

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet - Geometriai Tanszék

Az izoperimetrikus és az izodiametrikus egyenlőtlenség

SZAKDOLGOZAT

Készítette:
Kátay Csaba András
Matematika BSc hallgató

Témavezető:
Dr. Vígh Viktor
egyetemi adjunktus

Szeged
2014

Tartalmi összefoglaló

A klasszikus izoperimetrikus tétel a síkban azt mondja ki, hogy adott kerületű (konvex) lemezek közül a körnek a legnagyobb a területe. Az állítás magasabb dimenzióban is teljesül: adott felszínű (konvex) testek közül a gömb a maximális térfogatú. Az izodiametrikus tétel egy rokon állítás, azt állítja, hogy az adott átmérőjű testek közül a gömbnek maximális a térfogata. A hasonló megfogalmazású állítások között - nem meglepő módon - szoros matematikai kapcsolat is van. A dolgozatban az izoperimetrikus ill. izodiametrikus tételeket igazoljuk ill. bemutatjuk a két állítás közötti összefüggéseket is.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Geometriai alapismeretek	3
2.1. Görbék	3
2.2. Konvexitás	4
3. Izoperimetrikus tétel a síkban	5
4. Izodiametrikus tétel a síkban	8
5. Az izodiametrikus egyenlőtlenség levezetése az izoperimetrikus egyenlőtlenség segítségével	12
6. Köszönetnyilvánítás	20
7. Nyilatkozat	21

Ábrák jegyzéke

1.	A konvex lemez és belső parallel tartománya.	7
2.	Carathéodory tétel szemléltetése	9
3.	Az $f(\theta)$ függvény	10
4.	Projekció	14

1. Bevezetés

Különböző geometriai jellegű maximum és minimum tulajdonságokat jól ismertek már a görögök is, még ha az eredményeket sokszor anélkül mondták is ki, hogy a valódi bizonyítást megkísérelték volna:

- „Az egyenesszakasz a legrövidebb összeköttetés két végpontja között.”
- „A legnagyobb gömbi kör íve a gömbfelület két pontját összekötő legrövidebb gömbfelületi görbe.”
- „Azonos hosszúságú síkgörbék közül a kör zár be legnagyobb területet.”
- „Azonos felszínű zárt felület által bezárt térfogatok között a gömb térfogata a legnagyobb.”

Az élet mindennapi problémái között is állandóan jelen vannak a maximum-minimum jellegű problémák a „legjobb” és „legrosszabb” kérdésének formájában. Vannak matematikai, illetve a természetben ezzel kapcsolatban előforduló kérdések. Miért van a vízben lebegő buboréknak megközelítőleg gömb alakja? Miért henger alakú a virágok szára, a fák törzse? Adott anyagmennyiségből készült milyen hengeres tartónak lesz legnagyobb a térfogata?

Ezen példákból is látszik, hogy a felsőbb matematikának egyik jellemző vonása, hogy igen gyakran dolgozik egyenlőtlenségekkel. A maximumproblémák megoldása -legalábbis elvben- mindig egyenlőtlenségre vezet, amely azt a tényt fejezi ki, hogy a tekintett változó mennyiség kisebb, vagy legfeljebb akkora, mint a megoldás által szolgáltatott maximális érték. Sok esetben az ilyen egyenlőtlenségek önmagukban véve is érdekesek. A szélsőértékek általános elmélete a *XVII.* században indult el, s a természettudomány egyik nagy rendszerező és egységesítő elve lett belőle.

Az izoperimetrikus szó egyenlő (állandó) kerületűt jelent. A síkbeli izoperimetrikus tétel kimondja, hogy adott kerületű lemezek közül a körnek a legnagyobb a területe. A körnek ezt az extrémális tulajdonságát már a görögök is ismerték, és igazolni is tudták. Steiner számos ötletes módszert ajánlott annak a megmutatására, hogy a kör csak egy adott hosszúságú görbe, amely a maximális területet körülveszi [13]. Az ilyen extrémális görbék létezését Carathéodory és Study bizonyította 1909-ben [2]. A háromdimenziós esetet először Schwarz bizonyította, ennek a belátása sokkal nehezebb, mint a két-dimenziós eseté [9]. Az n -dimenziós esettel Schmidt foglalkozott, de ennek a bizonyítása függ a felület fogalmától [10].

Az izodiametrikus szó egyenlő átmérőjűt jelent. A síkbeli izodiametrikus tétel kimondja, hogy adott átmérőjű konvex lemezek közül a kör a legnagyobb

területű. Általában magasabb dimenzióban is teljesül, hogy a maximális térfogatú, adott átmérőjű test a gömb.

Szakdolgozatomban bemutatom az izoperimetrikus és izodiametrikus tételek pontos bizonyítását, illetve a két tétel közti kapcsolatot. Külön foglalkozunk a síkbeli esettel, a magasabb dimenziós kérdések közül csak a három dimenziót tárgyaljuk részletesen, a többi eset hasonlóan kezelhető. A bizonyításokhoz főképp analitikus geometriai és konvex geometriai eszközöket használunk.

A dolgozatban a bevezető szakasz után összegyűjtjük a megértéshez szükséges fogalmakat, illetve a használt alapvető tételeket. A harmadik és negyedik szakaszokban az izoperimetrikus és az izodiametrikus egyenlőtlenségekre egy-egy speciálisan síkbeli bizonyítást mutatunk. A zárószakaszban a magasabb dimenziós kiterjesztés egy lehetséges induktív útját mutatjuk be.

2. Geometriai alapismeretek

2.1. Görbék

Ebben a szakaszban a görbékről tanult legfontosabb, a dolgozatban is előkerülő fogalmakat és állításokat mutatjuk be. A részletek iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk [7] könyvet, az itt található összefoglaló is lényegében ezen mű alapján készült.

2.1. Definíció. Az $r : (a, b) (\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvény képhalmazát egyszerű görbeívnek nevezzük, ha r injektív, inverze folytonos, és $\dot{r} \neq 0$. Az r függvény a hozzá tartozó egyszerű görbeív egy paraméterezése.

2.2. Definíció. Az $r(t)$ egyszerű görbeívet rektifikálhatónak nevezzük, ha a beírt poligonok hossza rögzített korlát alatt marad. Ha a görbeív rektifikálható, akkor a beírt poligonok hosszának felső határát a görbe ívhosszának nevezzük.

2.3. Tétel. Ha az $r(t)$ ($a \leq t \leq b$) egyszer folytonosan differenciálható skalár-vektor függvény egyszerű ívet ad meg, akkor ennek az egyszerű görbének létezik ívhossza és az ívhossz képlete:

$$s = \int_a^b |\dot{r}(t)| dt.$$

2.4. Definíció. Ha $|\dot{r}(t)| = 1$, akkor az egyszerű görbeív r paraméterezését ívhossz szerintinek mondjuk. Az ívhossz szerinti paramétert általában s jelöli.

2.5. Definíció. Az r paraméterezésű egyszerű görbeív t paraméterű pontjában $\dot{r}(t)$ érintő iránya $t(t) = \dot{r}(t)/|\dot{r}(t)|$, az egységnyi érintő vektor. Az egységnyi érintővektor független a paraméterezés választásától, és az ívhossz szerinti paraméterezés esetén $t(s) = \dot{r}(s)$.

2.6. Definíció. A görbe ívhossz szerinti paraméterezésének $\ddot{r}(s)$ második deriváltja a görbe görbületi vektora, melynek hossza $\kappa(s) = |\ddot{r}(s)|$ a görbe görbülete, iránya pedig az $n(s) = \ddot{r}(s)/|\ddot{r}(s)|$ egységnyi görbületi vektor, amit a görbe normális vektorának is szokás nevezni.

2.2. Konvexitás

A következőkben az n -dimenziós Euklideszi térben, $\mathbb{E}^n$ -ben dolgozunk. A dolgozatban többnyire $n = 2$ vagy $n = 3$, de az itteni állításokat általánosan fogalmazzuk meg. Az összefoglaló [11] könyv alapján készült.

2.7. Definíció. *Valamely ponthalmazt konvernek nevezünk, ha bármely két pontjával együtt a pontokat összekötő szakaszt is tartalmazza, vagyis $D \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz konvex akkor és csak akkor, ha tetszőleges $p, q \in D$ esetén $\overline{pq} \subseteq D$. Egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz konvex burkának nevezzük a A -t tartalmazó összes konvex halmazok metszetét, jele: $\text{conv } A$.*

2.8. Definíció. *A belső ponttal rendelkező konvex, kompakt ponthalmazokat konvex testeknek (síkban konvex lemezeknek) nevezzük. Az n -dimenziós konvex testek halmazát $\mathcal{K}^n$ jelöli.*

2.9. Tétel (Carathéodory). *Legyen $D \subseteq \mathbb{E}^n$. Ekkor a D halmaz konvex burkának tetszőleges X eleme benne van legfeljebb $n + 1$ darab D -beli pont konvex burkában.*

2.10. Definíció. *A H hipersík támasztja a K konvex testet, ha $H \cap K \neq \emptyset$, és a H -hoz tartozó egyik H^+ (zárt) féltér tartalmazza K -t. A H^+ -t K egy támaszfélterének nevezzük.*

2.11. Definíció. *Legyenek $K, L \in \mathcal{K}^n$ konvex testek. Ekkor a két test Minkowski összegén a következő konvex testet értjük:*

$$K + L = \{k + l : k \in K, l \in L\}.$$

A konvex testek analitikus elméletében alapvető fontosságú a következő egyenlőtlenség.

2.12. Tétel (Brunn-Minkowski-egyenlőtlenség). *$K, L \in \mathcal{K}^n$ konvex testek. Ekkor fent áll a következő egyenlőtlenség:*

$$V(K + L)^{1/n} \geq V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}.$$

Egyenlőség csak akkor teljesül, ha K és L egymás pozitív homotetikus képei.

A tétel bizonyítása megtalálható például [11, Theorem 6.1.1].

3. Izoperimetrikus tétel a síkban

Ebben a szakaszban igazoljuk a klasszikus izoperimetrikus egyenlőtlenséget a síkban. Az egyszerűség kedvéért csak konvex lemezekkel foglalkozunk. A bizonyítás lényegében a [1] cikkben leírtakat követi.

3.1. Tétel (Izoperimetrikus tétel). *Adott kerületű konvex lemezek közül a körnek a legnagyobb a területe. Az állítás egyenlőtlenség formájában:*

$$L^2 \geq 4\pi A, \quad (1)$$

ahol L a konvex lemez kerülete és A a konvex lemez területe. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a konvex lemez kör.

A tétel bizonyítása előtt néhány előkészítő fogalmat vezetünk be, illetve egy segédállítást igazolunk.

3.2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ konvex lemez, amelynek határgörbéje szakaszonként differenciálható. A $D_\rho = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) \geq \rho\}$ területet belső parallel tartománynak nevezzük ρ távolsággal, és $\gamma_\rho = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) = \rho\}$ a megfelelő parallel görbe, amely D_ρ -t határolja.*

Ha ρ_0 jelöli a beírt kör sugarát, akkor D_ρ és γ_ρ az összes $\rho \in [0, \rho_0]$ esetén definiált. Majdnem minden ρ -ra, a γ_ρ parallel görbe szakaszonként differenciálható.

Legyen $dx = dx_1 dx_2$, s az ívhossz, és jelölje

$$A(\rho) = \int_{D_\rho} dx \text{ és } L(\rho) = \int_{\gamma_\rho} ds$$

a belső parallel tartomány területét és kerületét.

3.3. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ konvex lemez. A*

$$D(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(D, x) \leq \rho\}$$

lemezt a D ρ sugarú külső parallel tartományának nevezzük.

3.4. Állítás. *A D konvex lemez ρ sugarú belső parallel tartományának ρ sugarú külső parallel tartományára $D_\rho(\rho) \subseteq D$ teljesül.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $p \in D_\rho(\rho) \setminus D$. Létezik $x \in D_\rho$, hogy $\overline{xp} \leq \rho$, és messe xp szakasz D határát m -ben. A definíciók miatt

$$\rho \geq \overline{xp} > \overline{xm} \geq \rho,$$

ellentmondás, ami igazolja az állítást. $\square$

Egy D konvex lemez ρ sugarú külső parallel tartományának kerületét meg tudjuk határozni, pontosan a D lemez $L(D)$ kerületének, illetve a ρ sugarú kör $2\rho\pi$ kerületének összegével egyezik meg a síkban (lásd [6, 4.6. szakasz]), így

$$L(D_\rho(\rho)) = L(\rho) + 2\rho\pi, \quad (2)$$

ahol $L(D_\rho(\rho))$ a belső parallel tartomány külső parallel tartományának hossza.

A tartalmazást figyelembe véve tudjuk, hogy a $L(D_\rho(\rho))$ kisebb, mint az eredeti D konvex lemezünk kerülete, így

$$L(D_\rho(\rho)) \leq L.$$

Amelybe a (2) egyenlőséget behelyettesítve kapjuk, hogy

$$L(\rho) + 2\rho\pi \leq L.$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget megkapjuk, hogy

$$L(\rho) \leq L - 2\pi\rho, \quad (3)$$

A triviális $-A'(\rho) = L(\rho)$ egyenlőségből (3) segítségével nyerjük, hogy

$$-A'(\rho) \leq L - 2\pi\rho$$

$$A'(\rho) \geq 2\pi\rho - L.$$

Ezt az egyenlőtlenséget ρ szerint integrálva kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$A(\rho) \geq A - L\rho + \pi\rho^2. \quad (4)$$

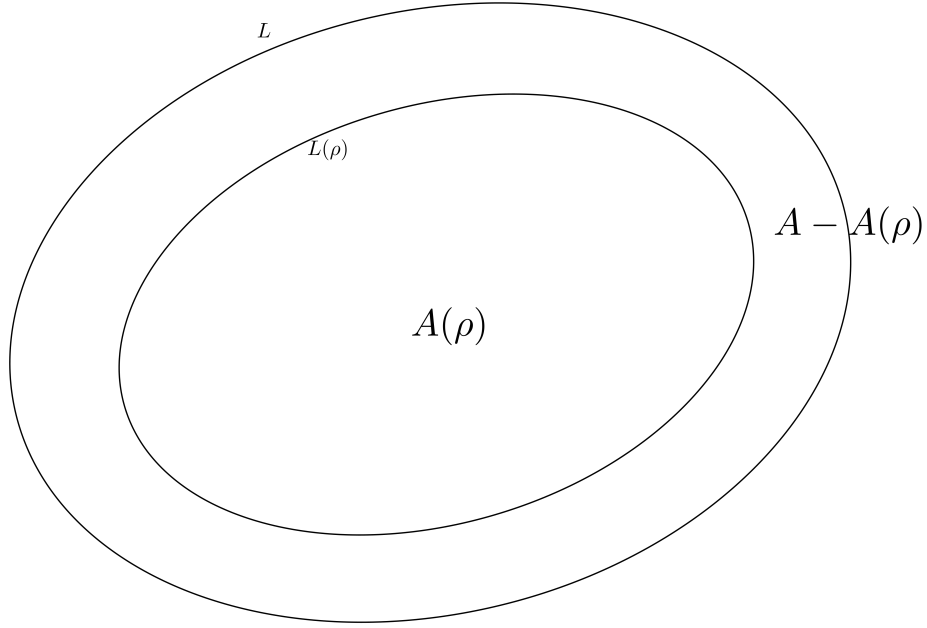
(A) Ha ρ megegyezik ρ_0 -al, akkor megkapjuk a Bonnesen-egyenlőtlenséget:

$$L \geq A/\rho_0 + \pi\rho_0,$$

(B) ρ kiküszöbölése a (3)-ból és a (4)-ből:

A (3)-ból kifejezzük ρ -t, így a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{L(\rho) - L}{2\pi} \geq \rho.$$



1. ábra. A konvex lemez és belső parallel tartománya.

Amelyet a (4)-ba behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
 A(\rho) &\geq A - \frac{L(\rho) - L}{2\pi} \cdot L + \pi \left(\frac{L(\rho) - L}{2\pi} \right)^2, \\
 4\pi A(\rho) &\geq 4\pi A - 2(L(\rho) \cdot L - L^2) + (L(\rho) - L)^2, \\
 4\pi(A(\rho) - A) &\geq 2L(\rho) \cdot L + 2L^2 + L(\rho)^2 - 2L(\rho) \cdot L - L^2, \\
 4\pi(A(\rho) - A) &\geq L(\rho)^2 - L^2,
 \end{aligned}$$

és átrendezve megkapjuk:

$$L^2 - L(\rho)^2 \geq 4\pi(A - A(\rho)). \quad (5)$$

Ha ρ megegyezik ρ_0 -al, akkor megkapjuk a klasszikus izoperimetrikus egyenlőtlenséget:

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Egyenlőség csak akkor állhat ha egyrészt (3)-ben egyenlőség áll, vagyis $D_\rho(\rho) = D$, valamint (5)-ben is egyenlőség áll $\rho = \rho_0$ esetén. Utóbbi azt jelenti, hogy D_{ρ_0} egyetlen pont, ami $D_{\rho_0}(\rho_0) = D$ egyenlőséggel együtt mutatja, hogy valóban csak körre teljesül az egyenlőség.

4. Izodiametrikus tétel a síkban

Ebben a szakaszban az izoperimetrikus tételhez hasonló állítást igazolunk, amelyben azonos átmérőjű konvex lemezeket vizsgálunk. Az itt leírtak lényegében [4] cikkben leírtakat követi.

4.1. Definíció. Egy D konvex lemez átmérőjén a leghosszabb húrjának hosszát értjük, azaz

$$\text{diam}(D) = \max\{\overline{xy} : x, y \in D\}.$$

4.2. Tétel (Izodiametrikus tétel). Adott átmérőjű konvex lemezek közül a kör a legnagyobb területű. Azaz tetszőleges $\text{diam}(D)$ átmérőjű D konvex lemezre

$$A \leq \pi \left(\frac{\text{diam}(D)}{2} \right)^2, \quad (6)$$

ahol A a D lemez területe.

Először belátjuk a következő lemmát, amit a 4.2. tétel bizonyításában használni fogunk.

4.3. Lemma. Vegyünk egy tetszőleges P ponthalmazt, aminek legyen az átmérője $\text{diam}(P)$. Jelölje S a P ponthalmaz konvex burkát, azaz $S = \text{conv}(P)$. Ekkor

$$\text{diam}(P) = \text{diam}(S),$$

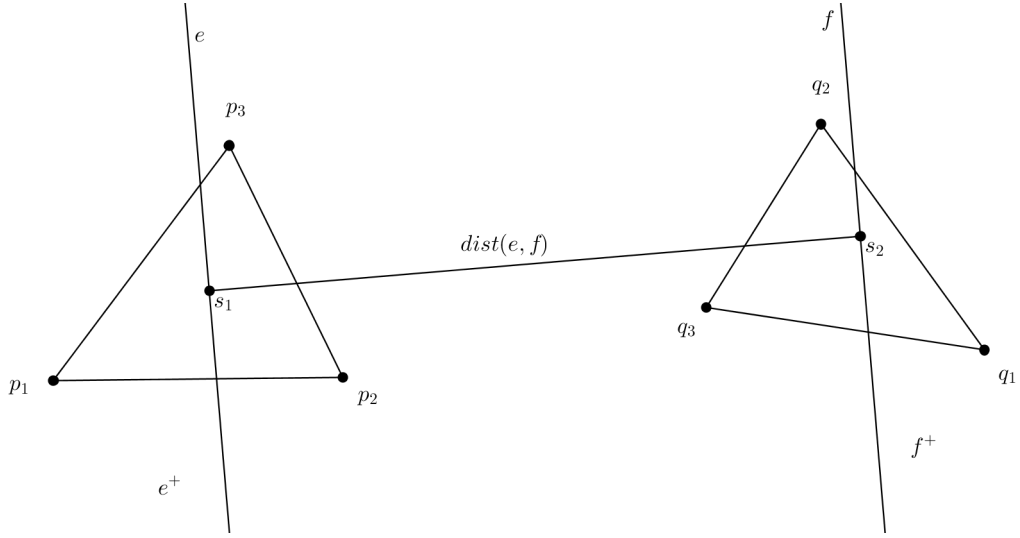
azaz a konvex burok képzés nem növeli az átmérőt.

Bizonyítás: Legyen P a ponthalmazunk, és S a konvex burka, azaz $S = \text{conv}(P)$. Jegyezzük meg, hogy $P \subseteq S$ miatt $\text{diam}(P) \leq \text{diam}(S)$.

Vegyünk két pontot a konvex burokból: $s_1, s_2 \in S$. Ahhoz, hogy a lemmát igazoljuk, elég lenne találnunk p és q pontokat P -ben, amelyek távolsága legalább $\overline{s_1 s_2}$.

A 2.9. tétel alapján léteznek olyan $p_1, p_2, p_3 (\in P)$ pontok, hogy ezeknek a pontoknak a konvex burka tartalmazza s_1 -t. Illetve léteznek olyan $q_1, q_2, q_3 (\in P)$ pontok, hogy ezeknek a pontoknak a konvex burka tartalmazza s_2 -t.

A bizonyítás első lépése, hogy merőlegeseket állítunk az $s_1 s_2$ szakaszra s_1 -ből és s_2 -ből az ábrán látható módon, legyenek ezek e és f . Világos, hogy $\text{dist}(e, f) = \overline{s_1 s_2}$. Jelölje e^+ az e egyenes azon (zárt) félsíkját, ami nem tartalmazza s_1 -t, és hasonlóan f^+ az f egyeneshez tartozó azon félsíkját, ami nem tartalmazza s_2 -t.



2. ábra. Carathéodory tétel szemléltetése

Világos, hogy a p_1, p_2 és p_3 pontok valamelyike e^+ -ba esik, hiszen e egyenes metszi a $p_1p_2p_3\triangle$ -t (s_1 biztosan benne van a metszetben). Feltehetjük, hogy $p_1 \in e^+$. Hasonlóan látható, hogy $q_1 \in f^+$. Így

$$\overline{s_1s_2} = \text{dist}(e, f) \leq \overline{p_1q_1} \leq \text{diam}(P).$$

Ebből az állítás adódik, mivel s_1 és s_2 tetszőleges volt. Magasabb dimenzióban a lemma bizonyítása ugyanezen az elven alapszik.

□

A 4.2. tétel bizonyítása:

Helyezzük el a lemezünket a koordinátenrendszerbe úgy, hogy teljesen a felső félsíkba essen, és az origóban érintse az x tengelyt. Ekkor a lemez határa leírható egy $f(\theta)$ függvénnyel az ábra szerint, ahol

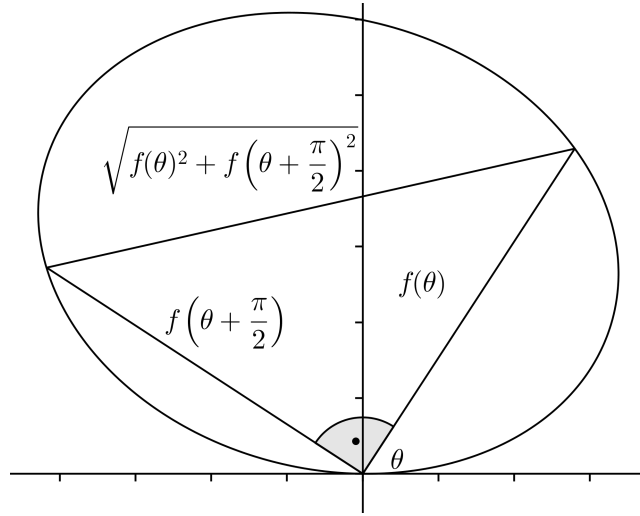
$$r \leq f(\theta), \text{ és } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Alkalmazzuk a [14]-ben leírtakat a test területének kiszámítására:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi f(\theta)^2 d\theta.$$

Osszuk fel az integrált két részre úgy, hogy

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} f(\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \cdot \int_{\pi/2}^\pi f(\theta)^2 d\theta.$$



3. ábra. Az $f(\theta)$ függvény

Majd használjuk a $t = \theta - \pi/2$, $dt = d\theta$ helyettesítést, ekkor kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} f(\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} f\left(t + \frac{\pi}{2}\right)^2 dt.$$

Így már egy integrál jel alá tudunk mindent hozni, mégpedig

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} f(\theta)^2 + f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2 d\theta.$$

Pitagorasz tétele alapján az integrandus, éppen a derékszögű háromszög átfogója az ábrán látható módon.

A definíció szerint az átfogó nem lehet nagyobb, mint a lemez $\text{diam}(D)$ átmérője, azaz

$$f(\theta)^2 + f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq d^2,$$

ahol $d = \text{diam}(D)$.

Tehát

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} f(\theta)^2 + f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2 d\theta \leq \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} d^2 d\theta.$$

Amelynél

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} d^2 d\theta = \frac{1}{2} \cdot d^2 \frac{\pi}{2} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Így megkapjuk, hogy

$$A \leq \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2,$$

amely az izodiametrikus egyenlőtlenség.

Az egyenlőség vizsgálata nehéz, erre a következő szakaszban még visszatérünk.

□

5. Az izodiametrikus egyenlőtlenség levezetése az izoperimetrikus egyenlőtlenség segítségével

Ebben a szakaszban rámutatunk az összefüggésre az izoperimetrikus és izodiametrikus egyenlőtlenségek között. A Brunn-Minkowski egyenlőtlenség (lásd 2.12. tétel) segítségével igazoljuk az izoperimetrikus egyenlőtlenséget, majd megmutatjuk, ebből hogyan vezethető le az általános izodiametrikus egyenlőtlenség. A hidat a kettő között az 5.2. tétel teremti meg.

A szakaszban lényegében a [8] cikk első felében leírtakat követjük. Az izodiametrikus egyenlőtlenségre számos bizonyítás ismert. A bemutatott új módszer előnye, hogy segítségével az izoperimetrikus egyenlőtlenségre ismert stabilitási eredmények „áthúzhatóak” az izodiametrikus egyenlőtlenségre is. Ennek ismertetése már túlmutat ezen dolgozat keretein, az érdeklődő olvasónak ajánljuk a már említett [8] cikket.

Első lépésként igazoljuk az izoperimetrikus tételt tetszőleges dimenzióban.

5.1. Tétel (Izoperimetrikus tétel). *Legyen K n -dimenziós konvex test, jelölje $A(\cdot)$ a felszín, $V(\cdot)$ a térfogatot. Ekkor*

$$\frac{(A(K))^n}{(V(K))^{n-1}} \geq \frac{(A(B^n))^n}{(V(B^n))^{n-1}},$$

ahol B^n az egységgömböt jelöli. Egyenlőség csak gömbre teljesül.

Bizonyítás:

A Minkowski-féle felszín definíció szerint

$$A(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(K + \varepsilon B^n) - V(K)}{\varepsilon}.$$

Végezzük el a következő becslést a Brunn-Minkowski egyenlőtlenség (2.12. tétel) segítségével

$$V(K + \varepsilon B^n) \geq ((V(K))^{1/n} + (V(\varepsilon B^n))^{1/n})^n = ((V(K))^{1/n} + \varepsilon(V(B^n))^{1/n})^n. \quad (7)$$

A binomiális tétel segítségével kapjuk, hogy

$$((V(K))^{1/n} + \varepsilon^{1/n}(V(B^n))^{1/n})^n = V(K) + \varepsilon n \cdot V(K)^{(n-1)/n} V(B^n)^{1/n} + \varepsilon^2(\dots). \quad (8)$$

A (7) formula és a (8) formula összehasonlításával adódik, hogy

$$V(K + \varepsilon B^n) \geq V(K) + \varepsilon n \cdot V(K)^{(n-1)/n} V(B^n)^{1/n} + \varepsilon^2(\dots).$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából kivonva $V(K)$ -t nyerjük, hogy

$$V(K + \varepsilon B^n) - V(K) \geq \varepsilon n \cdot V(K)^{(n-1)/n} V(B^n)^{1/n} + \varepsilon^2(\dots).$$

Majd leosztva ε -nal mindkét oldalt, megkapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$\frac{V(K + \varepsilon B^n) - V(K)}{\varepsilon} \geq n \cdot (V(K))^{(n-1)/n} (V(B^n))^{1/n} + \varepsilon(\dots).$$

Ezután $\varepsilon \rightarrow 0^+$ hatértékkel számolva az ε szorzóként tartalmazó tagok eltűnnek, így

$$A(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(K + \varepsilon B^n) - V(K)}{\varepsilon} \geq n \cdot (V(K))^{(n-1)/n} (V(B^n))^{1/n}.$$

Ezután emeljük a n -edik a hatványra az egyenlőtlenség mindkét oldalát

$$(A(K))^n \geq n^n \cdot (V(K))^{(n-1)} V(B^n).$$

Rendezzük az egyenlőtlenséget a következő módon

$$\frac{(A(K))^n}{(V(K))^{(n-1)}} \geq n^n \cdot V(B^n) = \frac{n^n \cdot V(B^n) (V(B^n))^{n-1}}{(V(B^n))^{n-1}}.$$

Ahol tudjuk, hogy $A(B^n) = n \cdot V(B^n)$, amely alapján megkapjuk a keresett egyenlőtlenséget:

$$\frac{(A(K))^n}{(V(K))^{n-1}} \geq \frac{(A(B^n))^n}{(V(B^n))^{n-1}}.$$

□

Az izodiametrikus tételt a következő tétellel együtt tudjuk igazolni.

5.2. Tétel. *Ha K egy konvex test $\mathbb{R}^n$ -ben, aminek az átmérője 2, azaz $\text{diam}(K) = 2$, akkor*

$$A(K) \leq A(B^n),$$

ahol B^n az egységgömböt jelöli. Amikor $n \geq 3$, egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha K gömb.

5.3. Tétel (Izodiametrikus tétel). Legyen K egy n -dimenziós konvex test, amire $\text{diam}(K) = 2$, és jelölje $V(\cdot)$ a térfogatot. Ekkor

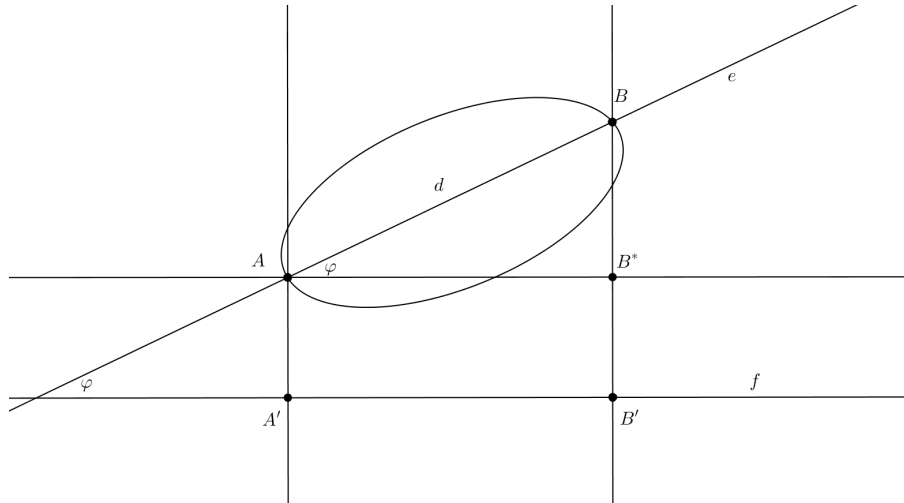
$$V(B^n) \geq V(K),$$

ahol B^n az egységgömböt jelöli. Egyenlőség csak gömb esetén áll fent.

Először is jegyezzük meg, hogy mindkét állítás triviális az $n = 1$ esetben. Mielőtt rátérnénk az általános bizonyításokra, igazoljuk a következő lemmát, amit használni fogunk.

5.4. Lemma. A (merőleges) projekció nem növeli az átmérőt.

Bizonyítás:



4. ábra. Projekció

Világos, hogy elegendő azt igazolni, hogy egy szakasz hossza nem nőhet, ha merőlegesen vetítjük egy egyenesre. Ebből az állítás azonnal következik.

Legyen D konvex tartomány és az átmérője d , azaz $\text{diam}(D) = d$ és legyen f tetszőleges egyenes.

Ekkor vegyünk egy tetszőleges $\overline{AB}$ szakaszt D -ben, az AB egyenest jelölje e . Nyilván $d \geq \overline{AB}$. Ezután legyen az A' és B' az A és B pont merőleges vetülete az f egyenesen. Megkaptuk a d' szakaszt, azaz $d' = \overline{A'B'}$.

Legyen φ az a szög, amelyet az e egyenes zár be az f egyenessel. Vegyünk az f egyenessel párhuzamos egyenest az A ponton keresztül, ekkor a $\overline{BB'}$ szakaszon megkapjuk a B^* pontot. Így $\overline{AB^*} = d'$. Az AB^*B háromszög A

csúcánál lévő szög is φ az egyállású szögek tulajdonságai miatt. Így kapjuk, hogy $\overline{A'B'} = \overline{AB^*} = \overline{AB} \cos \varphi \leq \overline{AB} \leq d$.

Tehát egy szakasz merőleges vetülete nem lehet hosszabb az eredeti szakasznál. Hosszuk csak is akkor egyenlő, ha a szakasz párhuzamos azzal az egyenessel, amire vetítjük.

□

Következő lépésként az 5.2. tételt igazoljuk $n = 2$ esetben.

Minden $\nu \in \partial B^2$ egységvektor esetén, legyen K merőleges vetülete a ν -re merőleges egyenesre K_ν .

Az 5.4. lemma, és a $\text{diam}(K) = 2$ feltétel miatt igaz a következő egyenlőtlenség

$$\text{diam}(K_\nu) = V(K_\nu) \leq \text{diam}(K) = 2.$$

A Cauchy-formulát (lásd [12, (6.12) formula, 222. old]) alkalmazva kapjuk, hogy

$$A(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial B^1} V(K_\nu) d\nu.$$

A fenti becslést alkalmazva a következő egyenlőtlenséghez jutunk

$$A(K) \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 d\varphi.$$

Az egyenlőtlenség jobboldalát kiszámolva nyerjük, hogy

$$A(K) \leq \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi = A(B^2).$$

A jobboldalon éppen az egység sugarú kör területét kaptuk. Így bebizonyítottuk az 5.2. tételt kétdimenzióban.

A következő lépésként az 5.3. tételt igazoljuk $n = 2$ esetben az 5.2. és az 5.1. tételek segítségével.

Az 5.1. tétel kétdimenziós esetben a következő:

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

A B^n ebben az esetben az egység sugarú kört jelenti, így az 5.2. tétel kétdimenziós esetben a következő:

$$2\pi \geq L.$$

Az 5.1. és az 5.2. tétel összevonásával kapjuk, hogy

$$(2\pi)^2 \geq 4\pi A,$$

$$4\pi \geq 4\pi A.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát leosztva 4π -vel megkapjuk, hogy

$$\pi \geq A.$$

Amely éppen a keresett egyenlőtlenségünk. Tehát

$$V(B^2) \geq V(K).$$

Következő lépésként az 5.2. tételt igazoljuk $n = 3$ esetben.

Minden $\nu \in \partial B^3$ egységvektor esetén, legyen K merőleges vetülete a ν -re merőleges (origót tartalmazó) síkra K_ν .

A Cauchy-formula (lásd [12, (6.12) formula, 222. old]) használatával meg tudjuk határozni K testünk felszínét:

$$A(K) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B^2} V(K_\nu) d\nu,$$

ahol $V(K_\nu)$ jelen esetben K_ν konvex lemez területét jelöli.

Ennek a továbbbecslésére szükség van egy felső korlátra. Ezt az 5.3. tétel 2-dimenziós esetéből, és az 5.4. lemmából adódó $\text{diam}(K_\nu) \leq 2$ feltétel segítségével kapjuk meg, amely így a következő

$$V(K_\nu) \leq \pi.$$

Tehát

$$A(K) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial B^2} \pi d\varphi.$$

A jobboldalt kifejtve nyerjük, hogy

$$A(K) \leq \int_{\partial B^2} d\nu = 4\pi = A(B^3).$$

A jobboldalon éppen az egység sugarú gömb felszínét kaptuk. Így bebizonyítottuk az 5.2. tételt háromdimenzióban.

A következő lépésként az 5.3. tételt igazoljuk $n = 3$ esetben az 5.2. és az 5.1. tételek segítségével.

Az 5.1. tétel háromdimenziós esetben a következő:

$$L^3 \geq 36\pi A^2.$$

A B^n ebben az esetben az egység sugarú gömböt jelenti, így az 5.2. tétel háromdimenziós esetben a következő:

$$4\pi \geq L.$$

Az 5.1. és az 5.2. tétel összevonásával kapjuk, hogy

$$(4\pi)^3 \geq 36\pi A^2,$$

$$4^3\pi^3 \geq 4 \cdot 3^2\pi A^2.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát leosztva 4π -vel megkapjuk, hogy

$$4^2\pi^2 \geq 3^2 A^2.$$

Mindkét oldalból gyököt vonva ill. leosztva 3-al nyerjük, hogy

$$\frac{4\pi}{3} \geq A.$$

Amely éppen az 5.3. tétel háromdimenziós esete, így igazoltuk ebben a dimenzióban is. Tehát

$$V(B^3) \geq V(K).$$

Általánosságban, azaz $n \geq 3$ esetben is ugyanígy működik a bizonyítás menete. A következő ábra szemlélteti az izoperimetrikus, az izodiametrikus és az 5.2. tétel kapcsolatrendszerét. A magasabb dimenziós implikációk kimutatása a fentiekkel teljesen analóg, ezeket az olvasóra bízunk.

dimenzió	Izodiam. tétel	5.2. tétel	Izoperim. tétel
1	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓
3	✓	✓	✓
4	✓	✓	✓
⋮	⋮	⋮	⋮

Az egyenlőség esetének pontos leírása további vizsgálatokat igényel. Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy lényegében triviálisan következik [5] cikkben leírt eredményekből.

Hivatkozások

- [1] Catherine Bandle, *Isoperimetric inequalities*, Convexity and its applications, 1983, pp. 30–48.
- [2] C. Caratheodory and Study, *Zwei Beweise des Satzes, daß der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfangs den größten Unhalt hat*, Math. Ann. **68** (1909), 133–140.
- [3] Fodor Ferenc, *Diszkrét geometria*, Szeged (2013.) egyetemi előadás.
- [4] Harald Hanche-Olsen, *The two-dimensional isodiametric inequality*. <http://www.math.ntnu.no/~hanche/blog/isodiametric.pdf>.
- [5] Ralph Howard, *Convex bodies of constant width and constant brightness*, Adv. Math. **204** (2006), no. 1, 241–261, DOI 10.1016/j.aim.2005.05.015.
- [6] I. M. Jaglom and V. G. Boltyanskij, *Konvex alakzatok*, Polygon, 2011.
- [7] Kurusa Árpád, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Polygon (Szeged), 1999.
- [8] Francesco Maggi, Marcello Ponsiglione, and Aldo Pratelli, *Quantitative stability in the isodiametric inequality via the isoperimetric inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 3, 1141–1160, DOI 10.1090/S0002-9947-2013-06126-0.
- [9] H.A. Schwarz, *Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens*, Gesammelte Abhandlungen 2 Springer (1980), 327–340.
- [10] E. Schmidt, *Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen*, Math.Z. **4** (1939), 689–788.
- [11] Rolf Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [12] Rolf Schneider and Wolfgang Weil, *Stochastic and integral geometry*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [13] Alan Siegel, *A Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Plane Geometry*, 1–11. <http://www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf>.
- [14] Wikipédia, *Polárkoordináta-rendszer*. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Polárkoordináta-rendszer>.

6. Köszönetnyilvánítás

Szakedolgozatom megírásához nyújtott szakmai segítségért köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Vígh Viktornak, a Geometria Tanszék egyetemi adjunktusának.

Köszönöm továbbá családomnak és barátaimnak, akik tanulmányaim során türelemmel és megértéssel támogattak, sok hasznos tanáccsal láttak el, illetve mindig mellettem álltak és bíztattak.

7. Nyilatkozat

Alulírott Kátay Csaba András (KACTABT.SZE) kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2014. december 5.

Kátay Csaba András