

Képtárprobléma szakaszonként konvex görbe által határolt halmazra

Szakdolgozat

Páli Róbert László

Témavezető: Vígh Viktor

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	3
2. A klasszikus képtárprobléma	3
3. Előzmények	4
4. A tétel kimondásához szükséges fogalmak	6
4.1. Szakaszonként konvex zárt görbe	6
4.2. Pontok és örök	6
5. Fő eredmény	7
5.1. Az állítás második felének igazolása	7
6. Felső korlát bizonyításához szükséges fogalmak	8
6.1. Konvex dekompozíció	8
6.2. Dekompozíció gráfja és duális gráfja	9
6.3. Normális dekompozíció	10
7. Kedvező dekompozíció konstruálása	10
7.1. Szakaszonként konvex képtár standard dekompozíciója	10
7.2. A cellák osztályozása	11
7.3. A dekompozíció gráfjának a komponensei	12
7.4. Kedvező dekompozíció kialakítása	12
7.5. Nem ciklikus kedvezőtlen cellák kezelése	13
7.6. Ciklikus kedvezőtlen cellák kezelése	14
7.7. Kedvező dekompozíció duális gráfja	16
8. Megfelelő örök halmazának megkonstruálása	17
8.1. Egyszerű körök	17
8.2. A cellák csoportosításának esetei	18
9. Hivatkozások	23

1. Bevezető

A dolgozatban a képtár problémával illetve annak egy változatával foglalkozunk. Victor Klee 1973-ban vetette fel a jól ismert kérdés, hogy hány ór szükséges egy n oldalú sokszög alaprajzú képtár őrzéséhez. Erre a kérdésre Václav Chvátal adott mindenre kiterjedő választ 1975-ben [10]. Később a problémának számos variánsa született, és a képtár problémák a kombinatorikus geometria külön ágává fejlődtek. A szakdolgozatban a terület egy nagyon új, 2013-as eredményét dolgozzuk fel, amiben szakaszonként konvex határú alaprajzú képtárakra bizonyítunk optimális becslést az örök számára.

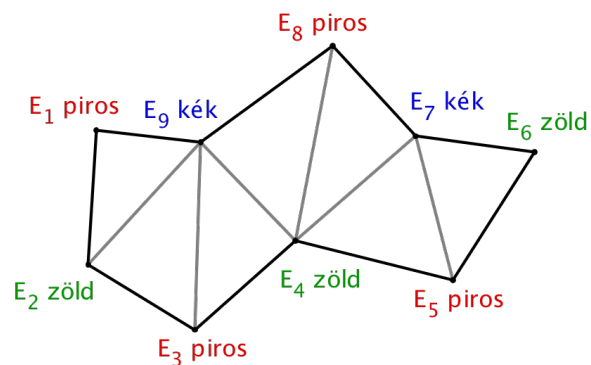
2. A klasszikus képtárprobléma

A klasszikus képtárprobléma tárgyalásakor egy zárt, nem önátmetsző töröttvonal által határolt, zárt P területtel, röviden sokszöggel dolgozunk. Ezt, a probléma során képtárnak nevezett, halmazt szeretnénk őrizni örökkel, azaz P -beli pontokkal. Olyan pontokat keresünk, hogy P minden pontja legalább az egyikből látható legyen. Egy pont pedig akkor látható a másiktól, ha az általuk meghatározott zárt szakasz része P -nek.

Chvátal klasszikus tétele. Minden $n \geq 3$ oldalú sokszög belátható $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ alkalmasan választott örrel, és vannak olyanok, amelyekhez szükséges ennyi pont.

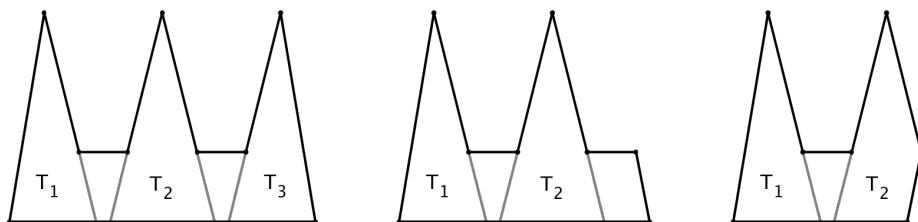
Bizonyítás. Steve Fisk a következőképpen bizonyította Chvátal tételét [9]. Vegyük a sokszög egy triangulációját. Tekintsük azt a G gráfot, amelynek csúcsai a poligon csúcsai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha a triangulációban van olyan háromszög, aminek mindkettő csúcsa, továbbá azt a duálisnak nevezett D gráfot, melynek csúcsai a háromszögek, amiket akkor köt össze él, ha van közös oldaluk.

Világos, hogy D egy fa. Ennek egyik gyökeréből kiinduló bejárás szerint haladva G a következőképpen háromszínezhető. Az első háromszöget tetszőlegesen színezzük. Ezután az aktuális háromszögnek mindig pontosan egy szomszédos háromszöge volt már színezve, tehát két csúcsa már színes, így a harmadik megválasztása is egyértelmű. A skatulya-elv alapján lesz olyan szín, amivel maximum $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ csúcsot színeztünk. Mivel mindegyik háromszöghöz tartozik mindhárom színű csúcs, egy háromszög pedig mindegyik csúcsából belátható, így ezen csúcsok megfelelő választások örökként.



1. ábra. Egy trianguláció háromszínezése

A második állításra az alábbi ábrával szemléltetett sokszögek a példák. Látható, hogy $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ fésűfog állítható össze n darab csúcs segítségével, és hogy az egyes fogak belátásához alkalmas pontok T_i halmazai nem metszik egymás. Ennek következményeképpen tehát szükséges az állításban szereplő mennyiségű pont.



2. ábra. Fésűfogas poligonok

□

3. Előzmények

A problémának azóta számos változatát vizsgálták. Az egyik osztályozási lehetőség az örökre vonatkozó korlátozások szerint történhet. Pontöröknek a klasszikus eset őreit hívjuk, amikor azok a képtár bármely pontjai lehetnek. Csúcsöröknek azokat nevezzük, amelyek a sokszögnek csúcsai, élöröknek pedig azokat, amelyek a poligon éleinek elemei. Az utóbbiakat Toussaint 1981-ben vezette be.

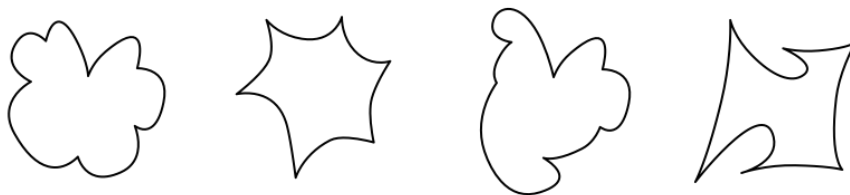
O'Rourke 1983-ban mozgó őrköt engedett meg, amelyek egy zárt képtárbeli szakaszon mozoghatnak [7], azaz a láthatóság az őrnék minősülő szakaszon vett legalább egy pontra teljesül. 1990-ben Urrutia bevezette őrk azon változatát, melyek korlátozott látószögben őriznek, vagyis az őrzött pont és az őrk által meghatározott szakasznak egy adott adott szögtartományba kell esnie.

A képtárak formája szerint is osztályozhatjuk a problémákat. Ortogonális poligonoknak azon sokszögeket hívjuk, amelyek minden szöge konvex vagy konkáv derékszög. Minthogy a valóságban gyakran ilyenek az épületek, és ezekre jobb korlát adható, népszerűvé vált. 1983-ban Kahn, Klawe és Kleitman bizonyította az ezzel kapcsolatos első nagyobb eredményt [3], vagyis hogy $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ elég és néha szükséges mennyiségű pontőr.

Lukas poligonnak azt a halmazt nevezzük, amely előáll egy P poligon és h darab páronként diszjunkt P -beli poligon belsejének különbségeként. Ilyen képtárakra az első nagyobb eredményt O'Rourke bizonyította, hogy $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ csúcsőr elég [6], de sejtését, hogy már $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ is megfelel, csak a $h = 1$ esetre bizonyította Shermer. Pontőrökre ez utóbbi éles eredményt egymástól függetlenül bizonyították Bjorling-Sachs és Souvaine illetve Hoffmann, Kaufmann és Kriegel [2].

Hasonlóan O'Rourke azt is bizonyította 1982-ben, hogy a lukas ortogonális poligonok $\lfloor \frac{n+2h}{4} \rfloor$ őrrrel őrizhetők [6], és megsejtette, hogy $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ is elegendő. Ezt 1990-ben Hoffmann bizonyította [1].

Nemrégiben Karavelas, Tsigaridas és Tóth általánosította a problémát olyan képtárakra, melyeknek élei nem szakaszok, hanem tetszőleges Jordan-görbék [8]. Ugyan általánosan nem határolható ilyen képtárak belátásához szükséges őrk száma a csúcsok számának függvényével, azonban ha kikötéseket teszünk ezen élekre, akkor különböző kezelhetőbb esetet kapunk. Példák az általuk vizsgált típusokra: szakszonként konvex vagy konkáv, lokálisan konvex vagy konkáv poligonok.



3. ábra. Képtárak néhány típusa

Ezen dolgozat a szakaszonként konvex képtárak pontörökkel való belátásával foglalkozik, speciálisan azok számának általános, a képtár csúcsainak számával meghatározható korlát konstruktív bizonyításával, amely Javier Cano, Csaba Tóth és Jorge Urrutia közös bizonyításán alapszik [4].

4. A tétel kimondásához szükséges fogalmak

4.1. Szakaszonként konvex zárt görbe

Egy önmagát nem metsző, folytonos, zárt sík-görbét akkor nevezünk szakaszonként konvex görbének, ha létezik olyan, az óramutató járása szerinti sorrendben indexelt $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n = p_0\}$ ($n \in \mathbb{N}$) ponthalmaz a görbén, amelyre fennállnak az alábbiak:

1. Minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén a p_k és p_{k+1} közötti görbeszakasz plusz a $\overline{p_k p_{k+1}}$ szakasz által közrezárt halmaz konvex.
2. Minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén p_k és p_{k+1} közötti görbeszakaszon minden pont a $\overline{p_k p_{k+1}}$ szakasz bal oldalán fekszik.

Egy ilyen görbe által határolt zárt területet szakaszonként konvex képtárnak nevezünk. Rögzítsünk egy minimális elemszámú olyan ponthalmazt, amelyre a fentiek teljesülnek. Nevezzük ezeket a pontokat a képtár és határának csúcsainak.

4.2. Pontok és örök

Legyen $L \subset \mathbb{R}^2$ és $o \in L$ tetszőleges, örök nevezett pont. Azt mondjuk, hogy $p \in L$ látható o örből, ha minden $x \in \overline{op}$ pontra $x \in L$ fennáll, azaz $\overline{op} \subset L$.

Legyen $O := \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) L tetszőleges örök halmaza. Azt mondjuk, hogy egy $p \in L$ pont látható O halmazból, ha létezik $x \in O$, ahonnan látható.

Egy o ör illetve örök O halmazából belátott területnek azon $p \in L$ pontok összességét nevezzük, amelyek beláthatók az o örből illetve örök O halmazából. Nyilvánvaló, hogy O halmazból belátott terület ugyanaz, mint az abban levő örök által belátott területek uniója.

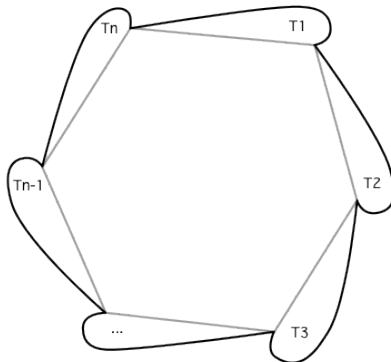
5. Fő eredmény

Cano, Tóth és Urrutia szakaszonként konvex képtárakra vonatkozó tétele. Bármely L szakaszonként konvex képtárhoz, amelynek csúcsainak száma n ($n \in \{2, 3, \dots\}$), létezik örök olyan halmaza, amely elemeinek száma nem nagyobb mint $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, és amely által belátott terület egész L , továbbá minden n esetén létezik olyan szakaszonként konvex képtár, hogy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ szükséges annak belátáshoz.

5.1. Az állítás második felének igazolása

Bizonyítás. A második állítás igazolásához Karavelas, Tóth és Tsigaridas [8] egy olyan szakaszonként konvex képtárat konstruált, amelynél minden konvex görbeszakaszra igaz, hogy az egyik csúcsában érintő egyenesén fekszik mindkét csúcs. Konkrétabban egy ilyen előállítható egy szabályos sokszögből kiidulva.

Vegyük minden w csúcsához az általa és utána következő v csúcs által meghatározott félegyenest, majd rajzoljunk egy olyan kört, ami v -nél érinti a félegyenest, és nem metszi a többi félegyenes egyikét sem, azaz elég kicsit ahhoz, hogy az adott szögtartományban maradjon. Vegyük azt a w csúcsból kiinduló érintőszakaszát a körnek, amelyik nem megy át v -n. Ez az érintő szakasz és a kör megfelelő része együtt egy konvex görbét alkotnak. Az így konstruált konvex görbék egy megfelelő szakaszonként konvex képtárat alkotnak.



4. ábra. Síkidom, amelyhez szükséges $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ őr

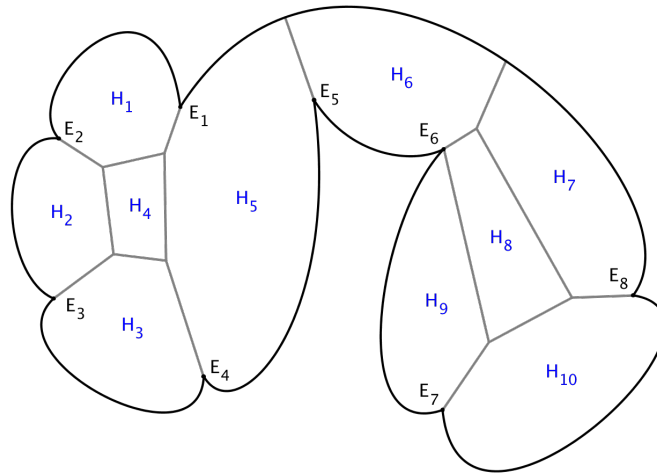
Legyen T_i az i -edik és az azt követő csúcs közötti szakasz és a fenti módon hozzájuk megalkotott konvex görbe által közrezárt terület. Minthogy a görbék érintik a csúcsaik által meghatározott szakaszt, nyilvánvaló, hogy T_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) teljes belátáshoz kell olyan o őröt választani, hogy $o \in T_i$, tehát $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ területekből egy őr egyszerre maximum kettőt lát be, ha az éppen csúcs. Emiatt nem lehetséges $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -nél kevesebb őrrel belátni a síkidomot.

6. Felső korlát bizonyításához szükséges fogalmak

6.1. Konvex dekompozíció

Legyen $L \subset \mathbb{R}^2$ zárt halmaz. Jelöljük $bd(L)$ -lel annak határát, $int(L)$ -lel belsejét, $P(L)$ -lel pedig hatványhalmazát, azaz összes részhalmazának halmazát.

Egy $L \subset \mathbb{R}^2$ zárt halmaz konvex dekompozíciójának olyan konvex és zárt halmazok összességét nevezzük, melyek belsejei páronként nem metszik egymást és együttesük maga L , azaz: $\mathcal{H} := \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\subset P(L)$ és $\bigcup \{H_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = L$ és $int(H_i) \cap int(H_k)$ üres ha i és k különbözőek. Ekkor $\mathcal{H}$ elemeit celláknak nevezzük.



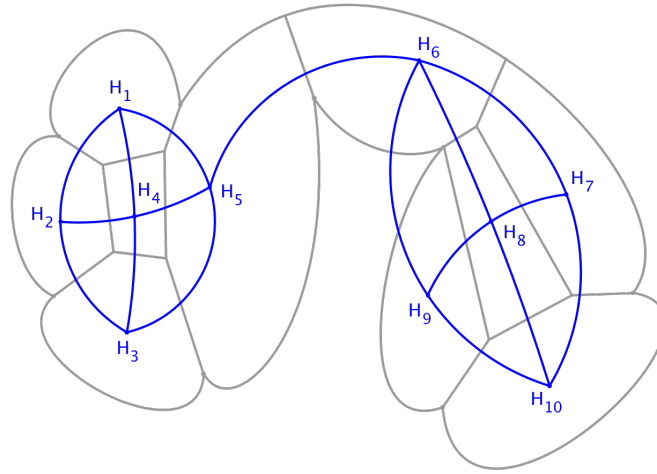
5. ábra. Konvex dekompozíció

6.2. Dekompozíció gráfja és duális gráfja

Legyen $C(\mathcal{H}) := \bigcup \{A \cap B \cap C : A, B, C \in \mathcal{H} \cup \{bd(L)\} \text{ és } A, B, C \text{ különbözőek}\}$ a $\mathcal{H}$ dekompozíció csúcsainak halmaza, vagyis azon pontok, melyek legalább három cella, vagy legalább két cella és L határának metszetei. Legyen továbbá $E(\mathcal{H}) := \{A \cap B : A, B \in \mathcal{H} \text{ és } A, B \text{ különbözőek}\}$ az éleinek halmaza.

Legyen $G(\mathcal{H})$ az a gráf, amelynek csúcsai $C(\mathcal{H})$, továbbá $c_i \in C(\mathcal{H})$ és $c_k \in C(\mathcal{H})$ különböző csúcsok pontosan akkor szomszédosak, ha $\exists e \in E(\mathcal{H})$ hogy $c_i \in e$ és $c_k \in e$. Ezt a gráfot a dekompozíció gráfjának nevezzük. Ennek éleiről gyakran geometriai értelemben beszélünk, azaz azonosítjuk őket a bennük levő csúcsok által meghatározott zárt szakasszal.

Legyen $D(\mathcal{H})$ az a gráf, amelynek csúcsai a $\mathcal{H}$ halmaz elemei, továbbá $H_i \in \mathcal{H}$ és $H_k \in \mathcal{H}$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak, ha metszetük nem üres. Ezt a gráfot a dekompozíció duális gráfjának nevezzük. Vegyük észre, hogy a duális gráfnak minden legalább három csúcsú teljes részgráfjának megfeleltethető egy $C(\mathcal{H})$ -beli, nem L határán lévő elem. Ennek az éleit is olykor azonosítjuk geometriai értelmezésükkel, azaz a bennük lévő cellák metszetével.

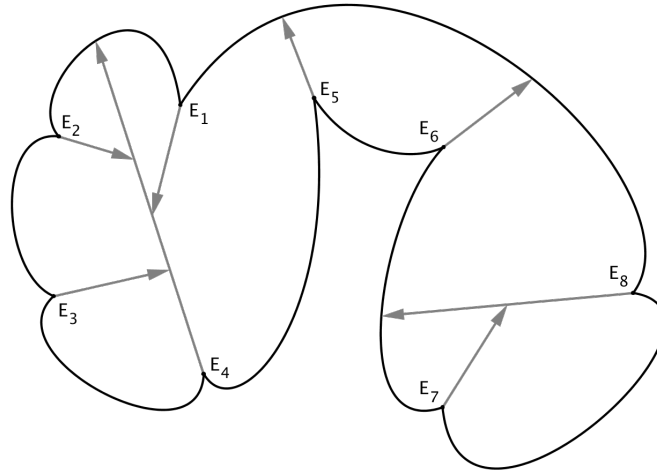


6. ábra. Duális gráf

6.3. Normális dekompozíció

Egy szakaszonként konvex L képtár $\mathcal{H}$ dekompozícióját normális dekompozíciónak nevezünk, ha elemszáma L csúcsainak számánál eggyel több, és a hozzá tartozó $G(\mathcal{H})$ gráfnak létezik olyan $G_d(\mathcal{H})$ irányítása, amelyre az alábbiak igazak:

1. L csúcsai a dekompozíció csúcsai is, és azoknak a ki-foka 1.
2. Minden csúcsnak, ami nincs L határán, a ki-foka 1.
3. Mindegy egyéb csúcsnak a ki-foka 0.



7. ábra. Normális dekompozíció

7. Kedvező dekompozíció konstruálása

7.1. Szakaszonként konvex képtár standard dekompozíciója

Itt rögtön kitérnék arra, hogy két csúcsú képtár triviálisan belátható egy őrral, emiat a továbbiakban feltesszük, hogy csúcsok száma legalább három.

Legyen L egy szakaszonként konvex képtár, annak csúcsai $p_1, p_2, \dots, p_n$ (akár-milyen sorrendben). Legyen $\mathcal{H} := \{L\}$ az eddig megválasztott halmazok halmaza, E pedig az eddig megválasztott szakaszok halmaza. Végezzük el az alábbiakat az összes csúcsra egyesével:

1. Vegyük a p_i csúcs két oldalán lévő konvex görbe szakaszok p_i -nél lévő féléríntőit által meghatározott zárt szögtartományt.
2. Válasszunk ezen szögtartományból egy tetszőleges nyílt félegyenest p_i kezdőponttal. Vegyük észre, hogy ez a félegyenes mindkét görbe-szakasszal konvex szöget zár be. Ezután keressük meg az eddig megválasztott szakaszokkal illetve L határával vett metszéspontjai közül azt, amely legközelebb van p_i csúcshoz. Legyen ez a pont q_i .
3. Válasszuk be $\overline{p_i q_i}$ szakaszt E -be, az általa kettévágott E -beli szakaszt (ha van ilyen) illetve H -beli elemet cseréljük le arra a kettő zárt szakaszra illetve halmazra, amire azokat felvágja.

Az így kapott $\mathcal{H}$ halmaz az L képtárnak egy normális dekompozíciója, és **standard dekompozíciónak** nevezzük. Az eljárás során folyamatosan megfeleltethetők az E -beli szakaszok és a végpontjaik által alkotott gráf élei.

Nyilvánvaló, hogy minden egyes lépés során pontosan eggyel nő $\mathcal{H}$ elemszáma, és hogy a konstrukció végén minden $\mathcal{H}$ -beli elemet konvex szögben találkozó szakaszok, vagy az eredeti konvex görbe-szakaszok részei határolják.

Ha az újonnan beválasztott szakaszokat $\overrightarrow{p_i q_i}$ szerint irányítjuk, továbbá az általa felvágott $\overrightarrow{p_k q_k}$ szakasz két oldalát $\overrightarrow{p_k q_i}$ és $\overrightarrow{q_i q_k}$ szerint, akkor az eljárás során folyamatosan teljesülnek a normalitás kritériumai.

7.2. A cellák osztályozása

Vegyük észre, hogy $\mathcal{H}$ cellái mind legalább egy csúcsát tartalmazzák L képtárnak, hiszen minden cella a konstrukció során úgy keletkezett, hogy egy csúcsból induló szakasszal daraboltunk egy zárt halmazt.

Azon cellákat, amelyek L képtár legalább két csúcsát tartalmazzák, kedvező, amik csak egyet, kedvezőtlen, amelyek pedig csak csúcsban vagy csúcsokban metszik L határát, ciklikus celláknak nevezzük. Egy dekompozíciót akkor hívünk kedvezőnek, ha minden benne foglalt cella kedvező.

Mivel egy ciklikus cella minden csúcsának ki-foka egy, így szükségképpen ezen csúcsok a dekompozíció gráfában kört alkotnak. Ilyen helyzet akkor fordulhat elő, ha a standard dekompozíció konstruálásakor olyan félegyenest választottunk, amely éppen egy másik csúcsot metszett először.

7.3. A dekompozíció gráfjának a komponensei

Lemma. Legyen $\mathcal{H}$ az L szakaszonként konvex képtár standard dekompozíciója. Minden maximális összefüggő részgráfja $G_d(\mathcal{H})$ -nak vagy egy fordítva irányított fa valamely, nem L csúcsába, de annak határára eső gyökérrel; vagy egyetlen (irányított) kör van benne, ami egy ciklikus cellát határol.

Bizonyítás. Legyen T egy maximális összefüggő részgráfja $G_d(\mathcal{H})$ -nak. Mivel minden csúcsnak a ki-foka maximum egy, így T minden köre irányított. Ha van két irányított kör, azok a fokszámra tett feltevés miatt nem metszhetik egymást. Használva, ha a két irányított kör diszjunkt, akkor őket egy úttal összekötve az szükségképpen tartalmazna (legalább) kettő ki-fokú csúcsot; így T nem tartalmazhat egynél több kört.

Ha nincs T -ben kör, akkor az visszafele irányított fa, hiszen a ki-fokok nem nagyobbak egynél, és a konstrukció miatt egyetlen olyan csúcsa lehet csak, aminek ki-foka nulla, az kénytelen a gyökér lenni, ami pedig csak olyan csúcs lehet, ami L -nek nem a csúcsán, de a határán van.

□

Azon cellákat, amelyek csúcsai közül van legalább egy, ami T -nek csúcsa, T kísértő celláinak nevezzük. Továbbá, ha T egy ciklikus cellát határol, akkor azt, különben a T gyökerét tartalmazó cellák közül azt a kettőt, amelyek L határát nem csak egy pontban metszik, speciális celláinak nevezzük.

7.4. Kedvező dekompozíció kialakítása

Lemmal. Minden legalább két csúcsú szakaszonként konvex képtárhoz létezik kedvező dekompozíció.

Bizonyítás. Legyen L egy tetszőleges szakaszonként konvex képtár, és vegyük annak egy $\mathcal{H}$ standard dekompozícióját. Ha az nem eleve kedvező, akkor az alább leírt módszerrel folytonosan áttranszformálható kedvező dekompozícióba, úgy, hogy közben végig érvényesülnek az alábbiak:

1. $G_d(\mathcal{H})$ minden e éléhez létezik L -nek olyan csúcsa, ami vagy kezdő csúcsa vagy utolsó csúcsa egy olyan irányított útnak, aminek az e él eleme, és amely útban lévő csúcsok egy egyenesen fekszenek.
2. Ha egy cella L egy csúcsát tartalmazta, akkor azt végig tartalmazza. Következésképpen a már kedvező cellák kedvezők maradnak.
3. A dekompozíció normális marad.

4. Minden ciklikus cella ciklikus marad.

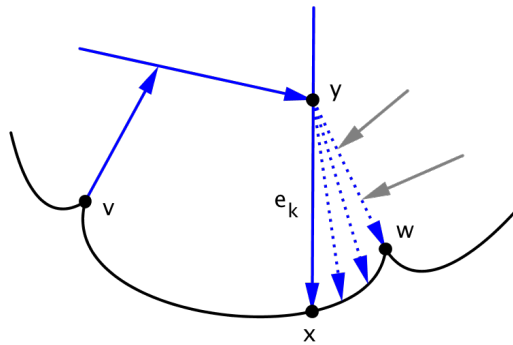
Nyilvánvaló, hogy a második feltétel a kiindulási standard dekompozícióban igaz, hiszen a konstrukcióban csak csúcsokból kiinduló szakaszokat használtunk annak megkonstruálásához.

A bizonyítást a jobb érthetőség kedvéért két szakaszra tagoljuk.

7.5. Nem ciklikus kedvezőtlen cellák kezelése

Keressünk egy kedvezőtlen nem ciklikus $c \in \mathcal{H}$ cellát. Ezen cella pontosan egy csúcsát tartalmazza L -nek, ahogyan azt korábban észrevettük. Legyen ez a csúcs v . $G_d(\mathcal{H})$ azon élei, amelyek c határán vannak, egy v kezdetű irányított utat alkotnak. Mivel c nem ciklikus, és nem is kedvező, ezért az út v melletti egyik konvex görbeszakaszon végződik, ellenkező esetben nem lehetne konvex. A c határa menti útnak lehetnek olyan részei, melyeken több mint két csúcs egy egyenesen fekszik, emiatt legyen $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ azon leghosszabb részutainak halmaza, amelyek csúcsai egy egyenesen fekszenek, és tegyük fel, hogy az indexelést az irányításnak megfelelően választottuk. (Az e_i utak nem feltétlenül a dekompozíció élei.)

Legyen y kezdő x pedig végződő csúcsa e_k útnak. Mozgassuk x pontot folytonosan az L -t határoló megfelelő görbe-szakasz mentén v -vel ellentétes irányba úgy, hogy közben az e_k -n fekvő csúcsok is kollineárisan mozognak az e_k -n kívüli, belőlük induló szakaszok mentén. Ha egy csúcshoz több ilyen szakasz is található, akkor a csúcs lecserélhető egy útra, ami az említett szakaszok és az $\overline{xy}$ metszeteit tartalmazza, illetve, ha x találkozik $G(\mathcal{H})$ egyik csúcsával, akkor is hasonlóképpen fel lehet venni egy plusz rész-utat.



8. ábra. Nem ciklikus cella deformálása

Ilyen esetben is megőrződnek a $G_d(\mathcal{H})$ -ra vonatkozó foksám kritériumok és nyilvánvaló, hogy egyik cella sem veszíti el olyan csúcsát, ami L -nek is csúcsa, és a mozgítás során ez az egyetlen művelet, ami a $D_d(\mathcal{H})$ gráfon módosít annak nem geometriai értelmezésében. Azt is vegyük észre, hogy új cella nem alakulhat ki, és olyan helyzet sem állhat elő, hogy e_k egyik éle egy pontba húzódna össze.

Ha x eléri a v_i melletti csúcsot, vagy egy olyan helyzetet, hogy $\overline{xy}$ nyílt szakasz tartalmazza L bármely csúcsát, akkor a c cellát kedvező cellává transzformáltuk.

Ha a mozgítás közben e_k kollineárisá válik e_{k-1} -el, akkor ismét megkonstruálható az $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ halmaz, k csökken, és folytatható a transzformálás.

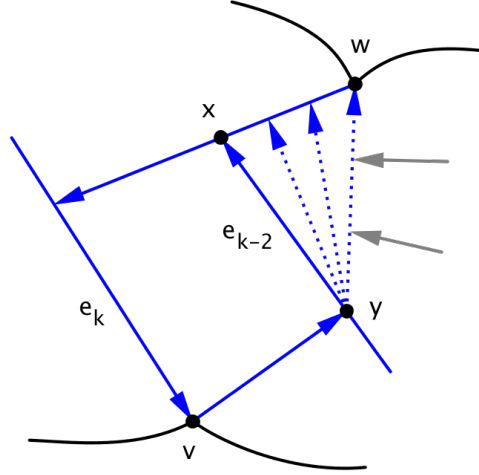
Ez utóbbi biztosítja, hogy c végig konvex marad, kivéve, ha $k = 1$, ekkor viszont a görbe-szakasz konvexitása miatt nem sérülhet a cella konvexitása.

Az, hogy az e_k -n kívüli, nem megszűnő élek az első feltételt nem sértik, nyilvánvaló, e_k éleire ugyan ideiglenesen nem lesz igaz, azonban mivel a mozgítás végén L -ben végződik e_k , ezért az ismét igazzá lesz. A harmadik és negyedik feltételek teljesülése triviális.

7.6. Ciklikus kedvezőtlen cellák kezelése

Keressünk egy kedvezőtlen ciklikus $c \in \mathcal{H}$ cellát. Ezen cella pontosan egy csúcsát tartalmazza L -nek, ahogyan azt korábban észrevettük. Legyen ez a csúcs v . $G_d(\mathcal{H})$ azon élei, amelyek c határán vannak, egy irányított kört alkotnak. A c határa menti körnek lehetnek olyan részei, melyeken több mint két csúcs egy egyenesen fekszik, emiatt legyen $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ azon leghosszabb részutainak halmaza, amelyek csúcsai egy egyenesen fekszenek, v -től az irányítás szerint számozva. Az e_i utak tehát nem feltétlenül a dekompozíció élei.

Legyen y kezdő x pedig végződő csúcsa e_{k-2} útnak, ami létezik, hiszen k legalább három. e_{k-1} útnak van kollineáris folytatása valamelyik irányba úgy, hogy az tartalmazza L egy csúcsát. Nyilvánvalóan ez csak x irányában lehet. Legyen L szóban forgó csúcsa w . Mozgassuk x pontot folytonosan e_{k-1} mentén w irányába úgy, hogy közben a belső csúcsok is kollineárisan mozognak az e_{k-2} -n kívüli, belőlük induló szakaszokon. Ha egy csúcshoz több ilyen szakasz is található, akkor a csúcs lecserélhető egy útra, ami az említett szakaszok és az $\overline{xy}$ metszeteit tartalmazza, illetve, ha x találkozik $G(\mathcal{H})$ egyik csúcsával, akkor is hasonlóképpen fel lehet venni egy plusz rész-utat.



9. ábra. Ciklikus cella deformálása

Hasonlóan a nem ciklikus cellák esetén leírtakhoz: megőrződnek a $G_d(\mathcal{H})$ -ra vonatkozó foksám kritériumok és igaz, hogy egyik cella sem veszíti el olyan csúcsát, ami L -nek is csúcsa, és továbbra is ez az egyetlen művelet, ami a $D_d(\mathcal{H})$ gráfon módosít annak nem geometriai értelmezésében. Hasonlóan új cella sem alakulhat ki, és olyan helyzet sem állhat elő, hogy e_{k-1} egyik éle egy pontba húzodna össze.

Ha x eléri a w csúcsot, vagy egy olyan helyzetet, hogy $\overline{xy}$ nyílt szakasz tartalmazza L bármely csúcsát, akkor c cellát kedvező cellává transzformáltuk.

Ha a mozgítás közben e_{k-2} kollineárisá válik e_{k-3} -mal, akkor ismét konstruálható az $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ halmaz, k csökken, és folytatható a transzformálás.

Ez utóbbi biztosítja, hogy c végig konvex marad, kivéve, ha $k = 3$, ekkor viszont nyilvánvalóan nem alakulhat ki konkáv szög y csúcsnál.

Az, hogy az e_{k-2} -n kívüli, nem megszűnő élek az első feltételt nem sértik, nyilvánvaló, e_{k-2} éleire ugyan ideiglenesen nem lesz igaz, azonban mivel a mozgítás végén L -ben végződik e_{k-2} , ezért az ismét igaz lesz. A harmadik és negyedik feltételek teljesülése itt is triviális.

□

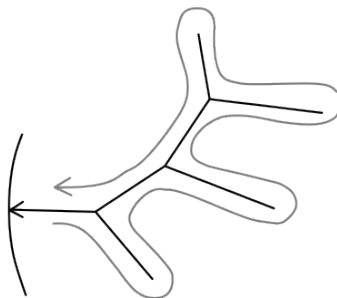
7.7. Kedvező dekompozíció duális gráfja

Legyen $\mathcal{H}$ egy rögzített kedvező dekompozíció. Legyen $G_d(\mathcal{H})$ -ban T egy maximális összefüggő részgráf, és $D(\mathcal{H})$ duális gráfnak legyen $D(T)$ az a részgráfja, amely T -nek a kísérő celláit tartalmazza csúcsként.

Vegyük észre, hogy $D(\mathcal{H})$ minden csúcsa legalább másodfokú, azaz minden cella legalább két másikkal szomszédos. Ez csak akkor nem triviális, ha egy cellának csak egy belső éle van, ilyen esetben az szükségszerűen az egyik csúcsban végződik, aminek ki-foka egy, így kell legyen másik él is abból csúcsból, akkor viszont abban három cella találkozik.

Lemmal. Legyen T $G_d(\mathcal{H})$ -ban egy maximális összefüggő részgráf. Ekkor $D(T)$ -ben található olyan kör, ami minden T -vel szomszédos nem ciklikus cellát tartalmaz.

Bizonyítás. Emélekezzük vissza: T vagy fordított irányítású fa, vagy pontosan egy kör van benne, ami egy ciklikus cellát határol. Ha T fordított fa akkor annak mélységi bejárása közben válasszuk be azon cellákat sorban, amelyeket a bejárás balról érint. Könnyű látni, hogy az így kapott utat lezárva egy megfelelő kört kapunk.



10. ábra. Kísérő callák bejárása a fa mentén

Ha T nem fa, hanem pontosan egy ciklikus cellát körülölelő kört tartalmaz, akkor hagyjunk el T -ből egy olyan élt, ami a körnek része, és L egy csúcsából indul. Eképpen egy olyan fát kapunk, amivel az iménti eljárást el lehet úgy végezni, hogy a c ciklikus cella a kapott útnak a végén legyen. L szóban forgó csúcsában triviális, hogy találkozik a c előtti és az első cella. Emiatt c elhagyható a körből. Legyen ez a kör $K(T)$. A lemma bizonyításának melléktermékeként az is kiderül, hogy $D(T)$ tartalmaz Hamilton-kört. Legyen ez utóbbi $K_h(T)$.

□

Lemmal. Ha c T -nek speciális cellái közül való, és semmilyen más $D_d(H)$ -beli maximális összefüggő részgráfnak nem kísérlője, akkor van L -nek olyan csúcsa, ami c -nek és T másik két kísérlő cellájának is eleme, és ezen két cella követi egymást az előző lemmából adódó $K(T)$ körben.

Bizonyítás. Ha T nem fa, akkor a ciklikus cella a speciális cella. Az a csúcs, amit $K(T)$ konstruálásakor kiválasztottunk a bejárás kezdőpontjaként, triviálisan szomszédja a ciklikus cellának, illetve $K(T)$ két szomszédos cellájának. Ha T nem fa, akkor tekintsük az egyik speciális c cellát. T gyökeréből indulva egy fordított út vezet c határa mentén L -nek egyik csúcsáig. Mivel a gyökér ki-foka nulla, ezért az nem lehet L -nek csúcsa, de c kedvező cella, tehát az említett fordított út mentén kell legyen még egy olyan v csúcs, ami L -nek is csúcsa. A $K(T)$ megalkotásának eljárásából adódik az állítás. □

8. Megfelelő örök halmazának megkonstruálása

8.1. Egyszerű körök

Legyen K egy tetszőleges kör $D(T)$ -ben. Legyen $R(K)$ azon cellák uniója, amelyeket a kör tartalmazza. Vegyük észre, hogy $R(K)$ pontosan akkor egyszeresen összefüggő, ha K nem ölel körül ciklikus cellát. Azon köröket, amelyekre $R(K)$ egyszeresen összefüggő, egyszerű köröknek nevezzük.

Lemmal. Minden egyszerű K körhöz tartozó $R(K)$ belátható $\lfloor k/2 \rfloor$ csúcsból, ahol k a körben lévő cellák száma.

Bizonyítás. Ha K -nak páros sok vagy három éle van, akkor az állítás egyértelmű. Különben legyen k egy minimális elemszámú rész-köre $G(\mathcal{H})$ -nak, amelyeknek legfeljebb egy kivételével minden éle K -nak is éle. Ha ez a k kör nem három elemű, akkor kell legyen egy cella, amit körülölel, ami ellentmondás, hiszen k is egyszerű kör kell legyen. Ez a minimális rész-kör egy csúcsból belátható. $R(K)$ maradék részét végigjárva kettesével csoportosíthatók a cellák, egy-egy őrt a cella-párok metszetére téve következik az állítás. □

Legyen Γ az a gráf, melynek csúcsai $G_d(\mathcal{H})$ maximális összefüggő részgráfjai, és amelyben két elem, pontosan akkor szomszédos, ha van olyan cella, ami mindkettővel szomszédos. Nyilvánvaló, hogy Γ összefüggő.

Γ elemeit indexeljük szélességi bejárás szerint: $\Gamma = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$. Legyen $n(T_i)$ T_i kísérőinek száma. Ez minden esetben legalább kettő.

Konstruálni fogunk $\mathcal{H}$ -hoz egy $O(\mathcal{H}) \subset P(\mathcal{H})$ halmazt, hogy $\bigcup O(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ és amelyben lévő elemek mind beláthatók egy őrrrel. Γ elemein haladva $O(\mathcal{H})$ -ba beválasztunk cella-csoportok úgy, hogy minden lépés végén maximum egy cella kivételével minden eddig vizsgált T_i -hez tartozó cella benne legyen $O(\mathcal{H})$ valamely elemében, az esetleg kimaradó pedig kísérjen egy olyan T_k -t, amelyre $k > i$. Ezen kimaradó cella később, T_k vizsgálatakor kerül $O(\mathcal{H})$ valamely elemébe. Azt mondjuk, hogy egy cella már fel lett dolgozva, ha egy csoporttal be lett választva $O(\mathcal{H})$ -ba.

Lemmal. Minden lépésben az aktuálisan vizsgált T_i kísérői közül legfeljebb egy lett már feldolgozva.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Akkor van legalább kettő olyan, c_1 és c_2 cella T_i kísérői között, ami már fel lett dolgozva. Tehát van olyan Γ -beli T_k elem, melynek kísérője c_1 . Világos, hogy c_2 ha fel van dolgozva, akkor van belőle induló olyan út T_k egyik kísérőjéhez, ami csak feldolgozott cellákon keresztül vezet, és nem megy át c_1 cellán, hiszen az csupán az utolsó lépésben lett feldolgozva. Ha c_1 cellát kivonjuk L -ből, akkor L -nek diszjunkt tartományokra kell szétesnie, hiszen c_1 L határát több szakaszon is nem csak csúcsban metszi. Ez ellentmond az iménti megállapításnak, tehát a feltevés hamis.

□

8.2. A cellák csoportosításának esetei

Haladjunk tehát végig Γ elemein a fent leírt indexelés szerint, és az alább leírt esetek szerint eljárva válasszuk meg a cella-csoportokat. Legyen T_i mindig az aktuálisan vizsgált csúcsa Γ -nak.

8.2.1. $n(T_i) = 2$

Ha a két cella közül egyik sem volt feldolgozva, akkor a beválasztott csoport maga a két cella, különben nem választunk be egy csoportot sem, és a kimaradó cella később kerül feldolgozásra. Emlékezzünk, hogy minden cella legalább két másikkal szomszédos.

8.2.2. T_i kísérő cellái közül egy sem volt feldolgozva

Ha $n(T_i) > 2$, akkor ahogyan azt korábban láttuk, $D(T_i)$ -ben van Hamilton-kör. $D(T_i)$ nyilván egyszeresen összefüggő, tehát a Hamilton-kör egyszerű kör. Korábban már megmutattuk, hogy egyszerű körökhöz létezik megfelelő csoportosítás.

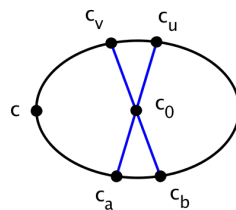
A későbbi esetekben többször fel lesz használva, hogy az egyszerű körökhöz létezik megfelelő csoportosítás. Ez a továbbiakban nem lesz külön kimondva.

8.2.3. $n(T_i)$ páratlan és kísérői között van feldolgozott cella

Ha $n(T_i)$ páratlan, akkor a $K_h(T_i)$ Hamilton-körből egy páros számú cellát tartalmazó utat kapunk. Ezen az úton a már feldolgozott cellától indulva kettesével csoportosíthatók a cellák.

A későbbi esetekben többször fel lesz használva, hogy a páros hosszú utakhoz létezik megfelelő csoportosítás. Ez a továbbiakban nem lesz külön kimondva.

8.2.4. $n(T_i)$ páros és van feldolgozott és ciklikus kísérője is



11. ábra. Ha van ciklikus cella

Legyen a korábban feldolgozott cella c , ami nem lehet maga a ciklikus c_0 cella, hiszen az csak T_i kísérője, ahogyan azt korábban láttuk. Minthogy c_0 kedvező cella, L határának két csúcsában is szomszédos két másik cellával. Legyenek ezek c_a és c_b illetve c_u és c_v , rendre a $K(T_i)$ -beli sorrendjük szerint. $c_b = c_u$ és $c_v = c_a$ elképzelhető. Feltehető hogy c a c_a és c_v cellák között helyezkedik el, netalán egyelő velük. Ha c és c_a cella között, mindkettőt beleszámítva, páros számú cella van a $K(T_i)$ körön, akkor legyen $c_x = c_a$, különben $c_x = c_b$. Ha pedig c_v és c cella között páros számú cella van a $K(T_i)$ körön, akkor legyen $c_y = c_v$, különben $c_y = c_u$.

Eképpen kaptunk egy utat, ami a c utáni első cellától indul, és a c_x előtti utolsó cellában végződik, és páros, esetleg nulla, eleme van. Hasonlóképpen a c_y utáni első cellától a c előtti utolsó celláig ugyanilyen utat kaptunk. $K(T_i)$ maradék része egy olyan út, amelynek mindkét végpontja, c_x és c_y , szomszédos c_0 ciklikus cellával, így az kiegészíthető egyszerű körrel.

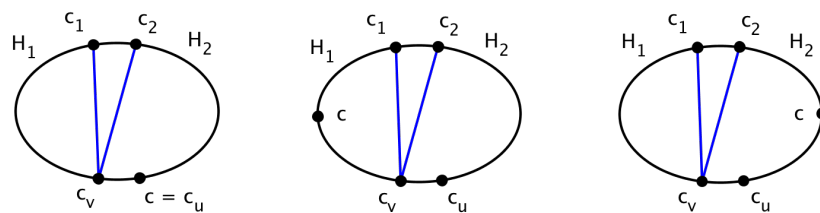
8.2.5. $n(T_i)$ páros és nincs ciklikus de van feldolgozott kísérője

Legyen a korábban feldolgozott cella c , továbbá legyen c_u és c_v a T_i -beli két speciális cella, melyek $K(T_i)$ konstrukciója szerint szomszédosak. Különböztessük meg az eseteket aszerint, hogy ezek közül melyek szomszédosak más Γ -beli elemmel is.

Ha mind c_u és c_v is kísérője egy másik T_k maximális részgráfnak is, és valamelyikük egyenlő a már lefedett c cellával, akkor a másikat meghagyhatjuk későbbi feldolgozásra, a megmaradt út pedig páros cellát tartalmaz.

Ha egyik sem egyenlő c -vel, akkor $K(T_i)$ körön haladva a c utáni első cellától c_u -ig illetve c_v -től a c előtti utolsó celláig két utat kapunk. Legyen c_w az a cella c_u és c_v közül, amelyik az imént említett utak közül a páratlan hosszúságúak eleme. Ha c_w -t későbbi feldolgozásra hagyjuk meg, akkor a maradék cellák páros hosszú, esetleg nulla méretű, utakon helyezkednek el.

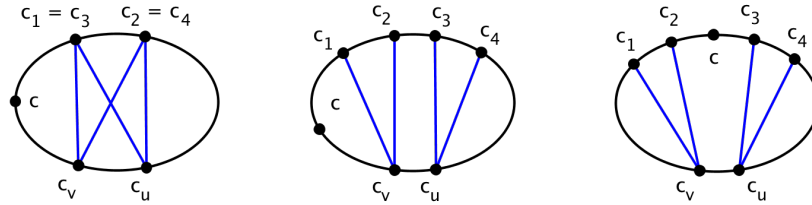
Ha c_u és c_v közül csak az egyik, feltehető, hogy c_u , kísérője egy másik T_k maximális részgráfnak is, akkor legyen c_1 és c_2 az a két cella, amelyek uniója c_v -vel egy örből láthatók. Ha c_v , c_1 és c_2 cellákat elvesszük a $K(T_i)$ körből, akkor két utat kapunk. Legyen H_2 az az út, amin rajta van c_u , H_1 pedig a másik. Az általánosság szűkítése nélkül feltehető, hogy c_1 az a cella, ami H_1 úttal szomszédos $K(T_i)$ -ben. Három alesetet vizsgálunk:



12. ábra. Ha pontosan egy speciális cella csak T_i kísérője

1. Ha $c_u = c$, akkor Tekintsük azt az utat, ami $K(T_i)$ -nek része, c_u -ból indul, azt nem hozzávéve, és a c_1 vagy c_2 előtti celláig tart, aszerint, hogy melyik esetben páros a hossza. Az az út, ami a $K(T_i)$ kör megmaradt celláiból áll, lezárható egyszerű körré a c_v és a c_1 vagy c_2 összekötésével.
2. Ha c nem egyenlő c_u -val, és az H_1 -en fekszik, akkor vegyük azt a kört, amit úgy kapunk, hogy H_1 -hez hozzávesszük a c_v és c_1 vagy c_2 cellákat, és a megfelelő éleket, aszerint, hogy melyik esetben páratlan a kör mérete. Ennek a körnek a c kivételével kapott része egy páros hosszú út. $K(T_i)$ a megmaradt része egy páratlan hosszú út, ami c_u -ban végződik, tehát ha c_u - cellát később dolgozzunk fel.
3. Ha c nem egyenlő c_u -val, és az H_2 -őn fekszik, akkor tekintsük először azt az utat, ami része $K(T_i)$ -nek, c és c_u között halad, azokat nem beleszámítva, és nem eleme c_2 . Ha ez az út páros, akkor c_u cellát később dolgozzuk fel, különben hozzávesszük az úthoz, hogy egy páros hosszú utat kapjunk. Most vegyük azt az utat, ami c_u és c_2 között halad, azokat nem beleszámítva, és amelynek nem eleme c_v . Ha ez az út páratlan, akkor vegyük hozzá c_2 cellát is, hogy páros hosszú utat kapjunk. A $K(T_i)$ -nek a megmaradt feldolgozatlan cellái egy olyan úton vannak, mely a c_v és c_1 vagy c_v és c_2 éllel egyszerű körré egészíthető ki.

Végül, ha c_u és c_v közül egyik sem kísézője egy másik T_k maximális részgráfnak is. Ilyenkor a c_u -hoz tartozó csúcsok, melyek szomszédosak a $K(T_i)$ körben és egy űrből láthatók, legyenek c_1 és c_2 , illetve a c_v -hez tartozó hasonló csúcsok legyenek c_3 és c_4 . Három a esetet különböztetünk meg:



13. ábra. Ha mindkét speciális cella csak T_i kísézője

1. Ha c_1, c_2, c_3 és c_4 körül kettőt-kettő egybe esik. Feltehető, hogy $c_1 = c_3$ és $c_2 = c_4$. Ilyenkor a c csúcsból elindulva a $K(T_i)$ körön az egyik irányban c_u és c_v közül az egyik csúcsot érintjük, a másik irányban pedig c_1 és c_2 közül az egyiket. Ha ezek az utak közül van olyan, ami c cellát leszámítva páratlan hosszú, akkor hagyjuk ki belőle a c_u, c_v, c_1 és c_2 cellák közül a megfelelőt. Ez a két út tehát lefedhető a cellákat kettesével csoportosítva. A $K(T_i)$ kör maradék része egy olyan út, ami az egyik oldalon c_u vagy c_v cellában ér véget, a másik oldalon c_1 vagy c_2 -ben. Mivel ezek szomszédosak, ezért ez a megmaradt út lezárható egyszerű körre.
2. Ha a c csúcs a c_u és c_v csúcsokkal elválasztja $K(T_i)$ körön a c_1 és c_2 cellákat a c_3 és c_4 celláktól. Ilyenkor a c csúcsból elindulva a $K(T_i)$ körön az egyik irányban c_1 és c_2 közül az egyik csúcsot érintjük, a másik irányban pedig c_3 és c_4 közül az egyiket. Ha ezek az utak közül van olyan, ami c cellát leszámítva páratlan hosszú, akkor hagyjuk ki belőle a c_1, c_2, c_3 és c_4 cellák közül a megfelelőt. Ez a két út tehát lefedhető a cellákat kettesével csoportosítva. A $K(T_i)$ körnek a maradék része egy olyan út, ami az egyik oldalon c_1 vagy c_2 cellában ér véget, a másik oldalon c_3 vagy c_4 cellában. Ez a két végpont szomszédos rendere c_u és c_v cellákkal, amik alapján ez a megmaradt út két egyszerű körre egészíthető ki, a c_u és c_v éltől eltekintve.
3. Ha a fenti esetek egyike sem igaz, akkor a c_1, c_2, c_3, c_4 csúcsok közül legfeljebb kettő esik egybe. Feltehető, hogy úgy vannak indexelve, hogy a c_2 és c_3 az, amilyenek között vezet olyan út, amin nincs rajta c_1, c_4, c, c_u, c_v egyike sem, legyen ez p . Ilyenkor a c csúcsból elindulva a $K(T_i)$ körön az egyik irányban c_1 és c_4 közül az egyik csúcsot érintjük, a másik irányban pedig c_u és c_v közül azt, amelyikkel az szomszédos. Feltehető, hogy c_1 és c_u ez a két csúcs. Ha ez két út, c cellát nem beleszámítva összesen páratlan hosszú akkor vegyük hozzá a megfelelő úthoz a c_2 cellát. Az így kapott két út összeköthető egy páros hosszú úttá. Az a c_1 és c_3 között vezető p útból vegyük el a már lefedett cellákat. A maradék csúcsok száma az úton ha páratlan, akkor vegyük el c_3 cellát is. Az így kapott tehát páros hosszú lesz. A $K(T_i)$ körnek a maradék része egy olyan út, ami az egyik oldalon c_3 vagy c_4 cellában ér véget, a másik oldalon c_4 cellában. Mivel ezek szomszédosak, ezért ez a megmaradt út lezárható egyszerű körre.

Tehát egy $n + 1$ elemű konvex dekompozíciónak egy olyan osztályozását hoztuk létre, hogy minden osztály legalább kételemű, és azok beláthatók egy őrral eképpen L belátható $\lfloor (n + 1)/2 \rfloor$ azaz $\lceil n/2 \rceil$ őrral. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

□

9. Hivatkozások

- [71] F. Hoffmann, *On the rectilinear Art Gallery Problem*, Springer Verlag lecture Notes in Computer Science 90 Proceedings, 717-728, 1990
- [62] F. Hoffmann, M. Kaufmann, K. Kriegel, *The art gallery problem for polygons with holes*, 32nd Annual Symposium of Foundations of Computer Science Proceedings, 39-48, 1991
- [43] J. Kahn, M. M. Klawe, D. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods 4, 194–206, 1983
- [94] Javier Cano, Csaba D. Tóth, and Jorge Urrutia, *A tight bound for point guards in piece-wise convex art galleries*, Comput. Geom. Theory. Appl. 46 (8) (2013), 945–958
- [105] Jorge Urrutia, *Art Gallery and Illumination Problems*, Handbook on Computational Geometry, Elsevier Science Publishers, J.R. Sack and J. Urrutia eds. pp. 973-1026, 2000
- [56] Joseph O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, 1987
- [37] Joseph O'Rourke, *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvátal's Theorem*, Geometriae Dedicata 14, 273-283, 1983
- [88] Manaleos I. Karavelas, Csaba D. Tóth, E. P. Tsigaridas, *Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards*, Computational Geometry: Theory and Applications, 522-535, 2009
- [29] Steve Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 24, 374, 1978
- [110] Václav Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 18, 39-41, 1975

Alulírott Páli Róbert László kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak a saját munkám eredményei, es csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.