 \\ 2678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 2345 \\ 2356 \\ 2367 \\ 2678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1348 \\ 1457 \\ 1478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 1268 \\ 2356 \\ 2367 \\ 3456 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1457 \\ 1478 \\ 2378 \\ 3467 \\ 3478 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1478 \\ 2367 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 2345 \\ 2356 \\ 2367 \\ 2678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1245 \\ 1256 \\ 1348 \\ 1478 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1458 \\ 2367 \\ 2378 \\ 3478 \\ 4578 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1238 \\ 1245 \\ 2378 \\ 2678 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1457 \\ 1578 \\ 2378 \\ 2678 \\ 5678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1238 \\ 1256 \\ 1268 \\ 2378 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1238 \\ 1268 \\ 1457 \\ 1568 \\ 1578 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1568 \\ 2678 \\ 3467 \\ 4567 \\ 5678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1268 \\ 1568 \\ 3467 \\ 4567 \\ 5678 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1457 \\ 1578 \\ 2378 \\ 2678 \\ 5678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1238 \\ 1256 \\ 1268 \\ 2378 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 2345 \\ 3456 \\ 3467 \\ 3478 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 1268 \\ 2356 \\ 2367 \\ 3456 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 2356 \\ 2367 \\ 2678 \\ 3456 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1478 \\ 2367 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 2345 \\ 2356 \\ 2367 \\ 2678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1348 \\ 1457 \\ 1478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1238 \\ 1348 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1238 \\ 1348 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4578 \end{pmatrix}$

4.1. ábra. A 45 nem varrott 9 csúcsú szomszédsági politóp esetén az elhagyott csúcsokból látható hiperlapok táblázata (1-5 csúcsok). A mátrixok sorai egy adott hiperlap négy csúcsát jelentik.

	Q^1	Q^2	Q^3	Q^4	Q^5
6	$\begin{pmatrix} 1478 \\ 2367 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1457 \\ 1578 \\ 2367 \\ 2678 \\ 5678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1348 \\ 1457 \\ 1478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1568 \\ 2678 \\ 3467 \\ 4567 \\ 5678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1348 \\ 2378 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1457 \\ 1578 \\ 2378 \\ 2678 \\ 5678 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1478 \\ 2378 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 2345 \\ 3456 \\ 3467 \\ 3478 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1458 \\ 2367 \\ 2378 \\ 3478 \\ 4578 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1238 \\ 1348 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4567 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 2345 \\ 2356 \\ 2367 \\ 2378 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1234 \\ 1238 \\ 1256 \\ 1268 \\ 2378 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1238 \\ 1268 \\ 1457 \\ 1568 \\ 1578 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 1268 \\ 2356 \\ 2367 \\ 3456 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 2345 \\ 2356 \\ 2367 \\ 2678 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 1256 \\ 1267 \\ 1568 \\ 2356 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1348 \\ 2378 \\ 3467 \\ 3478 \\ 4578 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1245 \\ 1256 \\ 1268 \\ 1567 \\ 2356 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 1268 \\ 2356 \\ 2367 \\ 3456 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1256 \\ 1268 \\ 2345 \\ 2356 \\ 2367 \end{pmatrix}$

4.2. ábra. A 45 nem varrott 9 csúcsú szomszédsági politóp esetén az elhagyott csúcsokból látható hiperlapok táblázata (6-9 csúcsok). A mátrixok sorai egy adott hiperlap négy csúcsát jelentik.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom első sorban témavezetőmnek, Dr. Fodor Ferencnek a sok türelméért és segítségért, továbbá Vígh Viktornak a szakmai segítségéért és a példákért.

Szeretnék még köszönetet mondani Pallagi Jánosnak a kódolással kapcsolatos ötletekért és a lektorálásért, illetve Juhász Fruzsínának a lektorálásért, valamint mindenkinek aki valamilyen módon hozzájárult diplomamunkám elkészüléséhez.

Nyilatkozat

Alulírott Zarnócz Tamás kijelentem, hogy a diplomamunkámban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Irodalomjegyzék

- [1] Amos Altshuler and Ido Shemer, *Construction theorems for polytopes*, Israel J. Math. **47** (1984), no. 2-3, 99–110.
- [2] Amos Altshuler and Leon Steinberg, *Neighborly 4-polytopes with 9 vertices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **15** (1973), 270–287.
- [3] Wendy Finbow-Singh, *Low dimensional neighbourly polytopes*, 2004. Thesis (Ph.D.)–University of Calgary (Canada).
- [4] Branko Grünbaum, *Convex polytopes*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 221, Springer-Verlag, New York, 2003. Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.
- [5] Carl W. Lee and Matthew M. Menzel, *A generalized sewing construction for polytopes*, Israel J. Math. **176** (2010), 241–267.
- [6] P. McMullen, *The maximum numbers of faces of a convex polytope*, Mathematika **17** (1970), 179–184.
- [7] Ido Shemer, *Neighborly polytopes*, Israel J. Math. **43** (1982), no. 4, 291–314.
- [8] László Szabó, *Konvex geometria*, ELTE Jegyzet, 1996.
- [9] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1311028 (96a:52011)