

Orsókonvex halmazok tulajdonságainak vizsgálata

Gyovai Antal

Témavezető: Dr. Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2014

Tartalomjegyzék

1. Tartalmi összefoglaló	3
2. Előkészületek	4
2.1. Általános jelölések	4
2.2. Orsókonvex halmazok alaptulajdonságai	5
2.3. Konvex testek alapmértékei	13
3. Orsókonvex test duálisának alapmértékei az eredeti orsókonvex test alapmértékei- nek függvényében	16
4. Orsókonvex halmazok „gömbölyítése”	20
5. Adott átlagszélességű orsókonvex testek térfogatának és felszínének becslése	23
5.1. Alapmértékek segítségével	23
5.2. Elemi eszközökkel	25
6. A dualitás képzés és a centrális szimmetrizálás kapcsolata	28

1. fejezet

Tartalmi összefoglaló

A dolgozatunk az orsókonvex halmazok néhány tulajdonságait vizsgálja. Először a konvexitás definíciójában levő szakasz mintájára bevezetjük az orsó fogalmát, majd ennek segítségével az orsókonvexitást. Síkban mutatunk orsókonvex testre egy egyszerű példát. Majd a támaszhipersíkok mintájára bevezetjük a támaszgömb fogalmát, és ennek segítségével ekvivalens megfogalmazásokat adunk az orsókonvexitásra. A lineáris konvexitásban használatos poláris analógiát, a duálist definiáljuk orsókonvex halmazokra. Megmutatjuk, hogy lineárisan konvex testek esetében a polárisra igaz állítások hasonlóan igazak lesznek orsókonvex test duálisára. Majd a támaszfüggvény segítségével mutatunk egy érdekes összefüggést egy S orsókonvex test és annak S^* duálisa között.

A következő részben definiáljuk az ún. alapmértékeket. Ezekre a mennyiségekre bizonyos simasági feltételek mellett pontos formulákat mutatunk. Három dimenzióban ezek a mennyiségek a térfogattal, felszínnel illetve az átlagszélességgel lesznek arányosak. Ezután továbbra is a háromdimenziós térben dolgozva kiszámoljuk egy orsókonvex test alapmértékeit a duális test alapmértékeinek segítségével. Majd az S orsókonvex test és duálisának két speciális elhelyezkedésében becslést mutatunk S térfogatára illetve felszínére az átlagszélesség segítségével.

Ezután definiálunk orsókonvex halmazok ún. „gömbölyített” sorozatát, amely Hausdorff metrikában egyre közelebb lesz az egységgömbhöz. Ezen sorozat a tartalmazásra nézve monoton növekedő és felülről az egységgömb által korlátolt lesz. Felhasználva ezen sorozatot újabb becsléseket ismertetünk 3 dimenzióban a felszínre illetve térfogatra a kevertmértékek segítségével. Majd mutatunk elemi eszközökkel ennél jobb becsléseket adott átlagszélességű orsókonvex testekre.

Az utolsó részben a centrális szimmetrizáció és a duális képzés kapcsolatát vizsgáljuk.

2. fejezet

Előkészületek

2.1. Általános jelölések

Dolgozatunkban a d -dimenziós euklideszi teret $\mathbb{E}^d$, az origót o fogja jelölni. A pontokat és a pontba mutató helyvektorokat is kis betűvel, a halmazokat nagybetűvel jelöljük.

Két vektor skaláris szorzatát a szokásos módon: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jelöli. Egy v vektor hosszán az euklideszi normáját értjük, amit $\|v\|$ -vel jelölünk vagy skaláris szorzatként felírva $\sqrt{\langle v, v \rangle}$ -t írunk. Két pont távolságán a szokásos Euklideszi távolságot értjük, amit $d(\cdot, \cdot)$ fog jelölni.

Egy $K \subset \mathbb{E}^d$ halmaz belsejét, határát illetve átmérőjét rendre $\text{int}(K)$, $\text{bd}(K)$, $\text{diam}(X)$ fogja jelölni.

Az egységsugarú, origó középpontú d -dimenziós gömböt B^d -vel, határát S^{d-1} -gyel jelöljük.

Legyen adott $A, B \subset \mathbb{E}^d$ két nemüres halmaz, ezek Minkowski összegén a következő halmazt értjük:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

A $p \in \mathbb{E}^d$ középpontú r sugarú gömböt $p + rB^d$ Minkowski összegként fogjuk felírni.

A d -dimenziós térfogatot $V(\cdot)$, a felszínt $A(\cdot)$ jelöli. Speciálisan az egységsugarú d -dimenziós gömb térfogatára a κ_d , felszínére az ω_d jelölést használjuk.

A d -dimenziós Hausdorff mértéket a $\mathcal{H}^d$ szimbólummal jelöljük. Speciálisan, $\mathcal{H}^d$ megegyezik a d -dimenziós térfogattal.

2.2. Orsókonvex halmazok alaptulajdonságai

Ebben a dolgozatban alapvetően a Bezdek Károly által használt terminológiát fogjuk követni (lásd [7] [8]). A konvexitáshoz hasonló módon fogjuk bevezetni az orsókonvexitás fogalmát. Emlékezzünk vissza, hogy mit is jelent az, hogy egy $K \subset \mathbb{E}^d$ halmaz konvex! Legegyszerűbb megfogalmazásban: egy $K \subset \mathbb{E}^d$ halmaz konvex, ha bármely két pontja által meghatározott szakaszt tartalmazza. Az orsókonvex halmazoknál a szakasz helyét az orsó fogja átvenni. Először definiáljuk, hogy mit is értünk pontosan két pont által meghatározott orsó alatt:

2.2.1. Definíció. Legyen $r > 0$ valós szám és $p, q \in \mathbb{E}^d$ két pont. Ha $d(p, q) \leq 2r$, akkor a p és q által meghatározott r -sugarú $[p, q]_s^r$ orsó az összes p -t és q -t tartalmazó r -sugarú zárt gömb metszete. Ha pedig $d(p, q) > 2r$, akkor $[p, q]_s^r$ legyen a teljes $\mathbb{E}^d$ tér.

Vegyük észre, hogy amennyiben $d(p, q) = 2r$, akkor $[p, q]_s^r$ éppen a p -t és q -t tartalmazó $2r$ -sugarú gömb.

Megjegyezzük, hogy a p és q által meghatározott r -sugarú orsót másképpen is lehet definiálni (lásd [1] vagy [8]): az összes legalább r -sugarú p és q végpontú rövidebb körív uniójának lezártja. Megmutatható, hogy ez a két definíció lényegileg ekvivalens.

Most, hogy megadtuk az orsó fogalmát, definiálhatjuk, hogy mikor nevezünk egy $S \subset \mathbb{E}^d$ halmazt orsókonvexnek.

2.2.2. Definíció. Az $S \subset \mathbb{E}^d$ halmaz r -sugárral orsókonvex, ha tetszőleges $p, q \in S$ esetén $[p, q]_s^r \subseteq S$.

Ebben a dolgozatban mi elsősorban egységsugarú orsókonvex halmazokat fogunk vizsgálni, ezért ha másképpen nem mondjuk, akkor mindig feltesszük, hogy $r = 1$, valamint a p és q által meghatározott 1 sugarú orsóra az egyszerűsített $[p, q]_s$ jelölést fogjuk használni. Ezentúl, ha külön nem hangsúlyozzuk, akkor orsókonvex test alatt mindig 1 sugárral orsókonvex testet értünk.

2.2.3. Definíció. A zárt orsókonvex halmazokat, amelyek belseje nem üres 2 dimenzióban orsókonvex lemezeknek, 3 és magasabb dimenziókban orsókonvex testeknek nevezzük.

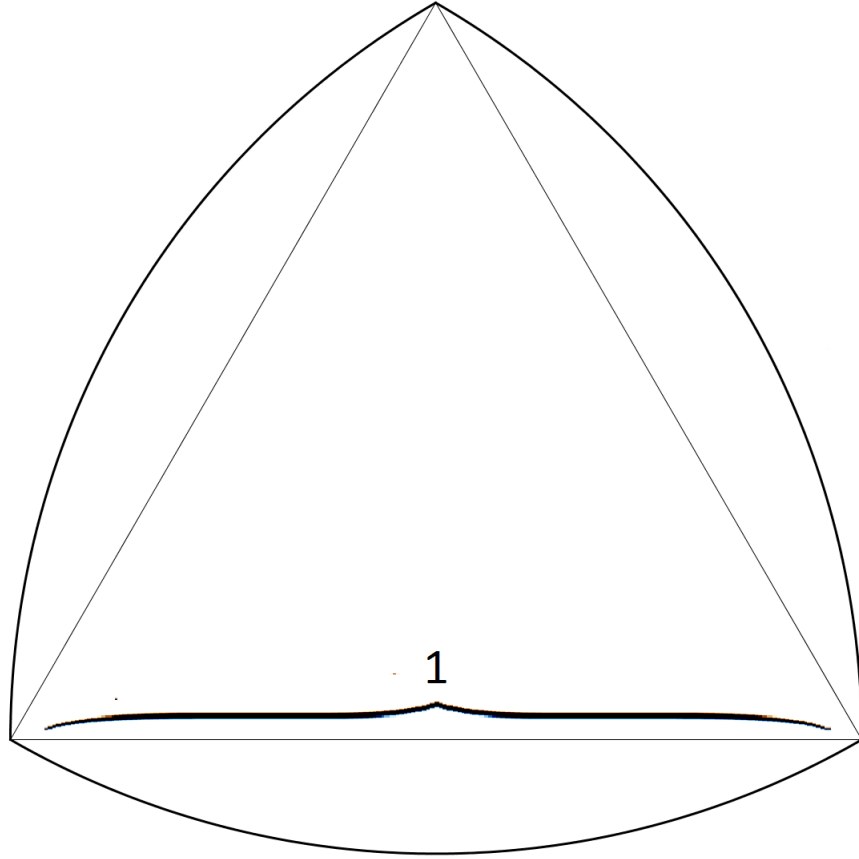
A következőekben mutatunk példát orsókonvex testekre, sőt egy egész test osztályt adunk, ami orsókonvex lesz.

2.2.4. Definíció. Az olyan $\mathbb{E}^d$ -beli testeket, amelyekre az teljesül, hogy tetszőleges $u \in S^{d-1}$ irányra vett merőleges támaszhipersíkok távolsága minden u irányra megegyezik, állandó szélességűeknek nevezzük.

A következő egyszerű állítás megtalálható például a [6] cikkben is.

2.2.5. Állítás. *Az állandó szélességű testek orsókonvexek a szélességük sugarával.*

Síkban a legegyszerűbb példa állandó szélességű alakzatra a Reuleaux-háromszög (lásd 2.2 ábra), melyet úgy kapunk, hogy veszünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget, majd vesszük a háromszög csúcsaiból rajzolt egységnyi sugarú körök metszetét.



2.1. ábra. Egy állandó szélességű halmaz a síkban: a Reuleaux-háromszög.

A továbbiakban az orsókonvexitás néhány ekvivalens megfogalmazását fogjuk adni. Ehhez szükségünk lesz a következő definíciókra:

2.2.6. Definíció. *Egy $X \subset \mathbb{E}^d$ halmaz által generált orsókonvex halmaznak a következőt nevezzük:*

$$\bigcap_{x \in X} (B^d + x)$$

Ha $\text{diam}(K) > 2$, akkor az üreshalmazz, ha $\text{diam}(K) = 2$, akkor az egységsgömböt kapjuk.

Ha $X \subset \mathbb{E}^d$ csak véges sok pontot tartalmaz, akkor a generált orsókonvex halmazt két dimenzióban körpoligonnak, magasabb dimenziókban gömbpoliédernek is szokták nevezni.

2.2.7. Definíció. Ha egy $B^d + c$ gömb tartalmaz egy $S \subset \mathbb{E}^d$ halmazt és egy $x \in \text{bd } S$ pontra $x \in S^{d-1} + c$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a c középpontú gömb támaszgömbje S -nek az x pontban.

Az orsókonvex halmazok karakterizációjáról szóló következő állítás megtalálható a [8] cikk 5. oldalán a Corollary 3.4-ben:

2.2.8. Állítás. Legyen S egy zárt, konvex halmaz, ekkor a következők ekvivalensek:

- (i) S orsókonvex.
- (ii) S az őt tartalmazó egységsugarú gömbök metszete.
- (iii) Tetszőleges $x \in \text{bd } S$ -re létezik támaszgömbje S -nek x -ben.

Nyilvánvaló módon egy orsókonvex test szigorúan konvex a szokásos értelemben, hiszen tartalmazza bármely két pontja által meghatározott orsót, ami tartalmazza a két pontot összekötő szakaszt is. Ismert, hogy bármely konvex test előáll zárt félterek metszeteként, ezen zárt félterek határát támaszhipersíkoknak nevezzük. Orsókonvex testeknél a zárt félterek szerepét a zárt egységsugarú gömbök, a támaszhipersíkokét a támaszgömbök fogják átvenni. Azonban nem csak gömbökkel lehet helyettesíteni a zárt féltereket a konvexitás definíciójában. Az orsókonvexitás fogalmát először valószínűleg Mayer 1935-ös cikkében használta, bár ő ezt a fogalmat tágabban értelmezte és „überkonvexitásnak” nevezte (lásd [1] cikk). Az orsókonvexitást vizsgálta többek közt Bieberbach [9], Heppes és Révész [2], Straszewicz [11] síkban illetve térben. A közelmúltban Bezdek, Lángi, Naszódi, Papez [8] és Kupitz, Martini, Perles [12] kezdte el részletesebb tanulmányozását a témakörnek. Többek közt vizsgálták például azt, hogy a szokásos konvexitásra igaz állítások közül melyek és hogyan vihetők át orsókonvexitásra. Analóg állításokat mondtak ki a Kirchberger, Carathéodory tételekre, vizsgálták az orsókonvex testek szétválaszthatósági tulajdonságait. Az érdeklődő olvasó az orsókonvex halmazokról további történeti áttekintőt találhat például Lángi, Naszódi, Talata [13] cikkében.

A konvex testeknél bevezetett polaritáshoz hasonló tulajdonságú ponthalmazt az orsókonvex halmazokra is lehet definiálni. Ezen ponthalmazt az orsókonvex halmaz duálításának fogjuk nevezni. Mint majd később kiderül, konvex test polárisára igaz állítások hasonló formában érvényesek lesznek orsókonvex test duálisára.

2.2.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $x \in \mathbb{E}^d$ pont generálopontja az S orsókonvex testnek, ha $S \subset B^d + x$. S generálopontjainak halmazát S duálisának nevezzük. Jelölése: S^* .

2.2.10. Állítás. Legyen $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test. Ekkor S előáll generálopontjaiba állított egy-séggömbök metszeteként:

$$S = \bigcap_{x \in S^*} (x + B^d).$$

Bizonyítás. A generálopont definíciójából: bármely $x \in S^*$ -ra $S \subseteq (x + B^d)$, így:

$$S \subseteq \bigcap_{x \in S^*} (x + B^d).$$

A fordított irányú tartalmazás bizonyításához tegyük fel, hogy létezik egy

$$p \in \bigcap_{x \in S^*} (x + B^d)$$

pont, amire $p \notin S$. Ekkor S szigorú konvexitása miatt (hiszen orsókonvex) egyértelműen létezik egy $y \in \mathbb{E}^d$ pont, amelyre: a $d(y, p)$ távolság minimális. Ebben az y pontban a 2.2.8-as állítás szerint létezik támaszgömbje y -nak. Ez a támaszgömb nem tartalmazza a p pontot, viszont középpontja generálopontja S -nek. $\square$

Most nézzünk néhány egyszerű tulajdonságát a duálitásnak:

2.2.11. Állítás. Tetszőleges S orsókonvex test esetén S^* is orsókonvex.

Bizonyítás. A 2.2.8-as állítás szerint elég megmutatni, hogy tetszőleges $q \in \text{bd } S^*$ pontra létezik támaszgömbje S^* -nak q -ban.

Legyen $q \in \text{bd } S^*$ tetszőleges. Mivel q generálopontja S -nek, így $S \subseteq q + B^d$. Nyilván a $q + B^d$ gömb támaszgömbje S -nek valamely $p \in \text{bd } S$ pontban. Különben vagy lenne pontja S -nek az $q + B^d$ gömbön kívül, vagy bármely $z \in \text{bd } S$, $y \in \text{bd}(B^d + q)$ -ra: $d(z, y) > 0$ lenne. Legyen $t \in \text{bd } S$ olyan, amire $d(t, y)$ minimális (S szigorú konvexitása miatt egyértelműen létezik ilyen tulajdonságú pont). Ekkor a

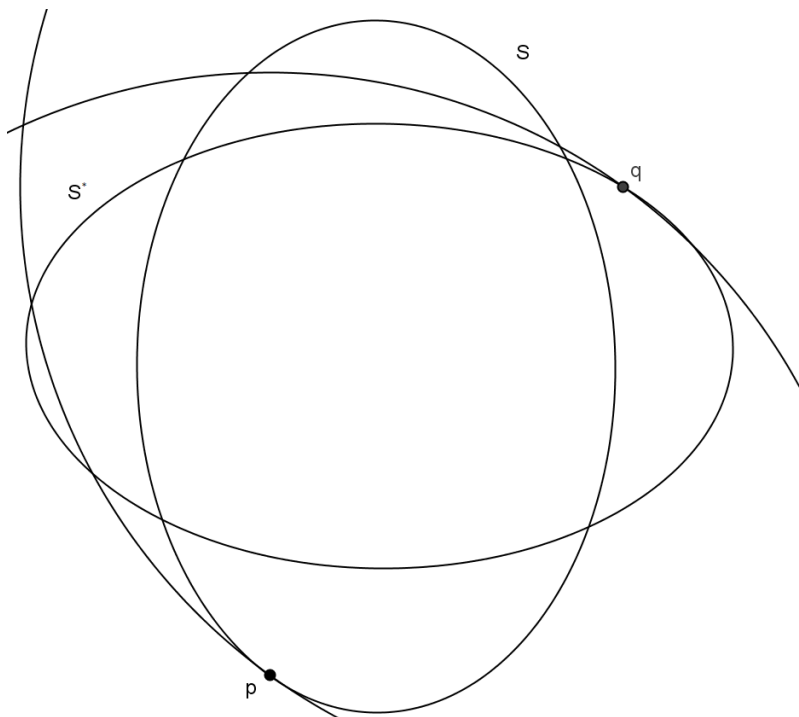
$$d(t, y) \frac{\vec{tq}}{\|\vec{tq}\|} + q$$

pont generálopontja lesz S -nek, viszont nem lesz benne S^* -ban.

Tehát $q + B^d$ támaszgömbje S -nek p -ben, így a $p + B^d$ gömb határán tartalmazza q -t.

$S^* \subseteq p + B^d$, ellenkező esetben lenne egy $t \in S^*$ pont, hogy: $t \notin p + B^d$, de ekkor a t pont nem lehet generáló pontja S -nek, hiszen $d(t, p) > 1$, ellentmondásra jutottunk.

Azaz kaptuk, hogy tetszőleges $q \in \text{bd } S^*$ -ra létezik $p \in \text{bd } S$ pont, hogy a $p + B^d$ támaszgömbje S^* -nak q -ban. $\square$



2.2. ábra. A duális orsókonvexitása.

2.2.12. Állítás. *Orsókonvex test duálisának duálisa önmaga: $S^{**} = S$*

Bizonyítás. $S \subset S^{**}$: Legyen $s \in S$ tetszőleges. Ekkor $\forall s^* \in S^*$ pontra $d(s, s^*) \leq 1$, így $s \in S^{**}$.

$S^{**} \subset S$: Legyen $s^{**} \in S^{**}$ tetszőleges. Ekkor $\forall s^* \in S^*$ pontra $d(s^{**}, s^*) \leq 1$, így $s^{**} \in S$. $\square$

A fenti két állítás hasonló formában igaz a (lineárisan) konvex halmazok polárisára. A következő állítás azonban rávilágít arra, hogy a két fogalom nem teljesen hasonló.

2.2.13. Állítás. *Legyen $S_1, S_2 \subset \mathbb{B}^d$ két (1 sugárral) orsókonvex test. Ekkor az $S_1 + S_2$ Minkowski összeg 2 sugárral orsókonvex.*

Bizonyítás. A 2.2.8 állítást felhasználva elegendő megmutatni, hogy bármely $x \in \text{bd}(S_1 + S_2)$ pontra létezik 2 sugárú támaszgömbje $S_1 + S_2$ -nek x -ben.

Legyen $x \in \text{bd}(S_1 + S_2)$ tetszőleges. Tekintsük egy x -beli H támaszhipersíkját $S_1 + S_2$ -nek (ez a hipersík nem biztos, hogy egyértelmű). Legyen $u_{S_1+S_2}(x)$ ezen H hipersík külső egységnyi normálvektora. Vegyünk olyan H_1, H_2 támaszhipersíkjait S_1, S_2 -nek, amelyek párhuzamosak H -val és külső normálvektoraik megegyeznek H -éval. Legyenek a hipersíkok metszetei az orsókonvex testekkel $s_1 = H_1 \cap S_1$, $s_2 = H_2 \cap S_2$ (ezek a pontok egyértelműek, hiszen az orsókonvex testek

szigorúan konvexek). Nyilván $x = s_1 + s_2$, hiszen az $u_{S_1+S_2}(x)$ irányban a H hipersíkhöz legközelebb az s_1, s_2 pontok esnek S_1, S_2 -ből, így csak ezek összegeként állhat elő az $x \in S_1 + S_2$ pont. Mivel S_1, S_2 testek orsókonvexek, ezért léteznek egységsugarú támaszgömbjeik s_1, s_2 -ben (ezek egyúttal érintik a H_1, H_2 hipersíkokat is). Legyenek ezek a támaszgömbök: $p_1 + B^d, p_2 + B^d$, azaz: $S_1 \subseteq p_1 + B^d, S_2 \subseteq p_2 + B^d$. Vegyük ezen két tartalmazás Minkowski összegét:

$$S_1 + S_2 \subseteq p_1 + p_2 + 2B^d.$$

Nyilván

$$x \in \text{bd}(p_1 + p_2 + 2B^d),$$

hiszen $x = s_1 + s_2$ és az u irányban $d(p_1, s_1) = 1, d(p_2, s_2) = 1$, így $d(p_1 + p_2, x) = 2$. Vagyis az $x \in \text{bd}(S_1 + S_2)$ pontban a $p_1 + p_2 + 2B^d$ gömb 2 sugarú támaszgömbje $S_1 + S_2$ -nek. $\square$

Ezek szerint az $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ Minkowski összeg 1 sugárral orsókonvex.

A konvex testeknél alapvető fontosságú a támaszfüggvény, amely egyúttal egyértelműen meg is határozza az adott konvex testet. Orsókonvex testeknél is hasznos lesz a számunkra ez a fogalom.

2.2.14. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{E}^d$ egy nemüres zárt, konvex halmaz. A tér minden egyes x pontjához hozzárendeljük a következő függvényt:

$$h_K(x) := \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K\}.$$

Ezt a függvényt a K halmaz támaszfüggvényének nevezzük.

Vegyük észre, hogy:

$$\begin{aligned} h_K(x) &= \sup\{\langle x, y \rangle : y \in K\} \\ &= \sup\{\langle -x, -y \rangle : y \in K\} = \sup\{\langle -x, y \rangle : y \in -K\} \\ &= h_{-K}(-x) \end{aligned}$$

Ha a fenti definícióban tetszőleges $x \in \mathbb{E}^d$ pont helyett csak $x \in S^{d-1}$ pontokra értékeljük ki $h_K(x)$ -t, akkor az origó és az $o\vec{x}$ külső normálisú támaszhipersík előjeles távolságát kapjuk. Ezt tekinthetjük úgy is, hogy az $x \in S^{d-1}$ pont helyett az $u = o\vec{x}$ irányra számoljuk ki $h_K(x)$ -t. A továbbiakban így is teszünk és $h_K(u)$ alatt mindig az u irányra számolt $h_K(x)$ -t értjük.

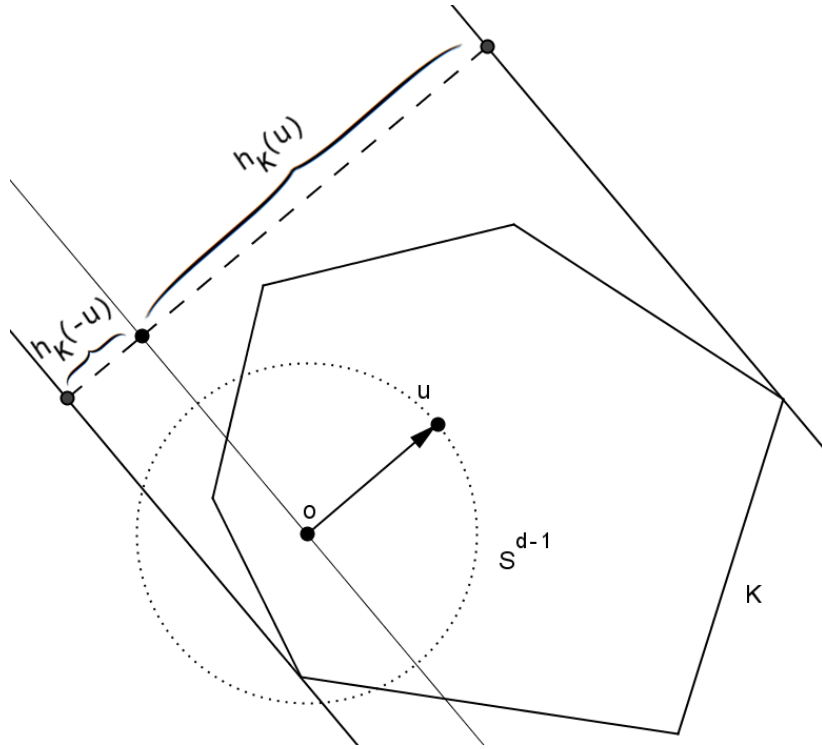
A támaszfüggvény segítségével a korábban már használt szélesség fogalmát pontosabbá tehetjük:

2.2.15. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{E}^d$ korlátos, zárt halmaz. Egy adott $u \in S^{d-1}$ irányban vett $W(u)$ szélessége K -nak:

$$W(u) := h_K(u) + h_K(-u).$$

Ha minden u irányra vesszük az ezirányú szélességeket, majd kiátlagoljuk ezeket, akkor kapjuk az ún. $W(K)$ átlagszélességet, amit a következőképpen lehet kiszámolni:

$$\begin{aligned} W(K) &= \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} W(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} h_K(u) + h_K(-u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} h_K(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{2}{d\kappa_d} \int_{S^{d-1}} h_K(u) \mathcal{H}^{d-1}(du). \end{aligned}$$



2.3. ábra. K konvex test támaszfüggvénye.

Most belátjuk a következő egyszerű állítást.

2.2.16. Állítás. Legyen $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test, $u \in S^{d-1}$ tetszőleges irány. Ekkor:

$$h_S(u) + h_{S^*}(-u) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen az u külső normálisú támaszhipersík metszete S -sel p . Ekkor a 2.2.11 állítás bizonyításában használt gondolatmenet szerint létezik $q \in \text{bd } S^*$, hogy a $B^d + q$ gömb támaszgömbje S -nek p -ben és $B^d + p$ támaszgömbje S^* -nak q -ban. Így $d(p, q) = 1$ és S -nek p -ben, S^* -nak q -ban vett támaszhipersíkjai párhuzamosak és merőlegesek az u irányra. Tehát:

$$1 = d(p, q) = W(u) = h_S(u) + h_{S^*}(-u).$$

□

2.2.17. Következmény. Bármely $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex testre: $S + (-S^*) = B^d$, azaz ha veszünk egy orsókonvex testet majd hozzáadjuk a duálisának az origóra vonatkozó centrális tükröképét, akkor az egységgömböt kapjuk.

Bizonyítás. Felhasználva az előző állítást, illetve a támaszfüggvény definíciója után leírt észrevételt:

$$1 = h_S(u) + h_{S^*}(-u) = h_S(u) + h_{-S^*}(u) = h_{S+(-S^*)}(u)$$

Tehát tetszőleges irányban vett támaszhipersík egységnyi távolságra van az origótól. Mivel az egységgömb is ilyen tulajdonságú, valamint a támaszfüggvény egyértelműen meghatároz egy konvex testet kapjuk, hogy $S + (-S^*) = B^d$. □

2.2.18. Következmény. Legyen S orsókonvex test. Ekkor $S = S^*$, akkor és csak akkor, ha S 1 állandó szélességű.

Bizonyítás. Ha $S = S^*$, akkor 2.2.17-ből kapjuk, hogy:

$$W(u) = h_S(u) + h_S(-u) = h_S(u) + h_{S^*}(-u) = h_S(u) + h_{-S^*}(u) = 1$$

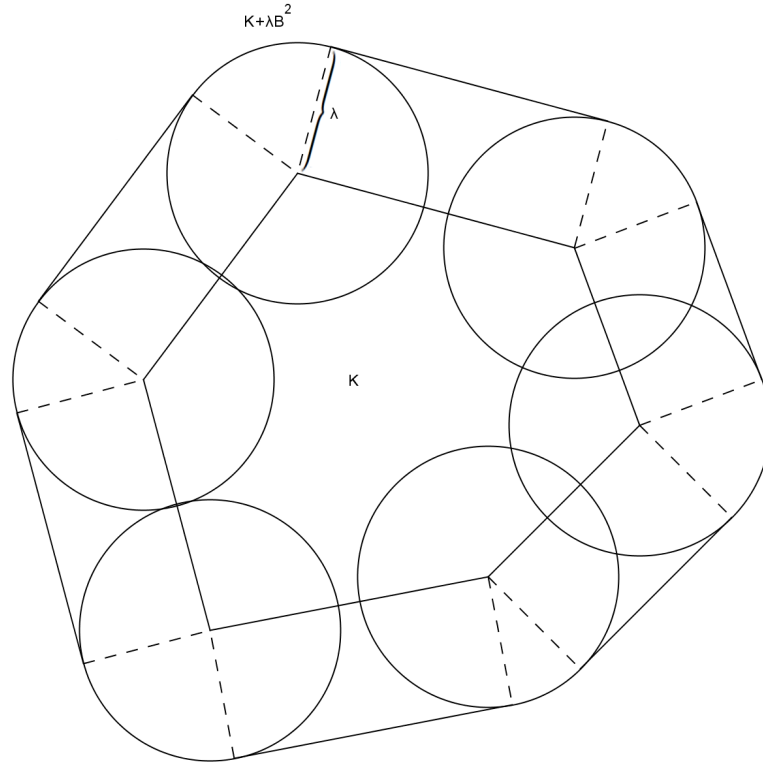
azaz tetszőleges $u \in S^{d-1}$ irányban S szélessége 1.

Ha S szélessége minden irányban 1, akkor: bármely $u \in S^{d-1}$ -re: $W(u) = h_S(u) + h_S(-u) = 1$ és az előző tételből: $h_S(u) + h_{S^*}(-u) = 1$, így $h_{S^*}(-u) = h_S(-u)$. A támaszfüggvény egyértelműségéből pedig következik, hogy $S = S^*$ □

2.3. Konvex testek alapmértékei

Ebben a részben bevezetünk konvex testekkel kapcsolatos bizonyos fontos mennyiségeket. Ezek a mennyiségek valamiképpen konvex testek Minkowski összegének térfogatát jellemzik. Mi itt csak egy speciális esetet tekintünk, amikor a két összeadandó egyike egy λ sugarú gömb.

2.3.1. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{E}^d$ konvex test, $\lambda > 0$ valós szám. A $K + \lambda B^d$ konvex testet K λ -sugarú paraleltartományának nevezzük.



2.4. ábra. Egy síkbeli hatszög λ -sugarú paraleltartománya

Ezen λ -sugarú paraleltartomány térfogatát szeretnénk kifejezni az eredeti K konvex testből. A Steiner formula szerint ez megtehető K ún. $(W_i(K))$ alpmértékeinek lineáris kombinációjaként (lásd pl. a [10] monográfia 197. oldalán 4.11-es formula):

$$V(K + \lambda B^d) = \sum_{i=0}^d \lambda^i \binom{d}{i} W_i(K). \quad (2.1)$$

Ezen $W_i(K)$ együtthatóknak a következő geometriai jelentésük van:

$$\begin{aligned} W_0(K) &= V(K), \\ W_1(K) &= \frac{A(K)}{d}, \\ W_{d-1}(K) &= \frac{\kappa_d}{2} W(K), \\ W_d(K) &= \kappa_d. \end{aligned}$$

Azonban a $W_i(K)$ alapmértékek általános esetben nehezen számolhatók. Ha viszont felteszünk K határára bizonyos simasági feltételeket, akkor viszonylag egyszerű formulákat kapunk ezen mennyiségek kiszámítására.

2.3.2. Definíció. Legyen $k \geq 1$. Azt mondjuk, hogy egy $K \subset \mathbb{E}^d$ konvex test $\text{bd } K$ határa C^k osztályú, ha k -szor folytonosan differenciálható hiperfelület $\mathbb{E}^d$ -ben. Továbbá, ha $\text{bd } K$ C^k osztályú és minden $x \in \text{bd } K$ esetén az x -beli Gauss-görbületre teljesül, hogy $\kappa(x) > 0$, akkor azt mondjuk, hogy K határa C_+^k osztályú.

Ettől kezdve feltesszük, hogy a $K \subset \mathbb{E}^d$ konvex test határa C_+^2 osztályú. Ismert, hogy egy C_+^2 határu konvex test szigorúan konvex. A C^2 tulajdonságból következik, hogy minden $x \in \text{bd } K$ határpontban létezik egyértelmű $u_K(x) \in S^{d-1}$ külső normális egységvektora K -nak.

2.3.3. Definíció. Azt a $\sigma_K : \text{bd } K \rightarrow S^{d-1}$ hozzárendelést, amelyre $\sigma_K(x) := u(x)$ gömbi leképezésnek nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a gömbi leképezés definiálható abban az esetben is, ha $\text{bd } K$ -ra nem teszünk semmilyen simasági feltételt, azonban akkor a leképezés nem feltétlenül egyértékű. Mi ezzel az általánosabb esettel itt nem foglalkozunk. Mivel $\text{bd } K$ C_+^2 osztályú, ezért σ_K bijekció, így annak $\sigma_K^{-1} : S^{d-1} \rightarrow \text{bd } K$ inverze is létezik, és $u \in S^{d-1}$ esetén $\sigma_K^{-1}(u) = x$, ahol $x \in \text{bd } K$ és $u(x) = u$.

Legyen K egy C_+^2 osztályú konvex test $\mathbb{E}^d$ -ben és $u \in S^{d-1}$. A $\text{bd } K$ hiperfelület $x = \sigma_K^{-1}(u)$ -beli főgörbületeit rendre a $r_1(u), \dots, r_{d-1}(u)$ szimbólumokkal jelöljük. Vezessük be az r_i -k normált elemi szimmetrikus polinomjaira a következő jelölést:

$$s_j(u) := \binom{d-1}{j}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d-1} r_{i_1}(u) \cdots r_{i_j}(u).$$

Ezen s_j -k segítségével pontos formulák adhatók a $W_i(K)$ alapmértékek kiszámítására (lásd [10] monográfia 290–291. oldalán):

$$W_i(K) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} h_K(u) s_{d-i-1}(u) \mathcal{H}^{d-1}(du), \quad i = 0, \dots, d-1 \quad (2.2)$$

$$W_i(K) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} s_{d-i}(u) \mathcal{H}^{d-1}(du), \quad i = 1, \dots, d \quad (2.3)$$

Tehát ha az $u \in S^{d-1}$ irány függvényében ismerem a főgörbületeket, akkor a $W_i(K)$ mennyiségek a fenti integrálokkal számíthatók.

3. fejezet

Orsókonvex test duálisának alapmértékei az eredeti orsókonvex test alapmértékeinek függvényében

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy egy $S \subset \mathbb{E}^3 \ C_+^2$ határu orsókonvex test alapmértékei hogyan viszonyulnak a duális alapmértékeihez. Az előző részben kapott általános formulákat felírjuk 3 dimenzióban, majd ezek segítségével összefüggéseket írunk fel a duális és az eredeti orsókonvex test alapmértékei között.

Három dimenzióban a következő négy alapmérték létezik:

$$W_0(K) = V(K) \tag{3.1}$$

$$W_1(K) = \frac{1}{3}A(K) \tag{3.2}$$

$$W_2(K) = \frac{\kappa_3}{2}W(K) = \frac{2\pi}{3}W(K) \tag{3.3}$$

$$W_3(K) = \kappa_3 = \frac{4\pi}{3} \tag{3.4}$$

Először írjuk fel a duális átlagszélességét. Felhasználva a (3.3) és (2.3) egyenleteket, illetve a

2.2.16-os állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
W(S^*) &= \frac{3}{2\pi} W_2(S^*) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} h_{S^*}(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} 1 - h_S(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{2\pi} (4\pi - 3W_2(S)) \\
&= 2 - W(S).
\end{aligned}$$

Tehát ezek szerint bármely S orsókonvex test és duálisa átlagszélességének összege 2, ami megegyezik az egységsugarú gömb szélességével. Ezt persze már onnan is tudhattuk volna, hogy $S + (-S^*) = B^d$.

Most számoljuk ki a duális felszínét. Ekkor a 2.2.16-os állítás, (3.2), (3.3) és (2.3) formulák felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A(S^*) &= 3W_1(S^*) \\
&= \int_{S^2} s_2^*(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \int_{S^2} r_1^*(u)r_2^*(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \int_{S^2} (1 - r_1(u))(1 - r_2(u)) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \int_{S^2} 1 - (r_1(u) + r_2(u)) + r_1(u)r_2(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= 4\pi - \int_{S^2} 2s_1(u) - s_2(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= 4\pi - 6W_2(S) + 3W_1(S) \\
&= 4\pi - 6\frac{2\pi}{3}W(S) + 3\frac{1}{3}A(S) \\
&= 4\pi - 4\pi W(S) + A(S).
\end{aligned}$$

És végül a térfogat a kiszámítása, melynek során felhasználtuk a 2.2.16-os állítást, a (3.1), (3.2),

(3.3), (2.2), (2.3) egyenlőségeket.

$$\begin{aligned}
V(S^*) &= W_0(S^*) \\
&= \frac{1}{3} \int_{S^2} h_{S^*}(u) s_2^*(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{3} \int_{S^2} (1 - h_S(u)) r_1^*(u) r_2^*(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{3} \int_{S^2} (1 - h_S(u)) (1 - r_1(u)) (1 - r_2(u)) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{3} \int_{S^2} 1 - (r_1(u) + r_2(u)) + r_1(u) r_2(u) - h_S(u) \\
&\quad + h_S(u)(r_1(u) + r_2(u)) - h_S(u) r_1(u) r_2(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{3} \int_{S^2} 1 - 2s_1(u) + s_2(u) - h_S(u) + 2h_S(u)s_1(u) - h_S(u)s_2(u) \mathcal{H}^2(du) \\
&= \frac{1}{3} (4\pi - 6W_2(S) + 3W_1(S) - 3W_2(S) + 6W_1(S) - 3W_0(S)) \\
&= \frac{4\pi}{3} - 3W_2(S) + 3W_1(S) - W_0(S) \\
&= \frac{4\pi}{3} - 2\pi W(S) + A(S) - V(S).
\end{aligned}$$

Összefoglalva, ha $S \subset \mathbb{E}^3$ egy C_+^2 határu orsókonvex test, akkor a duális test alapmértékei:

$$W(S^*) = 2 - W(S), \quad (3.5)$$

$$A(S^*) = 4\pi - 4\pi W(S) + A(S), \quad (3.6)$$

$$V(S^*) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi W(S) + A(S) - V(S). \quad (3.7)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti számolás elvégezhető magasabb dimenzióban is. Ez ismert is abban az esetben, ha az S állandó szélességű. Erről bővebb információ található például a [5] összefoglaló cikkben. Mi azért csak 3 dimenzióban számolunk, mert szeretnénk valamilyen egyenlőtlenségeket találni a $W(S)$, $A(S)$ és $V(S)$ mennyiségek között.

Speciálisan, ha például $S = S^*$, azaz 2.2.18 szerint S állandó egység szélességű konvex test, akkor

$$W(S^*) = W(S) = 1.$$

Ezt behelyettesítve a (3.7) egyenletbe:

$$V(S) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi + A(S) - V(S).$$

Átrendezve kapjuk, hogy:

$$V(S) = \frac{1}{2}A(S) - \frac{\pi}{3},$$

amely megegyezik a [5] összefoglaló cikk 366. oldalán lévő első formula egy speciális esetével. Tehát az olyan 3 dimenziós orsókonvex testekre, amelyek duálisa megegyezik önmagukkal, kaptunk egy egyszerű összefüggést a felszíne és a térfogata között.

Másik érdekes eset, amikor csak azt tesszük fel, hogy $S^* \subseteq S$. A tartalmzásból nyilván $W(S) \geq W(S^*)$, és (3.5) miatt:

$$W(S) \geq 1 \geq W(S^*).$$

Mivel $S^* \subseteq S$, így $V(S) \geq V(S^*)$, (3.7)-ből kapjuk, hogy:

$$V(S) \geq \frac{4\pi}{3} - 2\pi W(S) + A(S) - V(S).$$

$$V(S) \geq \frac{2\pi}{3} - \pi W(S) + \frac{1}{2}A(S)$$

Speciálisan, a fenti egyenlőtlenség visszadja az 1 állandó szélességű testekre vonatkozó hasonló egyenlőtlenséget.

Folytathatjuk a becslést, ha például $W(S)$ helyére a felső korlátját, 2-t írunk:

$$V(S) \geq \frac{1}{2}A(S) - \frac{4\pi}{3},$$

vagy ha $V(S)$ helyére az egységgömb térfogatát írjuk:

$$2\pi W(S) + \frac{4\pi}{3} \geq A(S).$$

4. fejezet

Orsókonvex halmazok „gömbölyítése”

Legyen $S \subset \mathbb{E}^d$ olyan orsókonvex test, amelyre $o \in \text{int } S$ és $S \subseteq B^d$ is teljesül. Megjegyezzük, hogy az origót szabadon választva orsókonvex testekre ezek a feltételek nem jelentenek megszorítást. Vegyük észre, hogy ekkor $o \in S^*$. Ilyen orsókonvex testekre a következőkben definálunk egyfajta gömbölyítési eljárást, melynek ismétlésével orsókonvex testek egy olyan (S_i) sorozatát nyerjük, amely a B^d egységgömbhöz konvergál a Hausdorff metrikában. Ennek megfelelően, a sorozat elemeinek térfogata, felszíne és átlagszélessége is tartani fog a gömbéhez.

Legyen az S -ből kiinduló orsókonvex testek sorozata a következő:

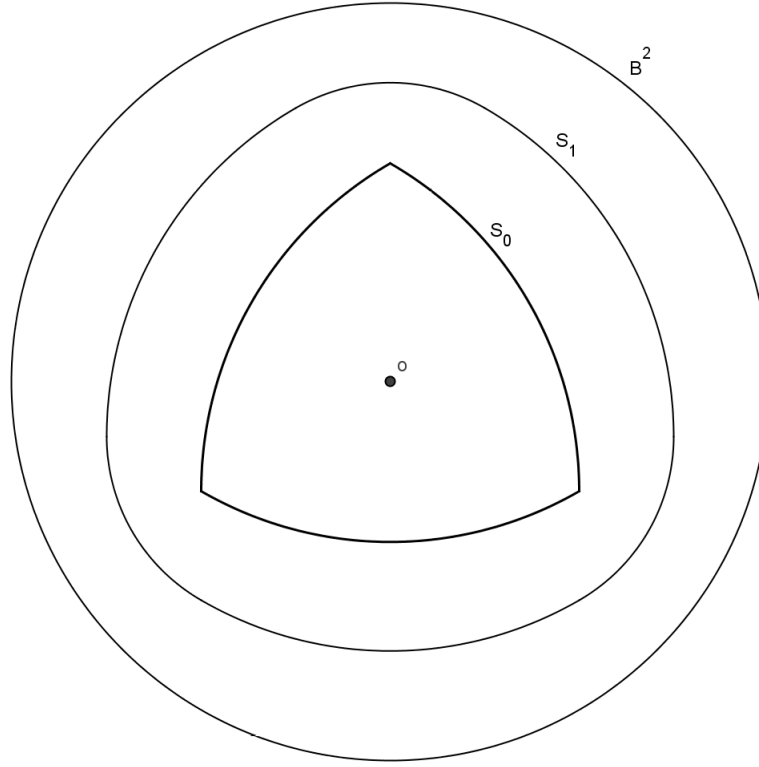
$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_1 &= \frac{1}{2}(S_0 + B^d) \\ &\vdots \\ S_i &= \frac{1}{2}(S_{i-1} + B^d) \\ &\vdots \end{aligned}$$

A 2.2.13-as állítás és az azt követő megjegyzés alapján az (S_i) sorozat elemei 1 sugárral orsókonvexek. (Az $1/2$ -el való szorzás ezért fontos a fenti definícióban.)

A „gömbölyített” sorozat elemeit explicit módon is felírhatjuk:

$$S_i = \frac{1}{2^i}S + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2^j}B^d = \frac{1}{2^i}S + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)B^d.$$

Vegyük észre, hogy i növekedésével, egyre kisebb mértékben vesszük figyelembe az S orsókonvex halmazt, egyre inkább az egység sugarú gömb fog dominálni a Minkowski összegben.



4.1. ábra. A Reuleaux-háromszög gömbölyítése

Ebből a felírásból és abból, hogy $o \in \text{int } S$ következik, hogy:

$$\left(1 - \frac{1}{2^i}\right) B^d \subseteq \frac{1}{2^i} S + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) B^d = S_i \subseteq B^d,$$

Tehát

$$d_H(S_i, B^d) \leq d_H\left(\left(1 - \frac{1}{2^i}\right) B^d, B^d\right) = \frac{1}{2^i},$$

azaz

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_H(S_i, B^d) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2^i} = 0.$$

A 2.2.16-os állítás megjegyzésében leírtat: $B^d = S + (-S^*)$, és S konvexitását (bármely $0 \leq a \leq 1$ -re: $aS + (1 - a)S = S$) felhasználva a „gömbölyített” sorozatot felírhatjuk kizárólag S és S^* segítségével:

$$S_i = \frac{1}{2^i} S + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) (S + (-S^*)) = S + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) (-S^*).$$

Most megmutatjuk, hogy az (S_i) sorozat tartalmazásra nézve monoton növekedő.

4.0.4. Állítás. *Ha $S \subset \mathbb{E}^d$ olyan orsókonvex test, amelyre teljesül, hogy $S \subseteq B^d$, akkor $S_i \subseteq S_{i+1}$ minden $i = 0, 1, \dots$ esetén.*

Bizonyítás. Az $i = 0$ és $i \geq 1$ esetet külön vizsgáljuk:

$$o \in S^* \text{-ből: } S = S + \left(-\frac{1}{2}o\right) \subseteq S + \left(-\frac{1}{2}S^*\right) = S_1.$$

Mivel S^* tartalmazza az origót, ezért minden $i \geq 1$ -re teljesül, hogy:

$$\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)S^* \subseteq \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)S^*,$$

így az $S_i \subseteq S_{i+1}$ tartalmazás is fennáll. □

A fenti állításból és az alapmértékek tartalmazással szembeni monotonitásából következik, hogy

$$W_k(S_i) \leq W_k(S_{i+1}) \quad \text{minden } i \geq 0 \text{ és } 0 \leq k \leq d \text{ esetén.}$$

Továbbá az alapmértékek Hausdorff metrikában való folytonosságából adódik, hogy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} W_k(S_i) = W_k(B^d) \quad \text{minden } 0 \leq k \leq d \text{ esetén.}$$

Megjegyezzük, hogy ha orsókonvex test helyett egyszerűen csak egy K (lineárisan) konvex testből indítjuk a gömbölyítési eljárást, és feltesszük, hogy $K \subseteq B^d$, akkor is igazak maradnak a fenti állítások. Azonban a $K \subseteq B^d$ feltétel megszorítást jelent K konvex testre (természetesen megfelelő irányú eltolással és kicsinyítéssel teljesíthető ez a feltétel). Orsókonvex testek esetén nincs ilyen probléma, az origót a megfelelő helyre felvéve teljesül az $S \subseteq B^d$ feltétel.

5. fejezet

Adott átlagszélességű orsókonvex testek térfogatának és felszínének becslése

Ebben a fejezetben adottnak tételezzük fel az $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test $W(S)$ átlagszélességét, és ennek segítségével próbálunk meg becsléseket adni S térfogatára illetve felszínére.

5.1. Alapmértékek segítségével

A 2.3. részben bevezetett $W_i(\cdot)$ alapmértékekre is létezik a (2.1) Steiner formulához hasonló összefüggés. Legyen $K \subset \mathbb{E}^d$ konvex test, ekkor a következő formula teljesül a $W_i(K)$ alapmértékekre (lásd pl. Note 4.2.2 a [10] monográfia 212. oldalán):

$$W_i(K + \lambda B^d) = \sum_{k=0}^{d-i} \binom{d-i}{k} W_{i+k}(K) \lambda^k, \quad i = 0, \dots, d. \quad (5.1)$$

Nekünk ennek az általános formulának egy speciális esetére lesz szükségünk. Legyen $S \subset \mathbb{E}^3$ orsókonvex test, írjuk fel $W_1(S + B^3)$ -t:

$$\begin{aligned} W_1(S + B^3) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} W_{1+k}(S) \\ &= W_1(S) + 2W_2(S) + W_3(S) \\ &= \frac{1}{3}A(S) + \frac{4\pi}{3}W(S) + \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $o \in \text{int } S$ és $S \subseteq B^3$. Ekkor használhatjuk a 4.0.4 állítást, valamint a felszín, mint operátor négyzetes homogenitásából, illetve a (3.2) formulából a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
A(S) &\leq A\left(\frac{1}{2}(S + B^3)\right) \\
&= \frac{1}{4}A(S + B^3) \\
&= \frac{3}{4}W_1(S + B^3) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}A(S) + \frac{4\pi}{3}W(S) + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}A(S) + \pi W(S) + \pi
\end{aligned}$$

Átrendezve a következő felső becslést kapjuk adott $W(S)$ átlagszélességű S orsókonvex test felszínére:

$$A(S) \leq \frac{4\pi}{3}(W(S) + 1)$$

$W(S) = 2$ esetben a fenti becslés élessé válik: ekkor $S = B^3$, aminek térfogata 4π . Kis átlagszélesség esetén azonban nem ad túl jó becslést a felszínre.

A térfogatra vonatkozó becslésnél is fölhasználjuk a gömbölyített sorozat tartalmazásra nézve vonatkozó monotonitását, a térfogat köbös homogenitását, a (2.1) Steiner formulát, illetve a (3.1) egyenlőséget, majd alkalmazzuk az előzőekben a felszínre kapott becslést:

$$\begin{aligned}
V(S) &\leq V\left(\frac{1}{2}(S + B^3)\right) \\
&= \frac{1}{8}V(S + B^3) \\
&= \frac{1}{8}\left(V(S) + A(S) + 2\pi W(S) + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(V(S) + \frac{4\pi}{3}(W(S) + 1) + 2\pi W(S) + \frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(V(S) + \frac{10\pi}{3}W(S) + \frac{8\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Azaz az S orsókonvex test térfogatára a következő felső becslést kapjuk:

$$V(S) \leq \frac{10\pi}{21}W(S) + \frac{8\pi}{21}.$$

Erről is elmondható ugyanaz, mint a felszínre kapott becslésről: $W(S) = 2$ esetben megkapjuk az egységgömb térfogatát, azonban kis átlagszélesség esetén nem kapunk túl jó becslést a térfogatra.

Megjegyezzük, hogy a fejezetben tárgyalt becslések igazak az olyan K (lineárisan) konvex testekre is, amelyekre $K \subseteq B^d$. Azonban nyilvánvaló módon ezen testekre nem lesznek olyan jók a becslések, mint a „kövérebb” orsókonvex testek osztályára.

5.2. Elemi eszközökkel

Két dimenzióban a Cauchy-féle formula szerint S kerülete kifejezhető a következő módon

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} W(u) d\varphi = \pi W(S).$$

Azaz a $W(S)$ átlagszélesség egyértelműen meghatározza S kerületét. Ebből pedig az izoperimetrikus tétel alapján következik, hogy S területe pontosan akkor maximális, ha S éppen egy πW területű körlemez, azaz sugara $W/2$. Tehát

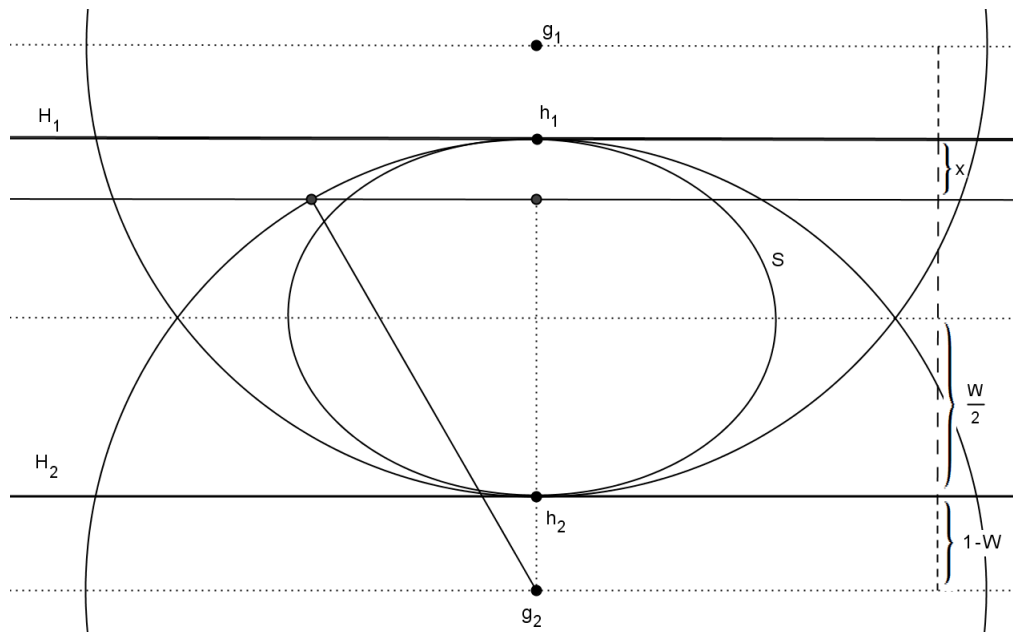
$$V(S) \leq \pi \frac{W^2}{4},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha S körlemez. Hasonlóan éles becslést a felszínre és térfogatra azonban nem tudunk magasabb dimenziókban.

A $W(u)$ szélesség függvény folytonos, így létezik olyan u irány, amelyben S szélessége pontosan $W(S)$. Tehát ebben az irányban létezik: H_1, H_2 támaszhipersíkja S -nek, melyek távolsága $W(S)$. Mivel minden pontjában létezik támaszgömbje S -nek, így a $h_1 = H_1 \cap S$ és a $h_2 = H_2 \cap S$ pontokban is. Azaz S benne van két egységsugarú G_1, G_2 gömb metszetében, melyek h_1, h_2 pontokban érintik S -t. A $G_1 \cap G_2$ metszet (ezzel együtt S) térfogatát, felszínét fogjuk fölülről becsülni. Az világos, hogy $G_1 \cap G_2$ térfogata és felszíne is akkor lesz maximális, ha a két gömb középpontja minél közelebb van egymáshoz. Ez pedig akkor következik be, ha G_1, G_2 gömbök középpontja és a h_1, h_2 pontok egy egyenesre esnek (lásd 5.1-es ábra).

Először a $G_1 \cap G_2$ térfogatát fogjuk becsülni. Ez a metszet tulajdonképpen két $W/2$ mélységű gömbsapka uniója. Egy gömbsapka térfogatát ki lehet például úgy is számolni, hogy nézzük az $x : 0 \leq x \leq W/2$ mélységben vett, a H_1, H_2 hipersíkokkal párhuzamos hipersík és a gömbsapka metszetét (ami egy eggyel kisebb dimenziós $\sqrt{1 - (1 - x)^2}$ sugarú gömb lesz), majd ezen metszeteket térfogatát „összegezzük”:

$$V(G_1 \cap G_2) = 2 \int_0^{W/2} \kappa_{d-1} \left(\sqrt{1 - (1 - x)^2} \right)^{d-1} dx, \quad (5.2)$$



5.1. ábra.

Három dimenzióban a következő formát ölti a becslés:

$$\begin{aligned}
 V(G_1 \cap G_2) &= 2 \int_0^{W/2} \kappa_2 \left(\sqrt{1 - (1-x)^2} \right)^2 dx \\
 &= 2\kappa_2 \int_0^{W/2} 1 - (1-x)^2 dx \\
 &= \pi \left(\frac{W^2}{2} - \frac{W^3}{12} \right)
 \end{aligned}$$

Magasabb dimenziókban is ki lehet számolni az (5.2) integrált, azonban akkor nem kapunk szép zárt formulát.

A $G_1 \cap G_2$ felszínére nincs ilyen egyszerű formulánk, azonban három dimenzióban elemi geometriai eszközökkel könnyen kiszámolható. Tudjuk, hogy egy x magasságú gömbréteg palástja $2\pi x$. Így $G_1 \cap G_2$ felszínére a $2\pi W(S)$ felső becslést kapjuk. Az izoperimetrikus tételt erre alkalmazva kapjuk, hogy a $2\pi W(S)$ felszínű testek közül a gömbnek lesz maximális a térfogata. Ennek a gömbnek a sugara:

$$4\pi r^2 = 2\pi W(S) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{W}{2}}$$

Ebből pedig kapunk egy másik felső becslést S térfogatára:

$$V(S) \leq \frac{4\pi}{3} \left(\frac{W(S)}{2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Egyszerű analízisbeli eszközökkel megmutatható, hogy ez a becslés gyengébb lesz a korábban kapottnál.

Öszegezve az eddigieket: adott $W(S)$ átlagszélességű S orsókonvex test felszínére, térfogatára a következő felső becslések érvényesek:

(i) 2 dimenzióban:

$$V(S) \leq \pi \frac{W^2(S)}{4}$$

$$A(S) = \pi W(S)$$

(ii) 3 dimenzióban pedig:

$$V(S) \leq \pi \left(\frac{W^2(S)}{2} - \frac{W^3(S)}{12} \right)$$

$$A(S) \leq 2\pi W(S).$$

Ezek a becslések 2 illetve 3 dimenzióban is élesebbek lesznek, mint az előző fejezetben kaptak.

6. fejezet

A dualitás képzés és a centrális szimmetrizálás kapcsolata

Ebben a fejezetben egy $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test centrális szimmetrizáltját vizsgáljuk. A centrális szimmetrizált fontos szerepet játszik a konvex testek elméletében. Definíciója a következő:

6.0.1. Definíció. Legyen $K \subset \mathbb{E}^d$ konvex test. Ekkor a

$$D(K) := K + (-K)$$

Minkowski összeget a K test centrális szimmetrizáltjának nevezzük.

A fenti definícióból nyilvánvalóan következik, hogy $D(K)$ az origóra nézve centrálisan szimmetrikus konvex test lesz. Az is észrevehető, hogy minden $u \in S^{d-1}$ irányban $D(K)$ szélessége kétszerese K szélességének. A $D(K)$ szimmetrizált ezért általában jóval nagyobb, mint K . Hogy például $D(K)$ térfogata mennyivel nagyobb, mint K -é, azt a nevezetes Rogers-Shepard (lásd [3] és [4]) tétel mondja ki.

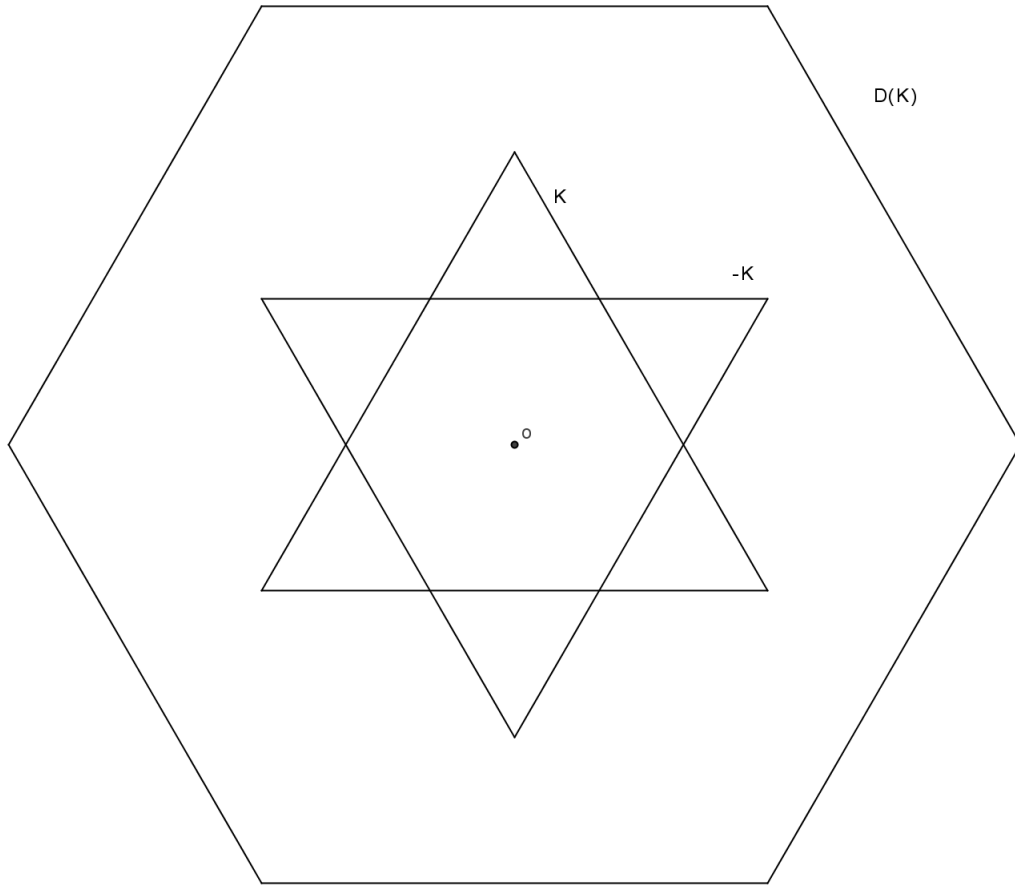
6.0.2. Tétel (Rogers-Shephard). Legyen $K \subset \mathbb{E}^d$ konvex test. Ekkor

$$\frac{V(D(K))}{V(K)} \leq \binom{2d}{d},$$

ahol egyenlőség pontosan a d -dimenziós szimplex esetén áll fent.

A Rogers-Shephard tételnek számos fontos alkalmazása van a konvex és diszkrét geometriában. Például konvex testek megvilágítási számának becslésében (lásd [7] könyv 3. fejezete) fordul elő természetesen vagy konvex testek elhelyezési sűrűségének becslésében.

Vegyük észre, hogy ha $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test, akkor a 2.2.13-as állítás alapján a $D(S) = S + (-S)$ olyan konvex test, amely 2 sugárral orsókonvex. Ezért ha meg akarjuk tartani az (1 sugárral) orsókonvexitást, akkor az S centrális szimmetrizáltjára jó definíció az alábbi.



6.1. ábra. Egy síkbeli szabályos háromszög centrális szimmetrizáltja.

6.0.3. Definíció. Egy $S \subset \mathbb{E}^n$ orsókonvex halmaz centrális szimmetrizáltján a

$$D_s(S) = \frac{1}{2} (S + (-S))$$

Minkowski összeget értjük.

Érdekes kérdés az, hogy mit lehet mondani egy $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test $D_s(S)$ centrális szimmetrizáltjának térfogatáról? Természetesen erre is érvényes a Rogers-Shephard tétel felső becslése. Általános esetben ennél jobb nem is mondható, mert S tetszőlegesen közel lehet a Hausdorff-metrikában egy d -szimplexhez. Azonban, ha feltesszük, hogy S nem túl kicsi, mondjuk például tartalmazza S^* duálisát, akkor már valószínűleg más a helyzet. Ha például ilyen orsókonvex testekre a Rogers-Shephard tételben szereplő felső korlátnál jobbat tudnánk mondani, akkor az adhatna például egy javított felső korlátot a megvilágítási számra.

A következő tétel azt fejezi ki, hogy az S orsókonvex testre a centrális szimmetrizált képzése felcserélhető a duális képzésével.

6.0.4. Állítás. Legyen $S \subset \mathbb{E}^d$ orsókonvex test. Ekkor

$$D_s(S^*) = (D_s(S))^*.$$

Bizonyítás. Legyen $u \in S^{d-1}$ tetszőleges irány. Írjuk fel a $(D_s(S))^* \subset \mathbb{E}^d$ halmaz támaszfüggvényét felhasználva a 2.2.16-os állítást:

$$\begin{aligned} h_{D_s(S^*)}(u) &= h_{\frac{1}{2}(S^*+(-S^*))}(u) \\ &= \frac{1}{2} (h_{S^*}(u) + h_{S^*}(-u)) \\ &= \frac{1}{2} (1 - h_S(u) + 1 - h_S(-u)) \\ &= 1 - h_{\frac{1}{2}S}(u) - h_{\frac{1}{2}(-S)}(u) \\ &= 1 - h_{D_s(S)}(u). \end{aligned}$$

Mivel az 2.2.13 állítás szerint $D_s(S)$ is orsókonvex, ezért $D_s(S)$ -re is alkalmazható a 2.2.16-os állítás:

$$h_{(D_s(S))^*}(u) = 1 - h_{D_s(S)}(u).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$h_{D_s(S^*)}(u) = h_{(D_s(S))^*}(u).$$

Innen pedig a támaszfüggvény egyértelműségéből következik az állítás.

□

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani a diplomamunkám elkészítésében nyújtott munkájáért, észrevételeiért, megjegyzéseiért, pontosításaiért témavezetőmnek, Dr. Fodor Ferencnek.

Valamint Dr. Vígh Viktornak is köszönettel tartozom, hogy dolgozatunk elkészítéséhez felhasználhattuk a közeljövőben megjelenő cikkének néhány részletét.

Irodalomjegyzék

- [1] A. E. Mayer, *Eine Überkonvexität*, Math. Z. **39** (1935), no. 1, 511–531.
- [2] Aladár Heppes and Pál Révész, *A splitting problem of Borsuk*, Mat. Lapok **7** (1956), 108–111 (Hungarian, with Russian and English summaries).
- [3] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. (Basel) **8** (1957), 220–233.
- [4] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 270–281.
- [5] E. Heil and H. Martini, *Special convex bodies*, Handbook of convex geometry, Vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 347–385.
- [6] H. G. Eggleston, *Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **3** (1965).
- [7] Károly Bezdek, *Classical topics in discrete geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York, 2010.
- [8] Károly Bezdek, Zsolt Lángi, Márton Naszódi, and Peter Papez, *Ball-polyhedra*, Discrete Comput. Geom. **38** (2007), no. 2, 201–230.
- [9] Ludwig Bieberbach, *Zur Euklidischen Geometrie der Kreisbogendreiecke*, Math. Ann. **130** (1955), 46–86 (German).
- [10] Rolf Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications **44** (1993), 197–303.
- [11] S. Straszewicz, *Sur un problème géométrique de P. Erdős*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. **5** (1957), 39–40, IV–V (French, with Russian summary).
- [12] Y. S. Kupitz, H. Martini, and M. A. Perles, *Ball polytopes and the Vázsonyi problem*, Acta Math. Hungar. **126** (2010), no. 1-2, 99–163.

- [13] Zsolt Lángi, Márton Naszódi, and István Talata, *Ball and spindle convexity with respect to a convex body*, Aequationes Math. **85** (2013), no. 1-2, 41–67.

Nyilatkozat

Alulírott Gyovai Antal kijelentem, hogy a diplomamunkában foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy diplomamunkám a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Gyovai Antal