

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

Szakdolgozat

A permutaéder

Készítette: Holyba Levente

Matematika BSc

Témavezető: Dr. Gévay Gábor

Szeged

2014.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Konvex politópok	3
2. A permutaéder geometriai leírása	5
3. Az n -ed fokú szimmetrikus csoport	8
4. Geometriai tulajdonságok	9
4.1. Szimmetriatulajdonságok	9
4.2. A permutaéder, mint archimédeszi test	10
4.3. A permutaéder, mint térkitöltő test	11
5. Egyéb tulajdonságok	14
5.1. Permutaéder a fizikában	14
5.2. Kombinatorikus tulajdonságok	16
Irodalomjegyzék	20
Köszönetnyilvánítás	22
Nyilatkozat	23

Bevezetés

Ezen szakdolgozat célja, hogy bemutassa a permutaédert és annak elemi tulajdonságait. Olyan szempontból is hasznos a permutaéderrel foglalkozni, mert azon konstrukciók közé tartozik, melyek nem csak egyetlen ágát érintik a matematikának. Segítségével összekapcsolhatók bizonyos geometriai, kombinatorikai és csoportelméleti ismereteink is. Ennek a többrétűségnek köszönhetően egyes témák, problémák könnyebben magyarázhatóak lesznek, mivel más oldalról is megközelíthetőek.

Mivel a permutaéder az egyik szokásos definíció szerint konvex politópként is definiálható, az első fejezetben néhány, a konvex politóp fogalmával kapcsolatos definíciót ismertetek. Ezután magáról a permutaéderről esik szó, de nem a konkrét tulajdonságok kifejtésével, hanem magával a definícióval, és az általános tulajdonságok ismertetésével. Magát a két- és háromdimenziós esetet ábrával is szemléltetem. A következő fejezetek foglalkoznak a tulajdonságok bővebb kifejtésével. Az elemibb geometriai, kombinatorikai és csoportelméleti tulajdonságokat fogjuk ezekben a fejezetekben bemutatni, továbbá ismertetem a háromdimenziós permutaéder fizikai vonatkozásait is.

A téma választásában nagy szerepe volt témavezetőmnek, Dr. Gévy Gábornak, aki ajánlotta a permutaéder szakdolgozatban való feldolgozását. Mivel tanári pályára készülök, az itt tárgyalt ismereteket majd a későbbi munkám során is tudom remélhetőleg alkalmazni. Ismeretterjesztés esetén, illetve tehetséges gyerekek számára rendezett szakkörökön kerülhet elő a permutaéder, ahol a tulajdonságain keresztül több elemi matematikai ismeretet szemléltethetünk.

1. fejezet

Konvex politópok

Ebben a részben a konvex politópok megismeréséhez szükséges ismereteket taglaljuk. Mindez azért szükséges, mert a dolgozatban tárgyalt permutaéder is a konvex politópok közé sorolható. A definíciók és jelölések tekintetében G. Horváth Ákos, Lángi Zsolt: *Kombinatorikus geometria* c. könyvére támaszkodunk [4].

Kiindulásképpen vegyünk egy $P \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pontot és egy tetszőleges lineáris alteret $\mathbb{R}^n$ -ben, amit L -lel jelölünk. Ekkor a $P + L \subseteq \mathbb{E}^n$ ponthalmazt az $\mathbb{E}^n$ tér egy *affin alterének* hívjuk. Vegyünk egy $A \subseteq \mathbb{E}^n$ halmazt. Ekkor definiálhatjuk az A halmaz *affin burkát*, ami nem más, mint az A -t tartalmazó összes affin altér metszete és $\text{aff}A$ -val jelöljük. Továbbá véges sok $P_1, P_2, \dots, P_k$ pont esetén, valamint olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ valós számokra, melyekre fennáll, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, megadható a $P_1, P_2, \dots, P_k$ pontok *affin kombinációja*, amit a $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ alakban definiálunk. Megmutatható, hogy az így definiált alakzat a $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ ponthalmaz affin burka.

Az affin kombinációhoz hasonlóan definiáljuk a konvex kombináció fogalmát. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{E}^n$. Ha a P pont vektora felírható $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ alakban, ahol $\lambda_i \geq 0$ minden i -re, akkor azt mondjuk, hogy P a $P_1, P_2, \dots, P_k$ pontok *konvex kombinációja*. A konvex halmaz definiálása előtt a zárt szakasz fogalmát kell megismernünk. Egy $P, Q \in \mathbb{E}^n$ végpontú *zárt szakasznak* a P, Q pontok konvex kombinációinak halmazát értjük és $[P, Q]$ -val jelöljük. Ekkor a $K \subseteq \mathbb{E}^n$ halmaz *konvex*, ha tetszőleges $P, Q \in K$ esetén $[P, Q] \subseteq K$. A konvex politóp definiálásához már csak a konvex burok fogalma hiányzik. Egy $A \subset \mathbb{E}^n$ nemüres halmaz konvex burkán azon konvex halmazok metszetét értjük, melyek A -t tartalmazzák. Ezt $\text{conv}A$ -val jelöljük.

Mindezek ismeretében már minden lényeges fogalom adott ahhoz, a konvex politóp fogalmát definiálhassuk. Legyen $A \subset \mathbb{E}^n$ egy véges nemüres halmaz. Ekkor a $K = \text{conv}A$ halmazt *konvex politópnak*, vagy röviden *politópnak* nevezzük. A K konvex politóp *dimenziója* $\dim \text{aff}K$. Legyen $K \subseteq \mathbb{E}^n$ zárt, konvex halmaz. A H hipersík($(n-1)$ -dimenziós affin altér) a K halmaz támaszhipersíkja, ha $H \cap K \neq \emptyset$

és K benne van a H valamelyik zárt félterében. Ha H a K halmaz egy támaszhipersíkja, akkor a $H \cap K$ halmazt a konvex politóp egy *lapjának* nevezzük, melynek dimenziója $\text{aff}(H \cap K)$ dimenziója. Egy n -dimenziós konvex politóp esetén a 0-, 1-, illetve az $(n - 1)$ -dimenziós lapokat rendre *csúcsnak*, *élnek* és *hiperlapnak* nevezzük.

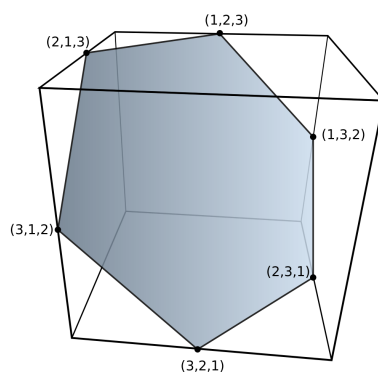
2. fejezet

A permutaéder geometriai leírása

2.1. Definíció. *Permutaédernek nevezzük azon n -dimenziós pontok konvex burkát, melyek koordinátái az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációival egyeznek meg.*

A definíció egy közvetlen következménye, hogy a permutaéder egy $(n - 1)$ -dimenziós konvex politóp az n -dimenziós térbe ágyazva. Ez abból látható, hogy a permutációknál a koordináta-összeg nem változik, tehát a permutaéder összes csúcsa az $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{2}(n + 1)n$ egyenletű hipersíkban helyezkedik el.

A permutaéder csúcsainak koordinátáit címkézhetjük tehát az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz rendezéseivel. Két csúcsot akkor kötünk össze, ha azok koordinátasora két szomszédos koordináta felcserélésében különbözik (2.2 Tétel). Legegyszerűbb tulajdonságait a kettő -illetve háromdimenziós eset bemutatásával lehet a legkönnyebben megérteni.



2.1. ábra.

Tekintsük elsőként tehát a kétdimenziós permutaédert. Ebben az esetben $n = 2$ és ezért a csúcsok megadására a helyvektorokat az $\{1, 2, 3\}$ halmaz összes lehetséges permutációjaként kapjuk meg. Adódik, hogy a kétdimenziós permutaédernek $3! = 6$ csúcsa van. Ha pedig jobban megvizsgáljuk a definíció szerint megadott konstrukciót, az is látszik, hogy egy szabályos hatszöget alkotnak ezek a csúcsok. Utóbbi

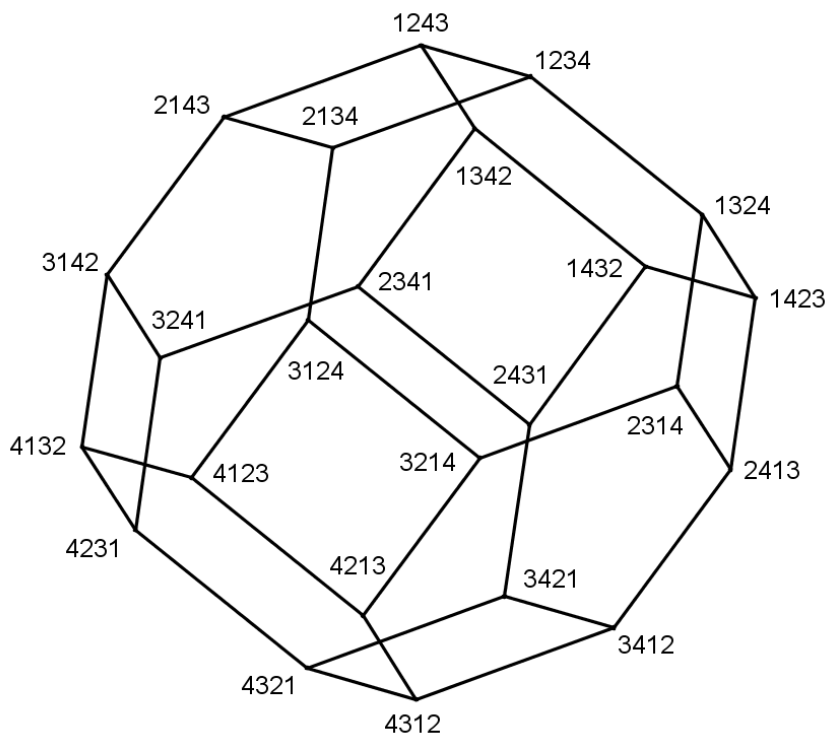
tulajdonság a szomszédos csúcsok koordinátáinak skalárszorzata segítségével igazolható. Ahogy azt a 2.1 ábra is mutatja, a hatszög a pozitív térnegyedben helyezkedik el, az $x + y + z = 6$ síkon belül. A permutaéder éleire érvényes az alábbi tétel:

2.2. Tétel. *Ha a permutaéder csúcsainak koordinátáit a 2.1. Definícióban megadott módon választjuk, akkor két csúcsot akkor és csak akkor köt össze él, ha ezek pontosan két koordináta felcserélésében különböznek, és e koordináták különbsége 1.*

A 2.1. ábrán közvetlenül látható e tétel teljesülése az $n = 2$ esetben.

A háromdimenziós permutaéder esetén már $4! = 24$ darab csúcs adott és ezeket a fenti tételnek megfelelő módon összekötve a 2.2 ábrán látható poliédert kapjuk. Ennek a poliédernek 8 hatszöglapja van, melyek mindegyike egy-egy 2 dimenziós permutaéder. Egy ilyen hatszög mentén pontosan az i -edik helyen ($i = 1, 2, 3, 4$) fixen marad az ott levő elem, és a fennmaradó 3 helyen teljesül az alacsonyabb dimenziós permutaéder konstrukciós elve. Van továbbá 6 darab négyzetlapja is aminek a magyarázatára majd a 4.1 alfejezetben fogunk visszatérni. Közelebbről, érvényes a következő szabály:

2.3. Állítás. *Egyazon négyzetlaphoz tartozó, egymásra merőleges élek mentén diszjunkt koordinátapárokon belül történik koordinátacsere.*



2.2. ábra.

A 2.2. ábrán a poliéder jobb felső elülső hatszöglapja lényegében megegyezik a 2.1. ábrán bemutatott kétdimenziós permutaéderrel. Itt annyi történt, hogy kiegészítettük a csúcsok helyvektorát egy negyedik koordinátával (ennek értéke 4). A 2.2 Tétel és a 2.3 Állítás alapján ez meghatározza a többi csúcs koordinátáit is, a következőképpen. Tekintsük a kiindulási hatszög $(2134) - (3124)$ élét. Az ezen él mentén csatlakozó hatszöglap csúcsai esetében az 1. és a 3. koordináta nem lehet fix, hiszen éppen ezek cserélődtek fel az adott él mentén. A 4. koordináta sem lehet fix, hiszen az a kiindulási hatszögön belül fix. Ezért csak a 2. koordináta lehet fix. A (2134) csúcsból balra induló él mentén a 2.3 Állítás alapján a 3. és 4. koordinátát lehet csak felcserélni. Mivel a $(2134) - (3124)$ él mentén (x_1x_3) koordinátacsere történt, a (2134) csúcsból balra induló él mentén pedig a koordinátacsere (x_3x_4) alakú, a hatszög következő, (2143) csúcsból lefelé induló él mentén már csak (x_1x_4) koordinátacsere történhet. A hatszöglap élei mentén ebben az irányban továbbhaladva, ugyanez a három koordinátacsere fog szerepelni. Ezzel már egy második hatszöglap csúcsainak koordinátáit is megtaláltuk. A további csúcsok koordinátáit ugyanezt az eljárást folytatva sorra meghatározhatjuk.

Vegyük észre, hogy az egymással átellenes csúcsok megfelelő koordinátái mindegyik 5-re egészítik ki egymást. Ez azt jelenti, hogy az ezeket a csúcsokat összekötő szakaszok felezőpontja a $C(2, 5; 2, 5; 2, 5; 2, 5)$ pont – más szóval a csúcsok halmaza, és ezért az egész poliéder centrálszimmetrikus erre a pontra nézve. A C pont egyúttal a permutaéder súlypontja is. Ha az $\vec{C}$ vektort kivonjuk minden csúcsvektorból, a súlypont az origóba kerül. Közvetlenül látható, hogy ekkor minden csúcsvektor hossza megegyezik. Ebből következik, hogy a permutaédernek van körülírt gömbje. Ezt a tulajdonságot egy kicsit más kontextusban a 4.1 fejezetben is belátjuk majd.

A kétdimenziós esetről triviálisan következett, hogy 6 darab éllel rendelkezik a konvex politóp, mivel az egy szabályos hatszöget alkotott. A háromdimenziós esetről azt használjuk fel, hogy az éleket csoportokba lehet sorolni. Hatféle (x_ix_j) alakú koordinátacsere van $(i \neq j)$, és minden ilyen koordinátapárhoz 6 értékpár rendelhető (amelyeket az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemeiből képezhetünk). Tehát összesen $6 \cdot 6 = 36$ él van, azaz, ennyi a poliéder éleinek teljes száma.

Magasabb dimenzióban is lényegében hasonló módon lehet leírni a permutaéder legegyszerűbb geometriai tulajdonságait. A következő fejezetekben további geometriai tulajdonságokat, valamint néhány egyszerű csoportelméleti, kombinatorikai és fizikai vonatkozást fogunk vizsgálni.

3. fejezet

Az n -ed fokú szimmetrikus csoport

3.1. Definíció. Egy halmaz saját magára invertálható leképezéseit permutációknak nevezzük. Egy X halmaz összes permutációjának csoportját az X halmaz szimmetrikus csoportjának nevezzük és $S(X)$ -szel jelöljük. Ha a halmaz véges, és n eleme van, akkor a csoportot szokás S_n -nel jelölni.

Számunkra is fontos ez az algebrában használatos fogalom, mivel a permutációk csúcsainak koordinátáit, az S_n által meghatározott permutációkkal adhatjuk meg. Ezeket a csúcsokat pedig, a definíció szerint akkor köti össze él, ha a megfelelő permutációk csak egy transzpozícióban térnek el.

3.2. Definíció. Az olyan permutációt, amely csak két elemet cserél fel és minden más elemet helyben hagy, transzpozíciónak nevezzük.

Belátható, hogy minden S_n -beli permutáció előállítható transzpozíciók szorzataként. Közelebbről, ismert a következő tétel:

3.3. Tétel. Az S_n csoport bármely permutációja előállítható a következő $n-1$ transzpozíció alkalmasszorzataként: $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.

Ezt a tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a tételben szereplő transzpozíciók *generálják* a csoportot, vagy másképpen, ezek a transzpozíciók a csoport *generátorai*.

A szimmetrikus csoport részcsoportjait permutációcsoportoknak hívjuk. A Cayley-féle reprezentációtétel kimondja, hogy minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal. Ez azzal magyarázható, hogy tetszőleges csoportra igaz az, hogy ha az összes elemét végigsorozzuk egy adott elemmel, akkor ez a művelet a csoport elemeinek egy permutációját adja.

4. fejezet

Geometriai tulajdonságok

A továbbiakban a háromdimenziós permutaéderrel foglalkozunk. Említésképpen a tulajdonságokat ismertetjük magasabb dimenziókban is, de azok a háromdimenziós esettel analóg módon beláthatóak.

4.1. Szimmetriatulajdonságok

A háromdimenziós permutaéder a négydimenziós euklideszi térben helyezkedik el. Csúcsainak koordinátái az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ egyenletnek tesznek eleget, tehát az ennek megfelelő hipersíkban található meg maga a permutaéder. Ezeket a koordinátákat az S_4 elemeinek segítségével adhatjuk meg, amely csoportot az $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ transzpozíciók generálják. Vegyük az i -edik és az $(i + 1)$ -edik koordinátatengelyhez tartozó szögfelező hipersíkokat $i = 1, 2, 3, 4$ esetén. Az így kapott két szögfelező hipersík közül azt tekintjük tükörhipersíknak, amelyik a tengelyek pozitív félegyenesei által alkotott szögtartományt felezi. Ez a H tükörhipersík a csúcspontokba mutató helyvektorok i -edik és $(i + 1)$ -edik elemét cseréli meg úgy, hogy a többi elem eközben invariáns marad. A H sík normálvektora megadható az $e_i - e_{i+1}$ standard bázisvektorok különbségeként is. A fenti transzpozíciók tehát geometriailag tükrözéseknek feleltethetőek meg, és így egybevágósági transzformációk csoportját kaptuk, amelyet ezen tükrözések generálnak. Ez utóbbi csoport egyébként az A_{n-1} -el jelölt Coxeter-csoport, amely izomorf az S_n szimmetrikus csoporttal.

A generáló tükrözésekhez tartozó tükörhipersíkok rendszerét kaleidoszkópnak nevezzük. Pontosabban ez csak egy példa a kaleidoszkópra, ami egy tetszőlegesen megválasztott Coxeter-csoportozhoz tartozik. Jelöljük ezt a csoportot W -vel. Három dimenzióban ez a triéderes kaleidoszkóp általánosítása, amely Möbius nevéhez köthető. A generátorokhoz tartozó tükrök előállítják az összes lehetséges tükörképet, amelyet egymásról készíthetnek; tehát egyfajta "virtuális tükörként" viselkednek. Attól függően lehet véges vagy végtelen ezen tükrök rendszere, hogy a tükrök közös metszéspontja létezik vagy nem létezik (bármely két tükör közötti hajlásszög csak

diszkrét értékeket vehet fel).

Geometriailag a *Wythoff-konstrukció* segítségével is definiálhatjuk a permutaédert. Ekkor azt a részét kell a definíciónak helyettesíteni ezzel a konstrukcióval, mely a csúcsok összekötésére ad feltételt a transzpozíciókkal. Az előzőekben meghatározott kaleidoszkóp segítségével alkalmazzuk a Wythoff konstrukciót.

Vegyünk egy V pontot egy alkalmas helyen. Ezután alkossuk meg a V pont összes tükröképét (a generátor tükrözésekkel), majd ezen képek tükröképét is a "virtuális tükrök" összes lehetséges felhasználásával. Eszerint azt mondhatjuk, hogy megalkottuk a V pályáját, a kaleidoszkóp által meghatározott W Coxeter-csoport alatt. Végül vegyük ennek a pályának a konvex burkát, melyet a 1. fejezetben már definiáltunk. Eredményként egy P konvex politópot kapunk, melyben bármely (V_1, V_2) csúcspár esetében P -hez tartozik egy szimmetria-transzformáció ami V_1 -et V_2 -be viszi. Másképpen, a P -hez tartozó szimmetrikus csoport tranzitív a csúcsokra nézve (P csúcstranzitív). Megjegyezzük, hogy P szimmetriacsoportjának a fentebb tárgyalt W csoporttal meg kell egyeznie, vagy lehet egy nagyobb csoport, mely részcsoporthként tartalmazza W -t.

Általában a kezdeti V pontnak ki kell elégítenie bizonyos feltételeket annak érdekében, hogy a P szabályos konvex politóp legyen. Egy n -dimenziós konvex politópot *szabályos politópnak* nevezünk, ha minden $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ esetén a szimmetriacsoportja tranzitív a k -dimenziós lapok halmazán. A Wythoff-konstrukcióval megalkotott konvex politópokat szokás *Wythoff-politópoknak* is nevezni. A Wythoff-konstrukció ismeretében belátható, hogy a Wythoff-politópok mindegyikének van köréírt gömbje, hiszen az origót fixen hagyó izometriákkal transzformáljuk, ezért a csúcsoknak az origótól való távolsága nem változik.

A P Wythoff-politóp kezdőpontja legáltalánosabb helyzetben akkor van, ha az a kaleidoszkóp egyik tükrén sincsen rajta. Ebben az esetben a csúcsok száma egyenlő a W Coxeter-csoport transzformációinak számával.

Visszatérve a kezdő példához, azt látjuk, hogy az archimédeszi csonkított oktaéder az A_3 Coxeter-csoport által generált háromdimenziós Wythoff-politóp, ha a kezdő pont a megfelelő helyen van. Ez magyarázza a csúcsok koordinátakiosztását, melyet 2.2 ábrán láthatunk és azt, hogy mért tekintjük azt a háromdimenziós permutaédernek.

4.2. A permutaéder, mint archimédeszi test

A háromdimenziós permutaéder megegyezik a csonkított oktaéderrel. Így tehát az általunk tárgyalt konvex test archimédeszi test, melyet a következőképpen definiálhatunk:

4.1. Definíció. *Archimédeszi testeknek nevezzük azokat a konvex testeket, melyek*

csúcstranzitívek, lapjaik szabályos sokszögek és a szimmetriacsoportjuk megegyezik egy szabályos test szimmetriacsoportjával.

Tizenhárom archimédeszi testet különböztetünk meg, ezek közül a csonkított oktaéder 14 lappal rendelkezik melyből 8 db szabályos hatszög, 6 db pedig négyzet. Emellett a 24 csúcsát 36 él köti össze. Ezeket a testeket a csúcsalakzataikkal szokás megadni, azaz azokkal a szabályos sokszögekkel, amelyek egy csúcsban találkoznak. Így a csonkított oktaédert a (4.6.6) csúcsalakzat adja meg, mivel egy csúcsában egy négyzet és két hatszög találkozik. A hatszöglapok az oktaéder szabályos háromszöglapjainak csonkításaként állnak elő, a négyzetlapok pedig az oktaéder csúcsai helyén keletkeznek.

Az öt szabályos test egyikéből, a szabályos oktaéderből állítható elő a csonkított oktaéder. A nyolc egyenlő oldalú háromszöglapból álló konstrukció éleit válasszuk meg $3a$ hosszúra. Ekkor az oktaéder mind a hat csúcsáról eltávolítunk egy-egy négyzet alapú gúlát, ahol az alaplap oldalhossza a , és az oldallapjai pedig egyenlő szárú háromszögek. Ennek a testnek pedig már könnyen kiszámítható a felülete és a térfogata. Ha a csonkított oktaéder élének hossza a akkor $A = (6 + 12\sqrt{3})a^2$ és $V = 8\sqrt{2}a^3$.

4.3. A permutaéder, mint térkitöltő test

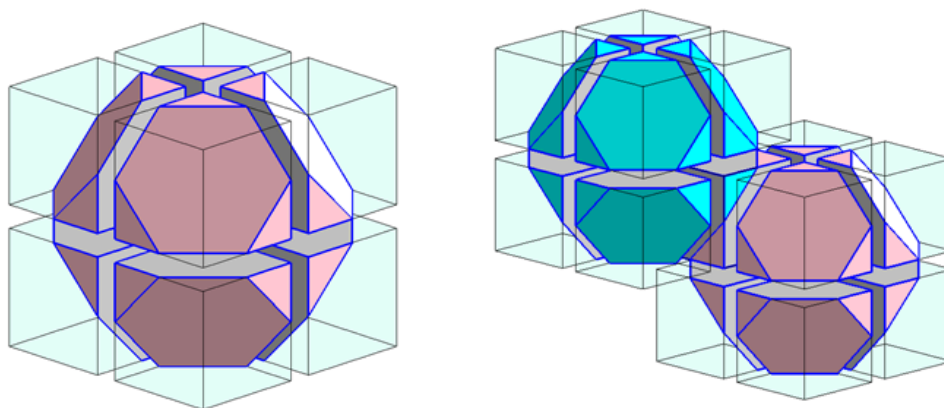
A geometriának nagy fejezete az, amely a lefedési (ezen belül, térkitöltési) problémákkal foglalkozik. A sík hézagmentes lefedésén olyan egymással egybevágó síkidommal történő lefedését értjük, amelyben bármely két síkidomnak nem lehet közös pontja, ugyanakkor a sík minden pontja hozzátartozik valamely síkidomhoz. Az ilyen lefedéseket szokás *csempézésnek*, vagy *parkettázásnak* is nevezni. Ha a sík egy pontja két síkidomnak is eleme, akkor az a két síkidom határvonalán, ha több (de véges sok) síkidomhoz tartozik, akkor az a határvonalak metszéspontján helyezkedik el.

Itt csak az ún. periodikus csempézésekre szorítkozunk. Ezekre jellemző, hogy ha a parkettázásra kiszemelt síkidomot, *alapalakzatot* egybevágósági transzformációval átvisszük a parketta bármely másik példányába, akkor ugyanez az egybevágóság az egész kiparkettázott síkot úgy képezi le önmagára, hogy változást nem tapasztalunk, azaz, a csempézés *invariáns* marad. Közismert, hogy a szabályos sokszögek közül a háromszöggel, négyzettel és a hatszöggel parkettázható ki a sík (itt az alapalakzat egy eltolással átvihető bármelyik másikba). Tehát a kétdimenziós permutaéder alkalmas arra, hogy a síkot hézagmentesen lefedje.

A síkbeli parkettázáshoz analóg módon értelmezhető a tér hézagmentes kitöltése. Szorítkozzunk a poliéderekkel történő térkitöltésre. Ha egy pont valamely poliédernek belső pontja, akkor az nem lehet pontja egyetlen másik tartománynak sem. Ha

minden poliéder lapja egybeesik egy másik, vele lapban szomszédos poliéder lapjával, akkor az ilyen parkettázást "lap-lap illeszkedésű" parkettázásnak nevezzük (a permutaéderrel való térkitöltés éppen ilyen). A poliéder minden éle egybeesik legalább kettő, vele élben szomszédos poliéder éllel is. Csúcsaira pedig az érvényes, hogy a poliéder minden csúcsában legalább három, egymással csúcsában szomszédos poliéder találkozik.

Könnyen származtatható a kockából a csonkított oktaéder térkitöltő tulajdonsága. Töltsük ki a teret egybevágó, egységnyi élű kockákkal, amelyek csúcsait az egész számokból álló számhármassok jellemzik. Jelöljük pirossal azokat a rácspontokat, amelyeknek mindhárom koordinátája páros, kékkel azokat, amelyeknek mindhárom koordinátája páratlan és szürkével a többit. Minden kockának pontosan egy piros csúcsa van, és ezzel szemben egy kék. Ugyanis a szomszédos csúcsok pontosan egy koordinátában különböznek, így minden piros vagy kék csúcsnak szürke szomszédja van. Vágjunk minden kockát ketté a piros-kék végpontú testátlójának a szakaszfelező merőleges síkjával, majd az így kapott poliédert "fessük" pirosra illetve kékre aszerint, hogy piros vagy kék kockacsúcs az egyik csúcsa. A szomszédos piros félkockák együtt egy csonkított oktaédert alkotnak, a kék úgyszintén. Középpontjuk egy-egy piros illetve kék rácspont. Ezzel kitöltöttük a teret csupa egybevágó csonkított oktaéderrel, mégpedig úgy, hogy minden poliédernek ellenkező színű az a szomszédja, amellyel közös hatszöglapja van, és vele azonos színű az, amellyel egy négyzetlap szomszédos.



4.1. ábra.

A permutaéder ráadásul úgy tölti ki a teret, hogy az összes példány egy kezdő alakzat eltoltja – azaz, a térkitöltés tiszta translációk segítségével történik. Az ilyen feltételnek eleget tevő térkitöltő poliédert *paralleloédernek* nevezik. Fedorov volt az első, aki osztályozta a háromdimenziós paralleloédereket. Fedorov szerint három dimenzióban 5 különböző típusú paralleloéder létezik. Ezek közül a csonkított oktaéder abban az értelemben maximális, hogy a lapszáma eléri a lehetségesen felvehető

legnagyobb értéket, azaz 14-et (vagy n -dimenziós esetben $2^{n+1} - 2$). Másfelől ez az egyetlen paralleloéder, melynek minden csúcsánál pontosan 4 (általánosan: $n + 1$) csempe találkozik a megfelelő csempézés esetén.

Bebizonyítható, hogy a magasabb n -dimenziós permutaéderek is hézagmentesen kitöltik az n -dimenziós teret.

5. fejezet

Egyéb tulajdonságok

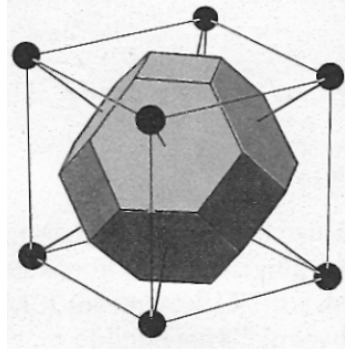
5.1. Permutaéder a fizikában

A tér hézagmentes kitöltésének a kristálytanban van gyakorlati jelentősége. A térkitöltő poliéderek él- illetve csúcsrendszere többnyire olyan elrendezést mutat, amely egy-egy kristály atomjainak az elrendezésével azonos.

A kristálytan azon szilárd anyagokkal foglalkozik, melyek kristályos szerkezetűek. Ezekben az anyagokban az atomok, ionok vagy a molekulák egy térrács pontjaiban (rácspontokban), meghatározott rendben helyezkednek el. Térrácsnak nevezzük az anyagokat felépítő építőkövek azon szabályos rendjét a térben, mely a tér mindhárom irányában szabályosan ismétlődik, és minden egyes rácspont környezete tökéletesen azonos. Az anyagot felépítő atomokat ebben a felfogásban egymást, meghatározott irányok mentén érintő gömböknek tekintjük. A rácsszerkezet szimmetriája miatt definiálhatjuk az elemi cella és a primitív cella fogalmát. Elemi cellának nevezzük a kristályszerkezet azon legkisebb egységét, amely az adott szerkezet valamennyi törvényszerűségét magával hordozza. Primitív cella pedig olyan elemi cella, mely a belsejében nem tartalmaz rácspontot. Fontos ismerni az atomok közötti kapcsolatokat és a rendezettség mértékét, mivel ezek különböző tulajdonságokra utalhatnak.

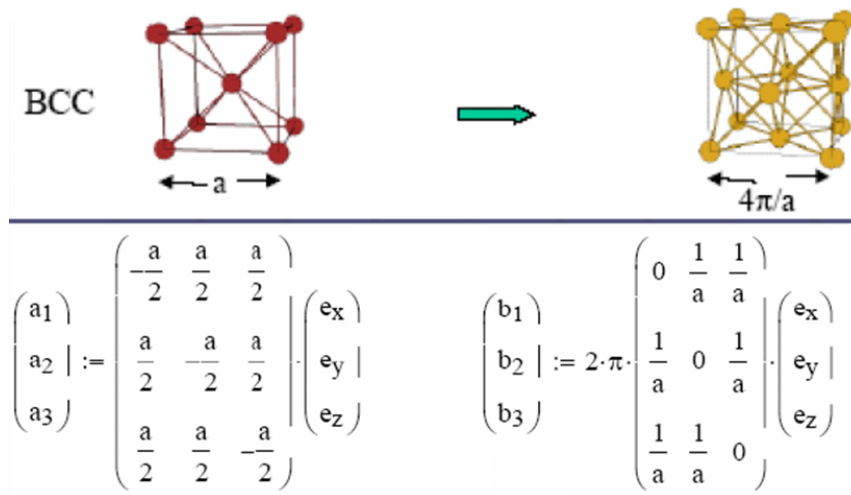
A XIX. században Bravais francia matematikus foglalkozott a ráctípusok rendszerezésével, és megállapította azt, hogy ha $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ elemi transzlációs vektorok, akkor ezen vektorok egész együtthatókkal vett lineáris kombinációja (amely egy transzláció) önmagába viszi a kristályrácsot. Emiatt $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ elemi rácsvektorok hosszának aránya és az α, β, γ , az egységvektorok által bezárt szögek nagysága szerint 7 kristályrendszert különböztetett meg a térben, melyek összesen 14 ráctípust foglaltak magukba. A 14 Bravais-rács közül nekünk most csak a tércentrált köbös rács (body centered cubic, BCC, $a = b = c$ és $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$) a fontos, mivel ezen rácsához tartozó Wigner–Seitz-cella megegyezik a háromdimenziós permutaéderrel. A Wigner–Seitz-cella olyan primitív cella, mely a rács teljes szimmetriáját mutatja,

és csak egy rácspontot tartalmaz. Ezt a cellát pedig úgy konstruálhatjuk meg, hogy kiválasztunk egy tetszőleges rácspontot, majd ezt a pontot összekötjük a legközelebbi szomszédos rácspontjaival, és a kapott szakaszok felezőmerőleges síkjai határolják majd a Wigner–Seitz-cellát.



5.1. ábra.

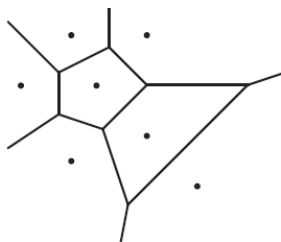
A végtelen periodikus szerkezetek kezelését megkönnyíti, ha nem a valós térben foglalkozunk velük, hanem annak egy transzformáltján, melyet reciproktérnek nevezünk. Ha a valós tér pontjai a $T = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3$ egyenlettel adhatóak meg ahol $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ az egységvektorok, akkor a reciproktér pontjai a $G = c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2 + c_3 \cdot \vec{b}_3$ egyenlettel írhatóak fel, ahol $\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$, $\vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_2 \cdot (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)}$, $\vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)}$. A reciproktérben az elemi cella megfelelőjét Brillouin-zónának nevezzük. Belátható hogy az első Brillouin-zóna pedig megegyezik a valós térbeli Wigner–Seitz-cellával.



5.2. ábra.

Vegyük észre, hogy a tércentrált köbös rács Wigner–Seitz-cellája nem más, mint ennek a rácsnak, mint pontrendszernek a Dirichlet–Voronoi-cellája.

Legyen $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ véges sok pont halmaza a síkon. Ekkor a következőképpen definiálhatjuk D_i Dirichlet–Voronoi-cellákat: $D_i = \{w \in \mathbb{R}^2 : |wv_i| < |wv_j|, \forall i \neq j\}$. Tulajdonképpen arról van szó, hogy az X halmaz minden pontja körül vesszük azokat a pontokat, amelyek a kiszemelt ponthoz közelebb vannak, mint a pontrendszer összes többi pontjához képest. Ezzel a konstrukcióval a D_i cellák konvex poligonok lesznek (5.3 ábra). Analóg módon definiálható a Dirichlet–Voronoi-cella háromdimenziós esetben is. Ekkor konvex politópokat kapunk Dirichlet–Voronoi-cellákként.



5.3. ábra.

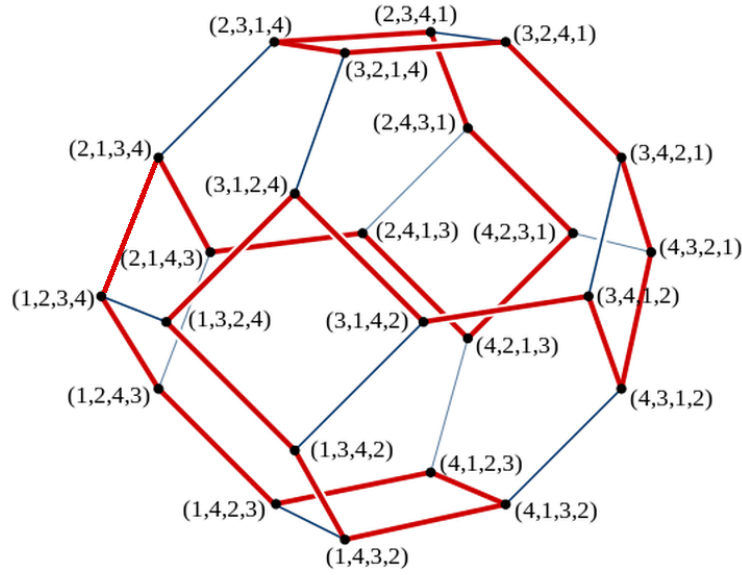
A definíció következményeként a Dirichlet–Voronoi-cella úgy is előállítható, hogy a kiszemelt pontot az összes elsőszomszéd-ponttal összekötjük, és minden egyes ilyen összekötő szakasz felezőmerőleges síkját vesszük. A Dirichlet–Voronoi-cellának a támaszsíkjai ezek közül a síkok közül kerülnek ki.

Továbbá, a tércentrált köbös rács reciprokl rácsa a lapcentrált köbös rács (face centered cubic, FCC), amelynek az elemi cellája olyan, hogy egy kocka csúcsaiban és lapközéppontjaiban ülnek az atomok. Mármint az FCC rács Dirichlet–Voronoi-cellája a rombdodekaéder. Továbbá, mivel a két rács egymás reciproka, a két Dirichlet–Voronoi-cella egymás duálisa.

5.2. Kombinatorikus tulajdonságok

5.1. Definíció. Egy G gráf azon körét, mely a gráf összes csúcsán pontosan egyszer halad át, Hamilton-körnek nevezzük.

Egy P konvex politóp csúcsai és élei gráfot formálnak, melyet P vázának is szokás nevezni. A következőkben azt fogjuk belátni, hogy P gráfja Hamilton-gráf, azaz létezik olyan kör P -ben, amely az összes csúcson pontosan egyszer halad át. Könnyen megmutatható, hogy minden szabályos és féligszabályos háromdimenziós konvex politóp gráfja Hamilton-gráf. A csonkított oktaéder gráfját az 5.4 ábra mutatja.



5.4. ábra.

Látható, hogy a háromdimenziós permutaéder gráfja Hamilton-gráf, és ez a magasabb dimenziós permutaéderek gráfjára is igaz. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, egy megfelelő címkézést kell alkalmaznunk a csúcsokra. Ez a címkézés eltér attól a koordináta-címkézéstől, amit a 2. fejezetben alkalmaztunk. A címkék most csak szám- n -esek, ahol a számok nem koordinátákat jelentenek. Itt is az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges rendezését használjuk. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő két rendezést a 3.3 Tételben megadott generátor transzpozíciók valamelyike visz át egymásba.

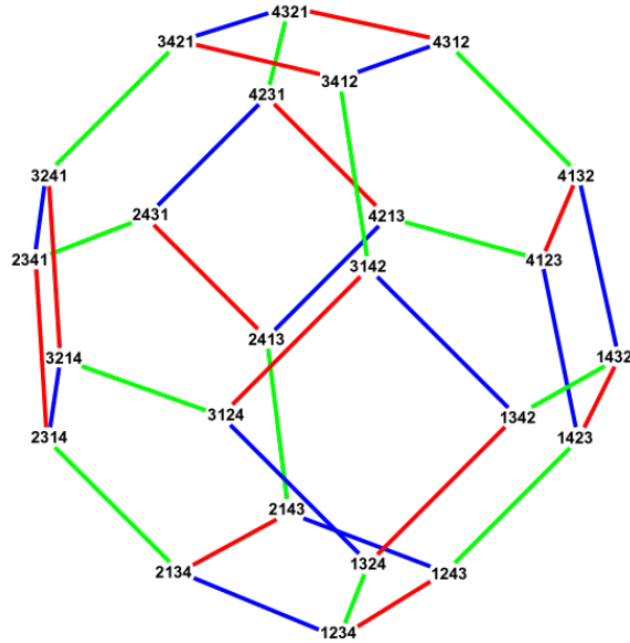
Az 5.4. ábra ilyen címkézést mutat a háromdimenziós esetben. A generátorok értelemszerűen itt az $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ transzpozíciók (a 4.1 alfejezetben ezek a koordináták transzpozíciói voltak, amelyeket tükrözések valósítottak meg). Fontos kiemelni, hogy az $(i, i + 1)$ transzpozíció azt a permutálást jelenti, amely a rendezés i -edik helyén levő elemet (számot) az $(i + 1)$ -ik helyen levő elemmel cseréli fel. Ez utóbbi szabály az n -dimenziós permutaéder ilyen módon történő címkézésére is érvényes.

Ebben a felfogásban a permutaédert lényegében egy (megfelelően) címkézett gráfként defináljuk. Megmutatható, hogy az ilyen módon megadott gráf izomorf a politópként definiált permutaéder gráfjával. Az izomorfizmust a S_n csoport, mint Coxeter-csoport elemi tulajdonságai biztosítják. Közelebbről, a permutaéder, mint gráf, nem más, mint a megadott transzpozíciókkal generált S_n csoport *Cayley-gráfja*.

Tekintsünk egy (G, X) párt, ahol G egy csoport, X pedig a csoport egy generátorrendszere (azaz, a csoport egy olyan részhalmaza, amelynek elemeiből felépített alkalmas szorzatokkal a csoport minden eleme megadható). A $C(G, X)$ Cayley-gráf

egy olyan gráf, amelynek csúcsait a csoport elemei képezik, és két csúcsot – jelöljük őket g_1 -el és g_2 -vel – akkor és csak akkor köt össze él, ha teljesül rájuk, hogy $g_2 = g_1x$, ahol $x \in X$.

Az új címkézés szerint tehát az S_n csoport elemei jelölik a csúcsokat. Két csúcsot – jelöljük őket most is g_1 -el és g_2 -vel – pontosan akkor köt össze él, ha teljesül rájuk $g_2 = g_1x$, ahol x egy transzpozíció az S_n halmazt generáló transzpozíciók közül. Az 5.5 ábrán látható a háromdimenziós permutaéder reprezentálása az S_4 csoport Cayley-gráfjával. Itt a színezéssel hangsúlyozzuk a Cayley-gráf jellegét: az élek színei az $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ generátorokkal való szorzást jelölik.



5.5. ábra.

Végül alkalmazzuk a Johnson-Trotter permutáció generáló algoritmust annak érdekében, hogy megalkossuk a Cayley-gráf Hamilton-körét. Ez egy rekurzív séma, mely azon alapszik, hogy egy adott n számhoz tartozó permutációk sorozata megadható az $n - 1$ számhoz tartozó permutációk sorozatával, ha az n elemet beszúrjuk a rövidebb permutációk összes lehetséges pozíciójába. Nevezzük az új elemet x -nek. Látható, hogy x -et n darab helyre szúrhatjuk be. Azt a permutációt válasszuk elsőnek, amelynél az n darab elem növekvő sorrendben van. Ezután szomszédos elemek cseréjével eljuttatjuk x -et az n -edik pozícióból az első pozícióig (ekkor n darab permutáció keletkezik). Mivel a x mozgatásával nem kapunk újabb permutációkat, ezért megcseréljük az n -edik és az $(n - 1)$ -edik helyen álló elemet, majd a x -et visszajuttatjuk az n -edik pozícióba (így újabb n darab permutáció keletkezik). Ekkor újabb permutációk generálása érdekében az első és második helyen álló elemet cseréljük meg, és az x -et újra az első helyre juttatjuk. Ezt a konstrukciót folytatjuk addig,

amíg meg nem kapjuk az n elem összes permutációját ($n! - 1$ darab szomszédos elem cseréjével). Az algoritmus rekurzív sémáját $n = 2, 3, 4$ esetén az 5.6 ábra mutatja.

<u>n=2</u>	<u>n=4</u>	
12	1234	4321
21	1243	3421
	1423	3241
	4123	3214
<u>n=3</u>	4132	2314
	1432	2341
123	1342	2431
132	1324	4231
312	3124	4213
321	3142	2413
231	3412	2143
213	4312	2134

5.6. ábra.

Ha a permutaéder csúcsai a csúcskoordinátákhoz tartozó permutációk inverzeivel vannak címkézve, akkor ez a címkézés írja le a Cayley-gráfját az n -elemű szimmetrikus csoportnak, melyet a permutációk szomszédos elemeinek cseréjével generáltunk. Ekkor a Johnson-Trotter algoritmus által generált permutációk sorozatában bármely két egymást követő permutáció, annak felel meg, hogy két végpontot egy él köt össze a permutaéderben. Az egész sorozat pedig egy Hamilton-utat határoz meg a permutaéderben, amely minden csúcson pontosan egyszer halad át. Ha a permutációk sorozatát kiegészítjük egy éllel, amely az utolsó permutációt a sorozatban összeköti az elsővel, akkor egy Hamilton-kört kapunk. Ez a Hamilton-kör látható pirossal az 5.4 ábrán.

Ahogy azt láttuk, az n -dimenziós permutaéder nem más, mint az A_{n-1} Coxeter-csoport által generált $(n - 1)$ -dimenziós Wythoff-politóp (ahol a kezdeti pont általános helyzetben van). Másfelől azt kaptuk eredményként, hogy a konvex politópok gráfjai Hamilton-gráfok. Ekképp természetes lépés, hogy továbbmenjünk és vegyük azokat az analóg politópokat, melyek esetén az A_{n-1} egy tetszőleges (véges) Coxeter-csoporttal van helyettesítve. Ebből arra jutunk tehát, hogy ezen konvex politópok is rendelkeznek Hamilton-gráffal. Ez egy közvetlen következménye Conway eredmények melyet 1989-ben fedezett fel.

5.2. Tétel. *Legyen W egy véges csoport, melyet $R_1, R_2, \dots, R_n$ tükrözések generálnak. Ekkor a generátorokhoz tartozó Cayley-gráfban létezik Hamilton-kör.*

Irodalomjegyzék

- [1] B. Szendrei Mária, *Absztrakt algebra*, Szóbeli egyetemi előadás, Szeged, 2013.
- [2] Coxeter, Harold Scott Macdonald, *Regular Polytopes*, Methun & Co., London, 1948.
- [3] Gévay Gábor, Permutahedra, Hamilton cycles and some generalizations, *Culture and Science*, **14-15**, (2003-2004), 55-60.
- [4] G. Horváth Ákos, Lángi Zsolt, *Kombinatorikus geometria*, Polygon Kiadó, Szeged, 2011.
- [5] Nánai László, Füle Mikós Jenő, *Kondenzált anyagok fizikája*, Szóbeli egyetemi előadás, 2013.
- [6] Igor Pak, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*,
<http://www.math.ucla.edu/~pak/book.htm>
Elérés: 2014.05.10.
- [7] Robert Sedgewick, Permutation Generation Methods, *Computing Surveys* 9, (1977), 137-164.
- [8] Szilassi Lajos, *Térgeometriai struktúrák számítógépes modellezése*,
<http://www.model.u-szeged.hu/cd/content/szilassi/Euler3d-kurzus/06%20%20%20T%2582rkit%2594lt%258b%20poli%2582derek/06.doc>
Elérés: 2014.05.10.
- [9] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Text in Mathematics, vol. **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] <http://en.wikipedia.org/wiki/Permutohedron>
Elérés: 2014.05.10.
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Steinhaus%E2%80%93Johnson%E2%80%93Trotter_algorithm
Elérés: 2014.05.10.

[12] <http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/~thilo/contents/fedorov.htm>

Elérés: 2014.05.10.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Dr. Gévay Gábor témavezetőmnek a számos építő megjegyzést, hozzászólást és kérdésfelvetést, amellyel jelentősen hozzájárult a szakdolgozat elkészítéséhez. Szintén köszönöm, hogy kérdéseimmel bármikor bátran fordulhattam hozzá.

Nyilatkozat

Alulírott Holyba Levente kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Szeged, 2014.05.12.

Holyba Levente